

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

~ КЛАССИКИ НАУКИ ~



АНРИ ПУАНКАРЕ

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

В ТРЕХ ТОМАХ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

академика Н. Н. БОГОЛЮБОВА
(главный редактор),

доктора физ.-матем. наук В. И. АРНОЛЬДА,
доктора физ.-матем. наук И. Б. ПОГРЕБЫССКОГО



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1974

АНРИ ПУАНКАРЕ

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

III

МАТЕМАТИКА

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ
И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ РАБОТ
АНРИ ПУАНКАРЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1974

СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»

Серия основана академиком *С. И. Вавиловым*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

академик *И. Г. Петровский* (председатель),

академик *А. А. Имшенецкий*, академик *Б. А. Казанский*,

академик *Б. М. Кедров*, член-корреспондент АН СССР *Б. Н. Делоне*,

профессор *Ф. А. Петровский*, профессор *Л. С. Полак*,

профессор *Н. А. Фигуровский*, профессор *И. И. Шафрановский*

Анри Пуанкаре. Избранные труды в трех томах. Том III. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественно-научных работ Анри Пуанкаре. Изд-во «Наука», 1974 г.

В настоящую книгу включены четыре большие статьи А. Пуанкаре о линейных дифференциальных уравнениях и об автоморфных функциях, а также две статьи по алгебраической геометрии, ряд работ Пуанкаре по электродинамике, теории относительности, теории квантов и кинетической теории газов.

Том завершается обзорами математических и естественнонаучных работ Пуанкаре, написанными им самим и другими математиками и физиками: Л. де Бройлем, Ж. Адамаром, Г. Жюлиа, А. Вейлем, Г. Фрейденталем и Л. Шварцем.

Редакторы третьего тома *В. И. Арнольд* и *Н. Н. Боголюбов*

Составитель *Е. И. Погребысская*

В третий и последний том собрания трудов А. Пуанкаре включены основные работы по теории автоморфных функций и алгебраической геометрии, а также несколько работ по теоретической физике.

Серию больших статей об автоморфных функциях составляют следующие работы: «Теория фуксовых групп», «О фуксовых функциях» (перевод Ю. А. Данилова, редакция перевода и комментариев Э. Б. Винберга), «О группах линейных уравнений» и «Фуксовы функции и уравнение $\Delta u = e^u$ » (перевод Ю. А. Данилова, редакция перевода и комментариев Ю. С. Ильяшенко).

Эти работы Пуанкаре, связывающие воедино проблему униформизации римановых поверхностей, теорию дискретных групп дробно-линейных преобразований и теорию линейных дифференциальных уравнений «фуксова типа», получили в дальнейшем значительное развитие, в результате которого многие (но пока не все) утверждения Пуанкаре получили точный смысл и были доказаны с полной строгостью.

Работы А. Пуанкаре по алгебраической геометрии представлены двумя статьями «О кривых на алгебраической поверхности» (перевод и комментарий В. И. Данилова). В том включены также следующие работы Пуанкаре по теоретической физике: две статьи «О динамике электрона» (комментарий Д. Д. Иваненко, перевод первой из них сделан И. С. Зарубиной), статья «Динамика электрона» (перевод Е. М. Шифриной, комментарий И. Я. Итенберга и А. М. Френка), три статьи по теории квантов (перевод первых двух — Е. М. Шифриной, редакция перевода и комментариев А. М. Френка, перевод и комментарий статьи «Гипотеза квантов» А. М. Френка), статья «Измерение времени» (перевод И. С. Зарубиной, комментарий Ю. Б. Молчанова, Ю. В. Сачкова, Э. М. Чудинова), введение к известному курсу «Электричество и оптика» (перевод Н. Я. Рабинович, комментарий И. Б. Погребысского), доклад на Международном конгрессе по искусству и науке в Сент-Луисе (сентябрь 1904 г.) «Настоящее и

будущее математической физики» (перевод Т. Д. Блохинцевой), «Замечания о кинетической теории газов» (перевод Е. М. Шифриной, комментарий Д. Н. Зубарева).

Кроме того, в настоящий том включен обзор работ Пуанкаре, сделанный им самим в 1901 г. (перевод А. В. Чернавского). Том завершается статьями о работах Пуанкаре. Очерк Г. Жюлиа написан для Ассоциации бывших учеников лицея в Нанси в связи с 150-летием лицея и 100-летием со дня рождения А. Пуанкаре, чье имя лицей носит с 1913 г. Речи Ж. Адамара и Л. де Бройля произнесены на торжественном заседании в Сорбонне 15 мая 1954 г. в связи со столетием со дня рождения А. Пуанкаре. Доклады А. Вейля, Г. Фрейденталя, Л. Шварца прочитаны в Гааге 11 сентября 1954 г. на заседании, организованном в связи со столетием со дня рождения А. Пуанкаре в рамках проходившего в Голландии Международного математического конгресса. Все эти выступления переведены Ю. А. Даниловым.

Подстрочные примечания, помеченные Н. Е. Н. и Р. Г., принадлежат Н. Е. Норлунду (N. E. Nörlund) и Р. Гарнье (R. Garnier) — редакторам французского издания собрания сочинений А. Пуанкаре, Д. И.—Д. Д. Иваненко.



Lois Ly

МАТЕМАТИКА

АВТОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ
АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ТЕОРИЯ ФУКСОВЫХ ГРУПП*

В ряде мемуаров**, представленных Академии наук, я ввел в рассмотрение некоторые новые функции, названные мною фуксовыми, клейновыми, тэта-фуксовыми и дзета-фуксовыми. Подобно тому, как эллиптические и абелевы функции позволяют интегрировать алгебраические дифференциалы, новые трансцендентные функции позволяют интегрировать линейные дифференциальные уравнения с алгебраическими коэффициентами. Краткий обзор полученных мной результатов содержится в заметке, помещенной в «Mathematische Annalen»***. В настоящей работе я хочу изложить их подробно и поэтому начинаю с изучения свойств фуксовых групп с тем, чтобы потом перейти к рассмотрению тех следствий, к которым эти свойства приводят с точки зрения теории функций.

I. Вещественные подстановки

Пусть z — комплексная переменная, значение которой определяется положением точки на плоскости; t — комплексная функция этой переменной, задаваемая соотношением

$$t = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (1)$$

Не ограничивая общности, будем предполагать, что

$$ad - bc = 1.$$

Если точка z описывает две дуги какой-либо кривой, пересекающиеся под некоторым углом α , то точка t также описывает две дуги, пересекающиеся под тем же углом α . Следовательно, подстановка $\left(z, \frac{az + b}{cz + d}\right)$ **** сохраняет углы. И действительно, функция $\frac{az + b}{cz + d}$ — аналитическая.

* Acta mathematica, 1882, 1, 1—62.

** H. P o i n c a r é. Oeuvres, t. II. Paris, Gautier-Villars, 1916, 1—49.

*** Там же, стр. 92—105.

**** Ниже я всюду буду придерживаться обозначений Жордана. Подстановка $[z, f(z)]$, или $[x, y; f(x, y), \varphi(x, y)]$, означает операцию, которая состоит в замене z на $f(z)$, или, что то же, в замене x на $f(x, y)$ и y — на $\varphi(x, y)$. Под-

Пусть z описывает окружность, тогда t также описывает окружность, т. е. подстановка $\left(z, \frac{az + b}{cz + d}\right)$ переводит окружности в окружности.

Наконец, если z_1, z_2, z_3, z_4 — четыре значения z , а t_1, t_2, t_3, t_4 — соответствующие значения t , то

$$\frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_3} \frac{t_4 - t_3}{t_4 - t_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2}. \quad (2)$$

В общем случае существуют два значения z , совпадающие с соответствующими им значениями t . Они называются *неподвижными точками* подстановки (1).

Если

$$(a + d)^2 \neq 4,$$

то неподвижные точки различны. Обозначив их через α и β , мы сможем представить соотношение (1) в виде

$$\frac{t - \alpha}{t - \beta} = K \frac{z - \alpha}{z - \beta}, \quad (3)$$

где K — некоторая постоянная, называемая *множителем*.

Наоборот, если

$$a + d = \pm 2,$$

то неподвижные точки совпадают, и

$$\alpha = \beta.$$

В этом случае соотношение (1) можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{t - \alpha} = \frac{1}{z - \alpha} \pm c. \quad (4)$$

Таковы основные свойства линейных подстановок $\left(z, \frac{az + b}{cz + d}\right)$. Сделаем теперь еще одно предположение: будем считать, что коэффициенты a, b, c и d вещественны. Подстановку (1) с вещественными коэффициентами я буду называть *вещественной подстановкой*.

Из ее определения следует, что мнимая часть t положительна, равна нулю или отрицательна в зависимости от того, будет ли положительна,

становка, обратная $[z, f(z)]$, имеет вид $[f(z), z]$. Произведение двух подстановок есть операция, состоящая в последовательном их выполнении.

Множество подстановок образует *группу*, если вместе с любой своей подстановкой оно содержит и её обратную и ему принадлежит произведение любых двух входящих в него подстановок.

Группа A *изоморфна* другой группе B , если каждой подстановке из B соответствует одна и только одна подстановка из A , причем произведению двух подстановок из B отвечает произведение сопоставленных им подстановок из A .

Если группа B также изоморфна A , то обе группы изоморфны друг другу, и изоморфизм называется *голоморфическим*. В противном случае он носит название *меридрического* изоморфизма [1].

равна нулю или отрицательна мнимая часть z . Иначе говоря, подстановка (1) сохраняет ось вещественных частей (в дальнейшем я буду обозначать эту ось через X) и, кроме того, переводит в себя ту часть плоскости, которая расположена над этой осью.

Если z описывает окружность с центром на оси X , то t также описывает окружность с центром на оси X . Если z_1 и z_2 — две комплексно сопряженные величины, то соответствующие им значения t_1 и t_2 также комплексно сопряжены.

Пусть α и β — два значения z ; γ и δ — соответствующие им значения t ; α' , β' , γ' и δ' — величины, комплексно сопряженные по отношению к α , β , γ и δ . Тогда в силу (2) справедливо соотношение

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\alpha - \beta'} \frac{\beta - \beta'}{\beta - \alpha'} = \frac{\gamma - \gamma'}{\gamma - \delta'} \frac{\delta - \delta'}{\delta - \gamma'}.$$

Обозначив для краткости

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\alpha - \beta'} \frac{\beta - \beta'}{\beta - \alpha'} = (\alpha, \beta),$$

запишем его в виде

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta). \quad (5)$$

Изучением вещественных подстановок занимались различные геометры и, в частности, Клейн в своих исследованиях по теории модулярных функций. Клейн ввел классификацию вещественных подстановок на эллиптические, параболические и гиперболические.

Эллиптическими называются подстановки, для которых

$$(a + d)^2 < 4.$$

Их неподвижные точки α и β комплексно сопряжены. Следовательно, одна из этих точек расположена над осью X , другая — под X . Соотношение (1) в этом случае можно привести к виду (3); постоянная K либо отрицательна, либо комплексна, модуль ее равен единице. Если z описывает окружность, проходящую через α и β , то t также описывает окружность, проходящую через α и β и пересекающуюся с первой окружностью под углом, равным аргументу K .

Подстановка (1) переводит в себя всякую окружность с центром на продолжении отрезка $\alpha\beta$, делящую этот отрезок гармонически.

Параболическими называются подстановки, для которых

$$(a + d)^2 = 4.$$

Их неподвижные точки сливаются в одну точку, лежащую на оси X . Соотношение (1) в этом случае приводится к виду (4), причем α вещественна. Если z описывает окружность, проходящую через α , то t также описывает окружность, проходящую через α и касающуюся первой. Подстановка (1) оставляет неизменными окружности, касающиеся оси X в точке α .

Пусть C — одна из таких окружностей, m_0 — точка на C . Подстановка (1) переводит m_0 в некоторую другую точку m_1 той же окружности, m_1 — в точку m_2 , также лежащую на C , m_2 — в m_3 и т. д. При x , стремящемся к бесконечности, m_x будет неограниченно приближаться к α .

Пусть m_{-1} — точка, которую подстановка (1) переводит в m_0 , m_{-2} — точка, переходящая под действием этой же подстановки в m_{-1} и т. д. При x , стремящемся к бесконечности, точка m_{-x} , как и прежде, будет неограниченно приближаться к α .

Обозначим через C_x окружность с центром на оси X , проходящую через α и m_x и, следовательно, пересекающуюся ортогонально с окружностью C в точках α и m_x . Ясно, что подстановка (1) переводит C_{-1} в C_0 , C_0 — в C_1 , C_1 — в C_2 и, вообще, окружность C_x в C_{x+1} . Кроме того, если x обращается в положительную или отрицательную бесконечность, то C_x становится окружностью бесконечно малого радиуса. Это означает, что, применив подстановку (1) или обратную ей бесконечно много раз к окружности, проходящей через α , с центром на оси X , мы получим окружность бесконечно малого радиуса.

Отсюда следует, что дуга кривой, имеющая конечную длину и не пересекающаяся с осью X , не может пересекать бесконечно много окружностей C_x , т. е. последовательных образов проходящей через точку α окружности C_0 с центром, лежащим на оси X .

Гиперболическими называются подстановки, для которых

$$(a + d)^2 > 4.$$

Их неподвижные точки α и β различны и лежат на оси X . Соотношение (1) в этом случае имеет вид (3), причем множитель K — веществен и положителен. Кроме того, всегда можно считать, что

$$K > 1.$$

Если z описывает окружность, проходящую через α или через β , то t также описывает окружность, проходящую через α или через β и касающуюся первой. Подстановка (1) оставляет неизменными окружности, которые проходят через α и β .

Обозначим, как и прежде, через C окружность, проходящую через α и β , и через

$$\dots m_{-2}, m_{-1}, m_0, m_1, m_2, \dots$$

— последовательность точек, таких, что подстановка (1) переводит m_x в m_{x+1} . Ясно, что точка m_x при x , стремящемся к $+\infty$, будет неограниченно приближаться к β , а при x , стремящемся к $-\infty$, к точке α .

Пусть C_x — окружность, с центром на оси X , проходящая через α и m_x . При x , стремящемся к $+\infty$, C_x будет сколь угодно мало отличаться от окружности, описанной на отрезке $\alpha\beta$ как на диаметре. При x , стремящемся к $-\infty$, радиус C_x будет неограниченно убывать. Следовательно, применив бесконечно много раз подстановку (1) к окружности C_0 , проходящей через α , с центром на оси X , мы в пределе получим окружность,

имеющую отрезок $\alpha\beta$ своим диаметром. Применяв к C_0 бесконечно много раз обратную подстановку, мы в пределе получим окружность нулевого радиуса.

Наоборот, если подстановку (1) применить бесконечно много раз к окружности, проходящей через β , с центром на оси X , то радиус предельной окружности окажется равным нулю, а применив к той же окружности бесконечно много раз обратную подстановку, мы в пределе получим окружность, имеющую отрезок $\alpha\beta$ своим диаметром.

Отсюда следует, что дуга конечной длины любой кривой, не пересекающейся с осью X , будет пересекаться с бесконечно многими окружностями C_x , т. е. с последовательными образами окружности C_0 , или лишь с конечным числом их в зависимости от того, будет ли эта дуга пересекаться с окружностью, имеющей отрезок $\alpha\beta$ своим диаметром, или нет. Если

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta),$$

то существует вещественная подстановка *, которая переводит α в γ и β в δ . Эта подстановка определяется соотношением

$$\frac{t - \gamma}{t - \delta} \frac{\gamma' - \delta}{\gamma' - \gamma} = \frac{z - \alpha}{z - \beta} \frac{\alpha' - \beta}{\alpha' - \alpha}.$$

Вещественные подстановки обладают еще одним свойством, на которое я хотел бы обратить внимание. Дифференцируя соотношение (1), находим

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{(cz + d)^2}.$$

Обозначая через y мнимую часть z и через Y мнимую часть t , получаем

$$\left| \frac{dt}{dz} \right| = \frac{Y}{y}.$$

II. Конгруэнтные фигуры

Будем говорить, что две фигуры *конгруэнтны*, если одна из них является образом другой при некоторой *вещественной* подстановке. Поскольку вещественные подстановки образуют группу, ясно, что две фигуры, конгруэнтные одной и той же третьей, конгруэнтны между собой.

Прежде всего можно сформулировать следующие теоремы.

В двух конгруэнтных фигурах гомологичные углы равны.

Если в двух конгруэнтных фигурах точка γ гомологична α , а точка δ гомологична β , то

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta). \quad (1)$$

* Необходимо, чтобы точки α и β (а, следовательно, γ и δ) были расположены по одну сторону от оси X . В противном случае определитель $ad - bc$ будет отрицательным.

Последнее соотношение можно записать иначе.

Действительно, рассмотрим величины α , β и сопряженные с ними α' , β' , такие, что

$$(\alpha, \beta) = \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha - \beta'} \frac{\beta - \beta'}{\beta - \alpha'}.$$

Четыре точки α , β , α' , β' лежат на одной и той же окружности с центром на оси X .

Сделаем еще одно предположение: будем считать, что обе точки α и β лежат над осью X . Тогда окружность, о которой идет речь, будет пересекаться с осью X в двух точках, которые мы обозначим h и k . Пусть h — та из двух точек, которая принадлежит дуге $\beta\beta'$, а k — та из них, которая принадлежит дуге $\alpha\alpha'$. Введем новое обозначение:

$$[\alpha, \beta] = \frac{\alpha - h}{\alpha - k} \frac{\beta - k}{\beta - h}.$$

Величина $[\alpha, \beta]$ вещественна, положительна и больше 1. Кроме того,

$$(\alpha, \beta) = \frac{4 [\alpha, \beta]}{([\alpha, \beta] + 1)^2}.$$

Если γ есть некоторая точка, принадлежащая окружности $\alpha\beta$, то

$$[\alpha, \gamma][\gamma, \beta] = [\alpha, \beta].$$

Отсюда ясно, что с помощью нового обозначения соотношение (1) можно представить в виде

$$[\alpha, \beta] = [\gamma, \delta].$$

Посмотрим, что происходит, когда точки α и β становятся бесконечно близкими. Пусть

$$z = x + y\sqrt{-1},$$

$$dz = dx + dy\sqrt{-1},$$

$$|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Пренебрегая бесконечно малыми более высокого порядка, получаем

$$[z, z + dz] = 1 + \frac{|dz|}{y},$$

или

$$\ln [z, z + dz] = \frac{|dz|}{y}.$$

Таким образом, натуральный логарифм величины $[z, z + dz]$ пропорционален модулю dz и не зависит от аргумента последнего.

Интеграл

$$\int \frac{|dz|}{y},$$

взятый вдоль дуги некоторой кривой, назовем длиной L этой кривой.

Двукратный интеграл

$$\iint \frac{dx dy}{y^2},$$

взятый по некоторой плоской фигуре, назовем площадью S этой фигуры.

Из сказанного ранее следует, что две конгруэнтные дуги кривой имеют одинаковую L , а две конгруэнтные плоские кривые имеют одинаковую S . Дуга $\alpha\beta$ окружности с центром на оси X имеет L , равную натуральному логарифму $[\alpha, \beta]$.

Я не могу обойти молчанием ту связь, которая существует между введенными только что понятиями и неевклидовой геометрией Лобачевского.

Условимся не придавать словам *прямая*, *длина*, *расстояние*, *площадь* их обычного смысла. Будем называть прямой любую окружность с центром на оси X , длиной данной кривой — величину, которую мы обозначили через L , расстоянием между двумя точками — величину L соединяющей их дуги окружности с центром на оси X и, наконец, площадью плоской фигуры — то, что ранее было названо нами величиной S .

Кроме того, будем считать, что слова *угол* и *окружность* имеют обычный смысл, но центром окружности будем называть точку, находящуюся на одинаковом расстоянии (имеется в виду расстояние, понимаемое в новом смысле) от всех точек окружности, а само расстояние — радиусом окружности.

Для величин, понимаемых в новом смысле, справедливы теоремы геометрии Лобачевского, т. е. к ним применимы все теоремы обычной геометрии за исключением тех, которые следуют из постулата Евклида (о параллельных).

Подобная геометрическая терминология оказала мне неоценимые услуги в процессе моих исследований, однако я не буду прибегать к ней в настоящей работе во избежание каких бы то ни было недоразумений.

III. Дискретные группы

Рассмотрим бесконечную последовательность подстановок вида

$$\left(z, \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right), \quad (1)$$

которые, положив для краткости

$$f_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i},$$

можно представить в виде

$$[z, f_i(z)].$$

Для еще большей краткости будем обозначать подстановку просто

$$f_i(z).$$

Индекс i по предположению пробегает значения от 0 до ∞ . Будем считать также, что

$$a_0 = d_0 = 1, \quad b_0 = c_0 = 0,$$

и, следовательно,

$$f_0(z) = z.$$

Наконец, условимся считать, что эти подстановки образуют группу.

Введем некоторые обозначения, которые понадобятся нам в дальнейшем. Пусть

$$f_i^2(z) = f_i[f_i(z)], \quad f_i^3(z) = f_i[f_i^2(z)], \quad \dots, \quad f_i^m(z) = f_i[f_i^{m-1}(z)].$$

Обобщение $f_i^m(z)$ на случай нулевого или отрицательного m определим столь же естественно:

$$f_i^0(z) = z, \quad z = f_i^{-1}[f_i(z)], \quad f_i^{-m}(z) = f_i^{-1}[f_i^{-m+1}(z)].$$

Если $f_1(z)$ — одна из подстановок рассматриваемой группы, то все подстановки, для которых справедлива общая формула

$$f_1^m(z), \tag{2}$$

также принадлежат этой группе.

Пусть $f_2(z)$ — некоторая подстановка, принадлежащая нашей группе, но не входящая в число подстановок, описываемых формулой (2). Тогда все подстановки вида

$$f_1^\alpha(f_2^\beta(f_1^\gamma(f_2^\delta(\dots(f_1^\lambda(f_2^\mu(z))\dots))), \tag{3}$$

также принадлежат рассматриваемой группе.

Если теперь $f_3(z)$ — подстановка, принадлежащая той же группе, но не представимая в виде (3), т. е. в виде комбинации f_1 и f_2 ; f_4 — подстановка, принадлежащая группе, но не представимая в виде комбинации подстановок f_1 , f_2 и f_3 , и т. д.; наконец, f_p — подстановка, не представимая в виде комбинации подстановок $f_1, f_2, \dots, f_{p-1}$, то подстановки, задаваемые общей формулой

$$f_{\alpha_1}^{\beta_1}(f_{\alpha_2}^{\beta_2}(\dots(f_{\alpha_n}^{\beta_n}(z)\dots)) \tag{4}$$

(где индексы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ могут принимать значения 1, 2, $\dots, p-1$ или p , а индексы $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ — целые, положительные или отрицательные числа), также принадлежат группе.

Может случиться так, что на этом все подстановки рассматриваемой группы окажутся исчерпанными, т. е. любую подстановку группы можно будет представить в виде комбинации подстановок $f_1, f_2, \dots, f_p$. В этом случае говорят, что подстановки $f_1, f_2, \dots, f_p$ порождают группу или что $f_1, f_2, \dots, f_p$ составляют систему образующих подстановок группы. Ясно, что одна и та же группа может иметь бесконечно много систем образующих

подстановок, но любой из них достаточно для того, чтобы полностью задать группу.

Могут встретиться и такие группы, которые не могут быть порождены конечным числом образующих подстановок, но мы не будем останавливаться на их рассмотрении.

Итак, Пусть G — группа, порожденная p образующими подстановками $f_1, f_2, \dots, f_p$, так что любая из входящих в нее подстановок представима в виде (4).

Назовем *показателем* подстановки этой группы сумму модулей целых (положительных или отрицательных) чисел $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$.

Может оказаться, что не все подстановки, содержащиеся в формуле (4), различны. В этом случае между некоторыми из них возникают тождества

$$f_{\alpha_1}^{\beta_1}(f_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots (f_{\alpha_n}^{\beta_n}(z) \dots)) = f_{\gamma_1}^{\delta_1}(f_{\gamma_2}^{\delta_2} \dots f_{\gamma_n}^{\delta_n}(z) \dots). \quad (5)$$

Соотношение (5) всегда можно привести к виду

$$f_{\alpha_1}^{\beta_1}(f_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots f_{\alpha_n}^{\beta_n}(z) \dots) = z. \quad (6)$$

Здесь α и β имеют тот же смысл, что и в формуле (4).

В общем случае все соотношения вида (6) можно считать следствиями некоторого их числа. Последние называются *определяющими соотношениями*, именно они и являются существенно различными.

Группа H изоморфна группе G , если она порождена одинаковым с G числом образующих подстановок, удовлетворяющих тем же определяющим соотношениям, что и образующие группы G .

Если между подстановками группы H не существует иных соотношений вида (6), кроме тех, которым удовлетворяют подстановки группы G , то изоморфизм между H и G взаимный и, следовательно, *голоэдрический*. В противном случае изоморфизм *мериэдрический*.

В силу соотношений (6) одну и ту же подстановку можно представить в виде (4) бесконечно многими способами, вследствие чего данное выше определение *показателя подстановки* допускает некоторую неоднозначность. Поэтому мы будем называть показателем подстановки *наименьшее* из значений, которые может принимать сумма модулей $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, если эту подстановку записать в виде (4).

Здесь уместно указать на важное различие, существующее между отдельными разновидностями групп, образуемых вещественными подстановками. Прежде всего следует выделить не рассматриваемые нами группы, содержащие лишь конечное число подстановок. Эти группы были глубоко исследованы многими геометрами. Если же число подстановок, принадлежащих группе, бесконечно, то можно высказать две различные гипотезы:

а) можно предположить, что среди подстановок группы можно выбрать такую

$$(z, f_i(z)),$$

что $f_i(z)$ бесконечно мало отличается от z (при любом z), т. е. группа в этом случае содержит инфинитезимальную подстановку;

б) можно предположить, что группа не содержит инфинитезимальной подстановки.

Группы первого рода называются *непрерывными*, группы второго рода — *дискретными*.

Не существует однозначной аналитической функции z , которая бы оставалась неизменной под действием подстановок какой бы то ни было непрерывной группы, поскольку такая функция должна была бы принимать одно и то же значение в бесконечно близких точках и, следовательно, была бы константой. Поэтому непрерывные группы не представляют для нас никакого интереса, и мы сохраняем название *фуксовы группы* за дискретными группами, образованными вещественными подстановками.

Если группа G дискретна, то плоскость или часть плоскости можно, очевидно, разбить на бесконечно много областей, обладающих следующими свойствами.

Каждая из этих областей отвечает одной из подстановок группы G . Ту область, которая находится в соответствии с подстановкой

$$(z, f_i(z)),$$

назовем областью R_i . Область, отвечающую подстановке

$$(z, f_0(z)), \quad \text{или} \quad (z, z),$$

назовем областью R_0 .

Если z находится внутри области R_0 , то $f_i(z)$ находится внутри R_i . Иначе говоря, R_i есть образ R_0 при подстановке

$$(z, f_i(z)).$$

Пусть теперь z принадлежит внутренности области R_k , соответствующей подстановке

$$(z, f_k(z)).$$

Тогда точка $f_k^{-1}(z)$ должна принадлежать внутренности R_0 , а $f_i(f_k^{-1}(z))$ — внутренности R_i .

Утверждение о том, что R_i есть образ R_0 при некоторой вещественной подстановке, эквивалентно утверждению о том, что R_i и R_0 конгруэнтны. Следовательно, конгруэнтны все области R [2].

Воспользуемся выражением, весьма употребительным по ту сторону Рейна, и будем говорить, что разбиение плоскости на бесконечное число областей *правильно*, если, непрерывно деформируя эти области, можно добиться того, чтобы получаемое при этом новое разбиение совпало со старым таким образом, чтобы каждая область нового разбиения оказалась совмещенной с некоторой областью старого разбиения и при этом некоторая данная область нового разбиения совместилась с *любой наперед заданной*

областью старого разбиения. Что касается рассматриваемого нами разбиения плоскости, то очевидно, что при действии подстановки

$$[z, f_i(z)]$$

на области R каждая из них перейдет в некоторую другую область R , а R_0 перейдет в R_i . Это и означает, что рассматриваемое разбиение плоскости правильно.

Таким образом, проблема исследования фуксовых групп сводится к следующей проблеме: *требуется найти правильное разбиение плоскости или некоторой ее части на бесконечное множество конгруэнтных областей* [3].

Две области называются *пограничными*, если они прилегают друг к другу вдоль некоторой дуги, служащей их общей границей.

Пусть R_p — область, пограничная с R_0 вдоль дуги AB своего периметра. Дуга AB будет *одной из границ* R_0 . Можно предположить, что разбиению на бесконечное множество конгруэнтных областей подверглась не вся плоскость, а лишь часть ее. В этом случае R_0 может граничить вдоль некоторой дуги CD своего периметра с той частью плоскости, которая не подвергается разбиению на области R_i . Дуга CD также будет *одной из границ* R_0 . Границы типа AB будем называть границами первого рода, границы типа CD — второго рода.

Я всегда буду предполагать, что границами второго рода служат отрезки оси X .

Скажем несколько слов в оправдание этой гипотезы. Если некоторая часть плоскости разбита на бесконечное множество областей R и область R_0 примыкает к той части плоскости, которая не была подвергнута разбиению, то разбиение всегда можно продолжить на большую часть плоскости. Будем продолжать его до тех пор, пока R_0 не перестанет граничить с той частью плоскости, которая не участвует в разбиении, или пока R_0 не достигнет оси X . Думаю, что сказанного достаточно для того, чтобы понять причины, позволившие мне принять сформулированную выше гипотезу [4].

Назовем вершинами области R_0 концы ее границ. Мы должны различать:

1) вершины, расположенные в верхней полуплоскости относительно оси X ;

2) вершины, расположенные на оси X и разделяющие две границы первого рода;

3) вершины, расположенные на оси X и разделяющие границу первого рода и границу второго рода. Эти различные виды вершин будем называть вершинами первой, второй и третьей категории соответственно.

Точки

$$z, f_1(z), f_2(z), \dots, f_i(z), \dots$$

называются *соответствующими*.

Если точка z принадлежит внутренности R_0 , то все точки $f_i(z)$ принадлежат областям R_i , отличным от R_0 . Следовательно, **никакие** две соответ-

ствующие точки не могут лежать внутри R_0 . Точно так же точка, расположенная внутри R_0 , не может быть соответствующей ни для какой точки периметра этой области.

Наоборот, точка, расположенная на одной из границ R_0 , например на λ_p , принадлежит одновременно двум областям: R_0 и R_p . Но если точка z лежит на λ_p , т. е. на периметре R_p , то точка $f_p^{-1}(z)$ лежит на периметре R_0 — на одной из границ, которую я обозначу через λ'_p . Эта граница отделяет R_0 от области R'_p , отвечающей подстановке

$$(z, f_p^{-1}(z)).$$

Границы λ_p и λ'_p называются *сопряженными*.

Из сказанного можно сделать следующие выводы:

- 1) число границ первого рода четно, причем сами границы сопряжены;
- 2) две сопряженные границы конгруэнтны;
- 3) точки периметра R_0 (имеются в виду точки, не являющиеся вершинами, рассмотрением вершин мы займемся позднее), расположенные над осью X , попарно соответствуют друг другу.

Особое соглашение требуется для того, чтобы включить в общую схему один частный случай, который иногда может представиться.

Действительно, может случиться так, что равенство

$$f_p(z) = f_p^{-1}(z), \quad \text{или} \quad z = f_p[f_p(z)],$$

будет выполняться тождественно. При этом R_p будет совпадать с R'_p , а λ_p — с λ'_p . Но подстановка

$$(z, f_p(z))$$

в этом случае эллиптическая, и соотношение (1) из раздела I можно представить в виде (3) (раздел I), так что

$$K = -1.$$

Поскольку подстановка $(z, f_p(z))$ оставляет неизменной границу λ_p , последняя должна проходить через точку α (неподвижную точку подстановки), разбивающую границу на две конгруэнтные половины.

Следовательно, точку α можно считать вершиной, а две половины λ_p — двумя различными границами, сопряженными между собой. Таким образом, рассматриваемый частный случай оказывается сведенным к общему.

Каждая вершина принадлежит двум или более различным областям. Отсюда следует, что многие вершины R_0 могут быть соответствующими. Будем говорить, что соответствующие вершины принадлежат одному и тому же циклу.

Из сказанного ясно, что число границ первого рода четно ($2n$). Эти $2n$ границ попарно сопряжены. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — n из них, $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots$

$\dots, \lambda_{2n}$ — остальные n , сопряженные с первыми: граница λ_p сопряжена с λ_{n+p} . Пусть R_p — область, пограничная с R_0 вдоль границы λ_p ;

$$(z, f_p(z))$$

— подстановка, отвечающая R_p , так что

$$f_{n+p}(z) = f_p^{-1}(z).$$

Нетрудно видеть, что, выйдя из области R_i , отвечающей подстановке

$$(z, f_i(z)),$$

через сторону λ_p , мы попадем в область, отвечающую подстановке

$$(z, f_i[f_p(z)]).$$

Не составляет особого труда найти подстановку, отвечающую любой заданной области R_{β_v} . Пусть A — точка, лежащая внутри R_0 , B — точка, лежащая внутри R_{β_v} . Соединим эти точки какой-нибудь дугой AMB . Предположим, что эта дуга AMB , начинаясь в области R_0 , выходит из нее через границу λ_{α_1} , попадает в область R_{α_1} , затем выходит из R_{α_1} через границу λ_{α_2} , попадает в область R_{β_2} , из которой выходит через границу λ_{α_3} , попадает в область R_{β_3} и т. д. и, наконец, выходит из области $R_{\beta_{v-1}}$ через сторону λ_{α_v} и попадает в R_{β_v} . Подстановка, отвечающая области R_{β_v} , имеет вид

$$[z, f_{\alpha_1}(f_{\alpha_2}(f_{\alpha_3}(\dots)f_{\alpha_{v-1}}(f_{\alpha_v}(z) \dots))].$$

Индексы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$ в этом выражении могут принимать значения $1, 2, \dots, 2n$.

Итак, всякая подстановка, отвечающая области, до которой можно дойти, отправляясь из R_0 и пересекая по дороге конечное число границ, есть комбинация подстановок $(z, f_1), (z, f_2), \dots, (z, f_n)$. Те группы, для которых невозможно переходить из одной области в другую, пересекая при этом лишь конечное число границ, рассматриваться не будут [5]. Поэтому в нашем случае любая подстановка будет комбинацией подстановок

$$(z, f_1), (z, f_2), \dots, (z, f_n). \quad (7)$$

Как найти соотношения вида (6), которым удовлетворяют функции $f_1, f_2, \dots, f_n$?

Для этого, очевидно, достаточно исследовать вопрос о том, каким образом можно представить в виде комбинации подстановок (7) подстановку

$$(z, z), \quad \text{или} \quad (z, f_0(z)),$$

отвечающую R_0 . Воспользуемся сформулированным выше правилом: опишем какой-нибудь замкнутый контур $АМА$, проходящий через точку A ,

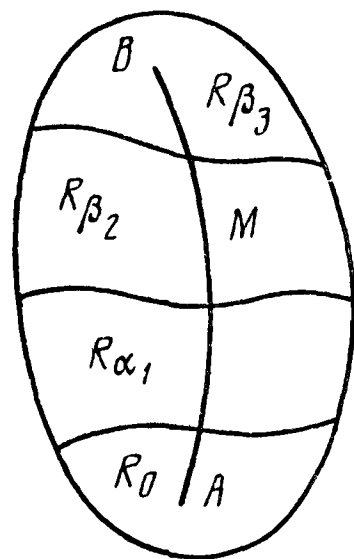


Рис. 1

которая лежит внутри R_0 . Если этот контур пересекает последовательно области $R_0, R_{\alpha_1}, R_{\alpha_2}, \dots, R_{\alpha_{n-1}}, R_{\alpha_n} = R_0$ и выходит из них через границы $\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \dots, \lambda_{\alpha_n}$, то подстановка, отвечающая R_0 , имеет вид

$$[z, f_{\alpha_1}(f_{\alpha_2}(\dots(f_{\alpha_n}(z))\dots))],$$

или, что то же,

$$z = f_{\alpha_1}(f_{\alpha_2}(\dots(f_{\alpha_n}(z))\dots)).$$

Не все из полученных таким образом соотношений (6) являются определяющими. Чтобы получить определяющие соотношения, достаточно описать бесконечно малые замкнутые контуры вокруг каждой из вершин R_0 .

Поскольку при этом мы находим все соотношения вида (6), подстановки (7) вообще независимы и, следовательно, являются системой образующих подстановок рассматриваемой группы.

Кроме того, нетрудно видеть, что показатель подстановки f_i равен наименьшему числу границ, которые необходимо пересечь для того, чтобы из R_0 перейти в область, отвечающую подстановке R_i .

Помимо фуксовых групп (дискретных групп, образованных вещественными подстановками) я рассмотрел также дискретные группы, образованные некоторыми линейными подстановками (эти группы я назвал *клеиновыми*). Я не буду останавливаться на них в этой работе, поскольку намерен изложить относящиеся к ним результаты в особом мемуаре.

IV. Производящие многоугольники

Области R_i определены условием, согласно которому каждая из них содержит *лишь одну точку*, соответствующую любой произвольно заданной точке z . Однако это условие недостаточно для того, чтобы R_i были определены полностью. Действительно, если имеется некоторая фуксова группа G , то существует бесконечно много разбиений плоскости, для которых каждая из областей содержит лишь одну точку, соответствующую заданному z .

Если же задано разбиение плоскости на бесконечное множество областей, удовлетворяющих тому же условию, что и R , то группа G вполне определена.

Зададим группу G и рассмотрим различные разбиения плоскости на области R_i , отвечающие этой группе. Число таких разбиений бесконечно. Каким образом, зная одно из них, можно получить все остальные разбиения? Пусть S_0 — некоторая часть области R_0 , S_i — соответствующая ей часть области R_i . Среди подстановок группы G выберем произвольную подстановку

$$(z, f_p(z)).$$

Пусть i_p — индекс подстановки

$$[z, f_p(f_{i_p}(z))],$$

так что

$$f_p[f_i(z)] = f_{i_p}(z).$$

От каждой из областей R_i отсечем ту ее часть, которая ранее была обозначена нами S_i , а к остатку присоединим S_{i_p} . При этом мы получим бесконечную последовательность областей

$$R'_i = R_i + S_{i_p} - S_i.$$

Эти области R'_i покрывают ту же часть плоскости, что и R_i , причем покрытие однократно. Каждая из областей R'_i содержит лишь одну точку, соответствующую произвольно заданной точке z . Таким образом, разбиение плоскости на области R'_i отвечает той же группе G , что и разбиение плоскости на области R_i . Если S_0 примыкает изнутри к одной из границ R_0 , а S_p примыкает извне к одной из границ $R_0 - S_0$, то R'_0 будет состоять из *одного куска плоскости без отверстий*. Для удобства мы в основном будем выбирать область R'_0 именно так, чтобы она состояла из одного куска плоскости и не имела отверстий, хотя это и не имеет особого значения.

Производя над R'_i те же операции, что и над R_i , мы получаем новое разбиение плоскости на области R'_i , которое также отвечает рассматриваемой группе G . Продолжая неограниченно этот процесс, мы всякий раз будем получать разбиение, отвечающее группе G .

Отсюда весьма естественно напрашивается следующее обобщение. До сих пор мы исходили из предположения о том, что область S_0 расположена целиком внутри R_0 и, следовательно, S_i лежит целиком внутри R_i . Без такого предположения было бы неясно, что следует понимать под областью

$$R'_i = R_i + S_{i_p} - S_i$$

или пришлось бы вводить специальное соглашение.

Итак, мы приходим к необходимости рассматривать области, разделенные на две части, одну из которых следует считать положительной, а другую — отрицательной.

Если S_i не является частью R_i , то область R'_i мы будем рассматривать, как состоящую из положительной части $R_i + S_{i_p}$ и отрицательной части S_i . Впрочем, эту точку зрения нельзя считать совершенно новой.

Действительно, рассмотрим четырехугольник $ABCD$, две противоположные стороны которого AB и CD пересекаются в точке M . Такой четырехугольник, образованный двумя треугольниками ADM и BCM , лежащими по разные стороны от общей вершины, мы назовем *вогнутым* четырехугольником.

Формулы, выражающие площадь выпуклого четырехугольника, применимы к такой фигуре лишь в том случае, если площадь вогнутого четырехугольника считать равной разности, а не сумме площадей треугольников ADM и BCM . Таким образом, в вогнутом четырехугольнике один из двух

треугольников необходимо рассматривать как положительный, а другой — как отрицательный. Нечто аналогичное происходит и в нашем случае. *Вогнутая* область R'_i состоит из положительной части $R_i + S_{ip}$ и отрицательной части S_i . Число точек, соответствующих одной и той же точке z , принадлежащих положительной части R'_i , всегда конечно и на единицу больше числа точек, соответствующих z и принадлежащих ее отрицательной части.

К разбиению плоскости на вогнутые области R'_i мы будем прибегать редко, поскольку разбиение на выпуклые области несравненно удобнее. Тем не менее, разбиение на вогнутые области будет играть роль промежуточного этапа при переходе от одного выпуклого разбиения к другому.

Разбить плоскость на выпуклые области R_i можно бесконечно многими способами. Мы должны выбрать среди них самый простой и удобный.

Для этого можно поступить следующим образом. Зададим некоторую область S_0 . Пусть S_p — та область, в которую S_0 переходит под действием подстановки $f_p(z)$. Присоединим к R_0 область S_p и отбросим S_0 . В результате мы получим новую область R'_0 , которая может служить основой нового разбиения плоскости на области R'_i , отвечающего группе G , ибо для того чтобы получить R'_i , достаточно выбросить из R_i область S_i — образ S_0 при подстановке $f_i(z)$ — и присоединить к S_i область S_{ip} , в которую S_p переходит под действием подстановки $f_i(z)$. Возникает вопрос, как следует выбирать S_0 и S_p ?

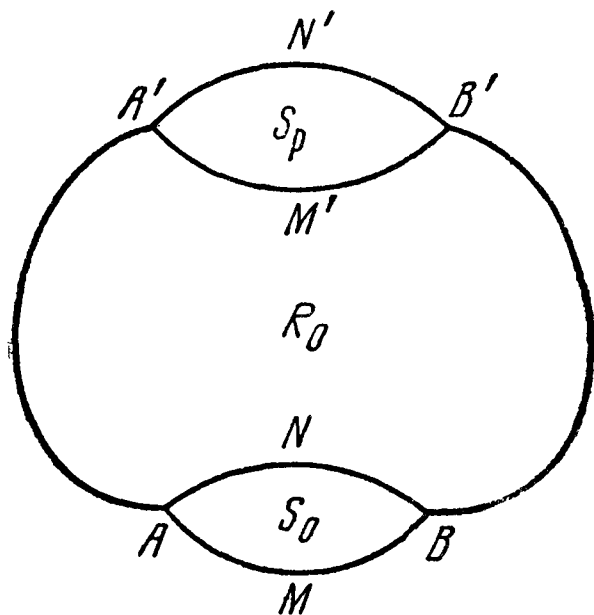


Рис. 2

Пусть AMB — граница области R_0 , $A'M'B'$ — сопряженная граница. Обе эти границы конгруэнтны, и вещественная подстановка, переводящая AMB в $A'M'B'$, есть некоторая подстановка $f_p(z)$ группы G . Соединим точки A и B дугой ANB окружности с центром на оси X . Областью S_0 будет область $AMBNA$, заключенная между дугой кривой AMB и дугой окружности ANB . Под действием $f_p(z)$ дуга ANB перейдет в некоторую дугу $A'N'B'$ окружности также с центром на оси X , а образом S_p области S_0 будет служить область $A'M'B'N'A'$. Присоединив S_p к R_0 и отбросив S_0 , мы получим область R'_0 , аналогичную R_0 , причем роль сопряженных границ AMB , $A'M'B'$ будут играть дуги окружностей ANB , $A'N'B'$, центры которых лежат на оси X .

Точно так же мы можем поступить с каждой парой сопряженных границ первого рода и перевести их в дуги окружностей с центром на оси X . Следовательно, не ограничивая общности, мы всегда можем представлять себе область R_0 в виде многоугольника с границами двух типов: одни из них образованы дугами окружностей с центром на оси X , другие — отрезками самой оси X . Такие многоугольники мы будем называть *нормальными* [6].

Иногда могут возникнуть трудности особого рода,

В самом деле, нам не известно заранее, будет ли область

$$S_0 = AMBNA$$

расположена целиком внутри R_0 . Следовательно, нормальный многоугольник, в который должна перейти R_0 , может иногда оказаться вогнутым.

В подобных случаях надлежит поступать следующим образом. Очевидно, что обе — положительная и отрицательная — части R_0 перейдут в нормальный многоугольник. Предположим для ясности, что положительная часть содержит не более двух точек, соответствующих некоторой заданной точке z . Среди точек R_0 имеются точки, принадлежащие положительной части, которым не соответствует ни одна точка ни в положительной, ни в отрицательной части. Они образуют некоторый нормальный многоугольник P .

Отрицательная часть также образует некоторый нормальный многоугольник P' . Каждой точке отрицательной части соответствуют две точки положительной части, множество которых образует два нормальных многоугольника P'' и P''' , конгруэнтных P' . Таким образом, положительная часть области R_0 состоит из трех многоугольников P , P'' и P''' . Установив это обстоятельство, вырежем из R_0 многоугольник P'' и присоединим к ней многоугольник, конгруэнтный P' . При этом мы получим некоторую новую область R'_0 , которая, как и R_0 , может порождать фуксову группу G . Новая область не имеет отрицательной части и образована двумя многоугольниками P и P''' .

Следовательно, она является нормальным выпуклым многоугольником [7].

Таким образом, мы всегда можем предполагать, что R_0 — нормальный выпуклый многоугольник.

Если нормальный многоугольник R_0 и разбиение его границ на сопряженные пары известны, то группа G полностью определена. В самом деле, обратимся к результатам предыдущего раздела.

Образующими группы G служат те подстановки, которые отвечают областям, пограничным с R_0 . Следовательно, их мы получим, рассматривая границы R_0 первого рода и разыскивая подстановки, которые переводят такие границы в сопряженные. Пусть AB и $A'B'$ — две сопряженные границы. Согласно разделу III, AB и $A'B'$ должны быть конгруэнтными, т. е.

$$(A, B) \equiv (A', B').$$

В силу же раздела I, в этом случае существует вещественная подстановка, которая переводит AB в $A'B'$, причем в общем случае такая подстановка вполне определена [8]. Тем самым вполне определены образующие подстановки группы G , а следовательно, и сама группа G .

Именно по этой причине мы будем называть R_0 *производящим (фундаментальным) многоугольником* группы G .

V. Классификация по семействам

Ранее мы видели, что две, три или большее число вершин многоугольника R_0 могут быть соответствующими точками, и называли *циклом* множество вершин этого многоугольника, соответствующих друг другу.

Вершины R_0 распадаются, следовательно, на некоторое число циклов. Посмотрим, каким образом, зная разбиение на пары границ первого рода, можно найти разбиение вершин на циклы. Для этого достаточно воспользоваться следующим правилом, которое доказывается без труда.

Предположим, что мы обходим в некотором направлении периметр многоугольника R_0 и проходим последовательно сначала одну сторону, затем вершину, следующую сторону, еще одну вершину и т. д. Задав ориентацию, выберем начало пути в одной из вершин. Рассмотрим выходящую из нее сторону. Если эта сторона первого рода, то далее рассмотрим сопряженную с ней сторону, затем — следующую за этой стороной вершину и сторону, выходящую из этой вершины. Если последняя сторона также первого рода, то далее мы рассмотрим сопряженную с ней и т. д. Так будем продолжать до тех пор, пока не вернемся в вершину, послужившую нам отправной точкой, или не встретим сторону второго рода.

В первом случае все встретившиеся нам вершины образуют один цикл. Во втором случае для того чтобы замкнуть цикл, необходимо вернуться в исходную вершину и последовательно рассмотреть входящую в нее сторону, затем сторону, сопряженную с первой, если та первого рода, затем вершину, из которой выходит сопряженная сторона, и сторону, входящую в нее, и т. д. Так следует продолжать до тех пор, пока мы не встретим сторону второго рода.

Нетрудно видеть, что существуют три разновидности циклов. Всякая точка, соответствующая точке z , расположенной в верхней полуплоскости относительно оси X , сама расположена в верхней полуплоскости; следовательно, всякая вершина, соответствующая вершине первой категории (раздел III), также принадлежит первой категории. Поэтому существуют циклы, образованные одними лишь вершинами первой категории. Их мы назовем *циклами первой категории*. Если исходная вершина относится к первой категории, а последующие стороны и вершины выбираются в соответствии с сформулированным выше правилом, мы всегда будем получать вершины лишь первой категории и, следовательно, стороны лишь первого рода. Процесс прекратится только тогда, когда мы возвратимся в исходную вершину. Иначе говоря, *цикл* в этом случае *будет замкнутым*.

Всякая вершина, соответствующая вершине второй или третьей категории, сама должна относиться к одной из этих двух категорий. К рассмотрению именно этих двух новых классов циклов мы сейчас и перейдем.

Циклы второй категории содержат лишь вершины, относящиеся ко второй категории. Применяя к таким вершинам наше правило, мы не получим границ второй категории, т. е. *циклы* и в этом случае *замкнуты*.

Циклы третьей категории содержат вершины третьей категории и могут содержать также вершины второй категории. Применяя к таким вершинам то же правило, что и раньше, мы получим стороны второго рода. Следовательно, цикл будет незамкнутым.

Зная это, мы можем классифицировать многоугольники R_0 , а следовательно, и группы G [9], разбивая их на несколько семейств.

Для многоугольников R_0 такими семействами будут:

- 1-е семейство, содержащее только циклы 1-й категории,
- 2-е семейство, содержащее только циклы 2-й категории,
- 3-е семейство, содержащее только циклы 3-й категории,
- 4-е семейство, содержащее только циклы 2-й и 3-й категорий,
- 5-е семейство, содержащее только циклы 1-й и 3-й категорий,
- 6-е семейство, содержащее только циклы 1-й и 2-й категорий,
- 7-е семейство, содержащее циклы всех трех категорий.

Несколько примеров позволят читателю лучше уяснить мою мысль.

Пример I. Многоугольник R_0 имеет вид шестиугольника $ABCDEF$, все его стороны — первого рода, стороны

AB и AF ,

BC и FE ,

CD и ED

попарно сопряжены.

Применяя правило, получаем соответственно:

1) начало в вершине A : вершину A , сторону AB , сторону AF и вершину A ;

2) начало в вершине B : вершину B , далее стороны BC , EF , вершину F , стороны EA , AB и вершину B ;

3) начало в вершине C : вершину C , стороны CD , ED , вершину E , стороны EF , BC и вершину C ;

4) начало в вершине D : вершину D , стороны DE , CD и снова вершину D .

Следовательно, в этом примере имеется четыре цикла, порожденных соответственно:

- 1) вершиной A ;
- 2) вершинами B и F ;
- 3) вершинами C и E ;
- 4) вершиной D .

Пример II. В качестве R_0 снова выбран шестиугольник $ABCDEF$, все стороны которого первого рода, однако на этот раз сопряжены противоположные стороны:

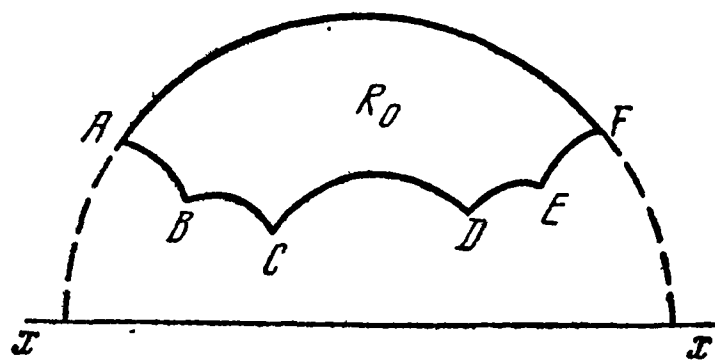


Рис. 3

$$AB \text{ и } ED,$$

$$BC \text{ и } FE,$$

$$CD \text{ и } AF.$$

Применяя правило, получаем последовательно:

1) начало в вершине A : вершину A , стороны AB , DE , вершину E , EF , BC , вершину C , CD , FA , вершину A ;

2) начало в вершине B : вершину B , стороны BC , EF , вершину F , FA , CD , вершину D , DE , AB , вершину B .

Следовательно, в этом примере два цикла образованы соответственно:

1) вершинами A , C и E ;

2) вершинами B , D и F .

Пример III. Многоугольник R_0 имеет вид восьмиугольника $ABCDEFGH$; все стороны первого рода; противоположные стороны

$$AB \text{ и } FE,$$

$$BC \text{ и } GF,$$

$$CD \text{ и } HG,$$

$$DE \text{ и } AH$$

сопряжены.

Выбрав начало в вершине A , получим: A , AB , EF , F , FG , BC , C , CD , GH , H , HA , DE , E , EF , AB , B , BC , FG , G , GH , CD , D , DE , HA , A .

Таким образом, в этом примере все вершины принадлежат одному циклу.

Пример IV. Предположим теперь, что сопряжены стороны

$$AB \text{ и } DC,$$

$$BC \text{ и } ED,$$

$$EF \text{ и } HG,$$

$$FG \text{ и } AH.$$

Поместив начало в вершине A , мы придем к следующему результату: A , AB , CD , D , DE , BC , C , CD , AB , B , BC , DE , E , EF , GH , H , HA , FG , G , GH , EF , F , FG , HA , A .

В этом примере все вершины также принадлежат одному циклу.

В четырех предыдущих примерах все стороны — первого рода, следовательно, все циклы — первой или второй категории.

Пример V. Многоугольник R_0 снова имеет вид восьмиугольника $ABCDEFGH$. Его стороны AB , CD , EF , GH — первого рода, стороны BC , DE , FG , HA — второго рода.

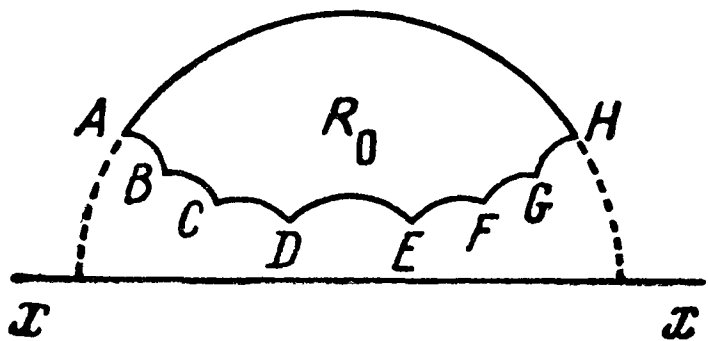


Рис. 4

Стороны

AB и DC ,

EF и HG

попарно сопряжены. В зависимости от выбора исходной вершины получим:

1) поместив начало в вершине A : AB , CD , D и DE — сторону второго рода;

2) поместив начало в вершине C : CD , AB , B и BC — сторону второго рода;

3) поместив начало в вершине E : EF , GH , H и HA — сторону второго рода;

4) поместив начало в вершине G : GH , EF , F и FG — сторону второго рода.

Таким образом, вершины разбиваются на четыре цикла, порожденных соответственно вершинами:

1) A и D ;

2) C и B ;

3) E и H ;

4) G и F .

Эти циклы незамкнуты, поскольку построение каждого из них обрывалось, как только мы встречали сторону второго рода. Поэтому все они относятся к третьей категории.

Классификацию многоугольников R_0 и групп G можно продолжить несколько дальше с помощью следующих соображений.

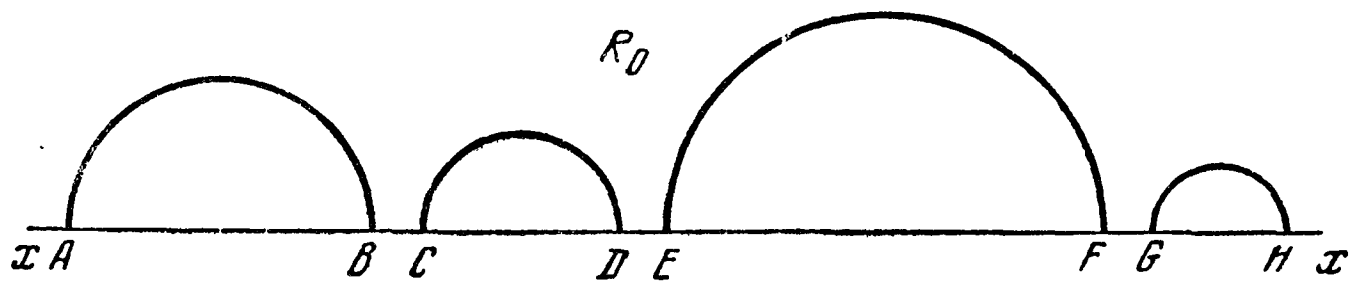


Рис. 5

Рассмотрим прежде всего цикл первой категории и вершину A_0 многоугольника R_0 , принадлежащую этому циклу. Пусть B_1 — сторона, следующая за A , C_1 — сторона, сопряженная с B_1 , A_2 — следующая за C_1 вершина и т. д., до тех пор, пока мы не придем к вершине A_n , совпадающей с A_0 .

Однако этот процесс может продолжаться и до бесконечности, нигде не обрываясь, поскольку мы можем не встретить сторону второго рода. Но вершина A_n не отличается от A_0 , вершина A_{n+1} — от A_1 и вообще A_h — от A_k , если

$$h \equiv k \pmod{n}.$$

В этом случае цикл будет состоять из n различных вершин, а именно: $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$.

Предположим теперь, что мы описали вокруг A_0 бесконечно малый замкнутый контур. При этом мы выйдем из R_0 через сторону B_1 и попадем в R_1 . Если считать B_1 относящейся к R_1 , то сторона B_1 будет гомологичной C_1 . Следовательно, точка A_0 будет гомологична A_1 , а сторона, следующая за ней — стороне B_2 . При пересечении этой стороны, гомологичной B_2 , бесконечно малый замкнутый контур выйдет из R_1 и попадет в некоторый многоугольник, который мы назовем R_2 . Сторона этого многоугольника, которая в R_1 была гомологична B_2 , будет гомологична C_2 , точка A_0 будет гомологична A_2 , а следующая за ней сторона — гомологична B_3 .

Закон получения дальнейших вершин и сторон ясен. Совершая обход контура, мы попадем в многоугольники $R_0, R_1, R_2, \dots, R_{q-1}$ и, наконец, в R_q , который должен совпадать с R_0 .

Переходя из многоугольника R_k в многоугольник R_{k+1} , мы пересекаем сторону, гомологичную B_{k+1} , если ее считать принадлежащей R_k , и C_{k+1} , если ее относить к R_{k+1} . Вершина A_0 , рассматриваемая как одна из вершин

R_k , гомологична A_k . Но многоугольник R_q должен совпадать с R_0 , следовательно, вершина A_q не должна отличаться от A_0 , откуда

$$q \equiv 0 \pmod{n},$$

или

$$q = pn.$$

Таким образом, число многоугольников, у которых одна из вершин расположена в точке A_0 , делится на n . Приводимый здесь рисунок поможет уяснить сказанное. Он отвечает случаю, когда

$$n = 3, \quad p = 2.$$

Изображены лишь те части многоугольников, которые принадлежат бесконечно малой окрестности A_0 , поэтому каждый из многоугольников представлен лишь одним своим углом. Около каждой вершины A (и каждой стороны B или C) стоит буква, указывающая, какой вершине (или стороне) R_0 гомологична эта вершина (или сторона), если ее считать принадлежащей R_i .

Итак, к каждой из точек A_0 примыкает pn углов, сумма которых должна быть равной 2π . Поскольку в двух конгруэнтных многоугольниках гомологичные углы равны, между углами A должно выполняться соотношение:

$$A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_{q-1} = 2\pi.$$

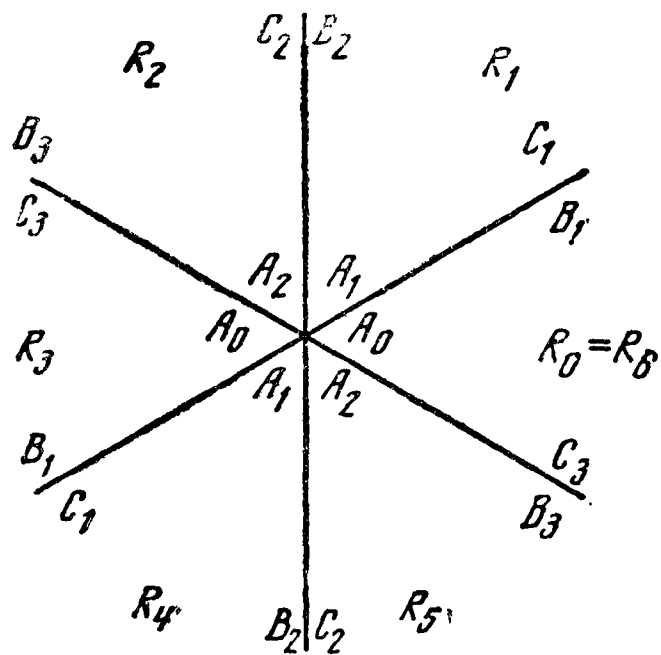


Рис. 6

Но

$$A_{kn} + A_{kn+1} + A_{kn+2} + \dots + A_{kn+n-1} = A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1},$$

следовательно,

$$A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1} = \frac{2\pi}{p}.$$

Этот результат позволяет сформулировать следующую теорему.

Сумма углов многоугольника R_0 , отвечающих вершинам одного и того же цикла первой категории, равна 2π , деленному на целое число.

Следует различать два случая: сумма углов может быть равна либо 2π , либо 2π , деленному на целое число, большее 1.

В первом случае будем говорить, что цикл относится к первому подвиду, во втором — ко второму.

Свойства циклов, принадлежащих к этим двум подвидам, неодинаковы, поэтому первое семейство многоугольников необходимо также разделить, различая в нем многоугольники R_0 , у которых все циклы относятся к первому подвиду (такие многоугольники мы будем называть многоугольниками первого типа), от многоугольников R_0 , обладающих циклами второго подвида (они образуют множество многоугольников второго типа).

Вернемся к многоугольникам $R_0, R_1, \dots, R_{q-1}$, имеющим общую вершину в A_0 .

Рассмотрим вещественную подстановку, переводящую R_0 в R_p и принадлежащую, очевидно, группе G . Эта подстановка оставляет неизменной точку A_0 . Следовательно, A_0 является ее неподвижной точкой, а сама подстановка — эллиптическая, и ее можно привести к виду (3), указанному в разделе I, причем

$$K = e^{\frac{2\pi i}{p}}$$

Предположим теперь, что точка A_0 вместо того, чтобы принадлежать к циклу первой категории, принадлежит к циклу второй категории. Все предыдущие рассуждения применимы и в этом случае, поскольку единственное предположение о том, что цикл замкнут, выполняется для циклов второй категории так же, как и для циклов первой категории, но q , а следовательно и p , обращается в бесконечность. Поэтому сумма углов, отвечающих различным вершинам цикла, равна нулю, что не трудно понять, поскольку любой угол нормального многоугольника, вершина которого принадлежит ко второй категории, очевидно, равен нулю. Вещественная подстановка, переводящая R_0 в R_p , оставляет неизменной точку A_0 . Следовательно, вершина A_0 есть неподвижная точка этой подстановки, а поскольку она лежит на оси X , то подстановка параболическая или гиперболическая.

Пусть S — такая подстановка; C_k — сторона, которую необходимо пересечь, чтобы перейти из R_k в R_{k+1} ; C_{k+1} — образ C_k при подстановке S .

Тогда различные C_k служат образами сторон $C_0, C_1, \dots, C_n$ при подстановке S или ей обратной.

Предположим сначала, что подстановка S параболическая. Мы уже видели (раздел I), что дуга конечной длины какой-либо кривой, не пересекающейся с осью X , может проходить лишь через конечное число образов такой окружности, как C_0 , при подстановке S или ей обратной. Следовательно, эта дуга пересекает лишь конечное число многоугольников $R_0, R_1, \dots, R_q, \dots$, имеющих в A_0 общую вершину.

Предположим теперь, что подстановка S гиперболическая. Пусть A_0 и A'_0 — две неподвижные точки этой подстановки, C — окружность, описанная на $A_0A'_0$ как на диаметре. Известно (раздел I), что дуга конечной длины любой кривой, не пересекающей оси X , зацепляет либо бесконечно много образов такой окружности, как C_0 , либо только конечное их число в зависимости от того, пересекается она с окружностью C или нет. Следовательно, такая дуга пересекает бесконечно много многоугольников $R_0, R_1, \dots, R_q, \dots$, если она пересекается с C , и пересекает только конечное их число, если проходит вне окружности C . Если подстановка S параболическая, мы говорим, что цикл, к которому принадлежит вершина A_0 , относится к третьему подвиду. Если же подстановка S гиперболическая, то мы скажем, что содержащий A_0 цикл относится к четвертому подвиду.

Это позволяет нам подразделить второе, четвертое, шестое и седьмое семейства.

Группа одного из этих семейств принадлежит к первому типу этого семейства, если она не содержит циклов четвертого подвида, и ко второму типу, если содержит циклы четвертого подвида [¹⁰].

VI. Существование фуксовых групп

До сих пор мы занимались изучением фуксовых групп в предположении, что такие группы существуют, не давая прямого доказательства их существования. Мы видели, что всякую фуксову группу G можно считать порожденной некоторым нормальным многоугольником R_0 , стороны которого делятся на два рода: сторонами первого рода являются дуги окружностей с центром на оси X , сторонами второго — отрезки самой оси X . Число сторон первого рода равно $2n$, и они попарно сопряжены. Если многоугольник R_0 и разбиение его сторон на сопряженные пары известны, то соответствующая группа G , вообще говоря, полностью определена. Вершины многоугольника разбиваются на некоторое число циклов.

Для того чтобы многоугольник R_0 мог порождать фуксову группу G , он должен удовлетворять двум условиям:

- 1) две сопряженные его стороны должны быть конгруэнтными;
- 2) сумма углов одного и того же цикла первой категории должна быть равной 2π , деленному на целое число.

Эти условия необходимы. Достаточны ли они? Докажем, что дело обстоит именно так.

Пусть задан многоугольник R_0 , и известно разбиение его сторон на сопряженные пары. Следовательно, нам известны образующие подстановки соответствующей группы, и мы можем построить многоугольники R , пограничные с R_0 [11]. Производя над R те же операции, что и над R_0 , построим многоугольники, пограничные с уже имеющимися. Продолжая этот процесс до бесконечности, построим бесконечно много многоугольников, конгруэнтных R_0 .

Могут представиться следующие возможности:

1. Построенные таким образом многоугольники покрывают часть плоскости, причем покрывают лишь один раз, не охватывая друг друга и не перекрываясь. В этом случае они образуют своего рода шахматное разбиение: рассматриваемая часть плоскости разделена на некоторое число конгруэнтных между собой областей, и *существование фуксовой группы, отвечающей R_0 , тем самым доказано.*

2. Построенные многоугольники, охватывая друг друга покрывают рассматриваемую часть плоскости много или даже бесконечно много раз. В этом случае группа, отвечающая R_0 (т. е. группа, образующие подстановки которой переводят любую сторону R_0 первого рода в сопряженную с ней), непрерывна и не является фуксовой группой.

Как узнать, с каким из этих двух случаев приходится иметь дело? Пусть A — некоторая точка внутри R_0 , B — какая-нибудь другая точка. Соединим A и B дугой AMB . Эта дуга выходит из R_0 , пересекая сторону C_0 . Построим многоугольник R_1 , пограничный с R_0 вдоль C_0 . Если дуга AMB выходит из R_1 через сторону C_1 , построим многоугольник R_2 , пограничный с R_1 вдоль C_1 , и т. д.

Дуги AMB бывают двух типов.

1. После конечного числа только что описанных операций мы можем получить многоугольник R_n , из которого дуга AMB выходить дальше не будет, т. е. точка B должна будет лежать внутри R_n . Отсюда следует, что точка B принадлежит части плоскости, покрытой многоугольниками R , и дуга AMB расположена целиком в этой же части плоскости. Такую дугу AMB мы будем называть *дугой первого рода.*

2. Сколь велико бы ни было число сделанных операций, мы никогда не получим многоугольник R_n , из которого бы дуга AMB не выходила дальше. В этом случае мы будем называть AMB *дугой второго рода.*

Относительно точки B можно сделать три предположения.

1. Всякая дуга, которую можно провести между A и B , второго рода. В этом случае точка B лежит вне той части плоскости, которая покрыта многоугольниками R .

2. Среди дуг, проведенных между A и B , имеются дуги первого рода. Согласно сказанному ранее, каждая такая дуга приводит к некоторому многоугольнику R_n , внутри которого находится точка B . Этот многоугольник R_n оказывается *одним и тем же*, какова бы ни была дуга первого рода

AMB , соединяющая точки A и B . В этом случае точка B принадлежит части плоскости, покрытой многоугольниками R . Кроме того, эти многоугольники образуют однократное покрытие рассматриваемой части плоскости. Тем самым существование фуксовой группы, отвечающей многоугольнику R_0 , доказано.

3. Среди дуг AMB , проведенных между A и B , имеются дуги первого рода. Каждая из них приводит к некоторому многоугольнику R_n , внутри которого находится точка B , однако различным дугам AMB отвечают различные многоугольники R_n . В этом случае точка B принадлежит части плоскости, покрытой многоугольниками R , но эти многоугольники покрывают рассматриваемую часть плоскости более одного раза, так что никакой фуксовой группы, которая бы отвечала R_0 , не существует.

Итак, мы приходим к следующему правилу: точки A и B необходимо соединить двумя дугами первого рода и затем исследовать, приводят ли обе эти дуги к одному и тому же многоугольнику R_n .

Это правило можно изменить следующим образом. Проведем замкнутый контур $АМА$, начальная и конечная точка которого A находится внутри R_0 . Если дуга $АМА$ выходит из R_0 через сторону C_0 , построим многоугольник R_1 , пограничный с R_0 вдоль C_0 . Далее, если эта дуга выходит из R_1 через сторону C_1 , построим многоугольник R_2 , пограничный с R_1 вдоль C_1 , и т. д. Предположим еще, что дуга $АМА$ первого рода, т. е. устроена так, что после выполнения конечного числа указанных операций мы придем к некоторому многоугольнику R_n , из которого дуга $АМА$ дальше не выйдет. Для существования фуксовой группы необходимо и достаточно, чтобы для любого контура первого рода $АМА$ многоугольник R_n в точности совпадал с R_0 .

Предположим сначала, что рассматриваемый многоугольник R_0 не содержит циклов четвертого подвида.

Для этого случая сформулируем следующие теоремы.

I. *Всякая дуга AMB , пересекающая ось X , — второго рода.*

Действительно, многоугольник R_0 расположен целиком над осью X , следовательно, все конгруэнтные с ним многоугольники R также расположены в верхней полуплоскости. Предположим, что, следуя изложенным выше правилам, мы построили многоугольники $R_1, R_2, \dots, R_n$. Все они принадлежат верхней полуплоскости, а поскольку дуга AMB должна покинуть эту часть плоскости, она должна выйти и из многоугольника R_n , сколь бы велико ни было n , что и требовалось доказать.

II. *Всякая дуга AMB , не пересекающая ось X , — первого рода.*

Действительно, построим так же, как это делалось выше, многоугольники

$$R_1, R_2, \dots, R_p, \dots$$

и обозначим через λ_p часть дуги AMB , заключенную внутри R_p . Вся дуга AMB распадается на последовательность дуг $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \dots$, соответствующую последовательности многоугольников $R_1, R_2, \dots, R_p, \dots$.

Число таких дуг (равное числу соответствующих им многоугольников) конечно, если AMB — дуга первого рода (именно это и требуется доказать) и бесконечно — в противном случае.

Дуга λ_p , очевидно, соединяет две стороны первого рода многоугольника R_p , ибо она не может пересекать X , и, следовательно, не может заканчиваться на стороне второго рода, поскольку сторонами второго рода служат отрезки оси X . Далее можно сделать два предположения.

1. Можно предположить, что концы λ_p лежат на двух смежных сторонах многоугольника R_0 , разделенных лишь вершиной A_p . В этом случае мы будем говорить, что λ_p — дуга первого типа и что она охватывает вершину A_p . Примеры: дуги CD и FG на рис. 7.

2. Можно предположить, что концы λ_p лежат на двух несмежных сторонах. В этом случае будем говорить, что λ_p — дуга второго типа. Пример: дуга AB на рис. 7. Если многоугольник R_p конгруэнтен многоугольнику R_0 , то дуга λ_p конгруэнтна некоторой дуге λ , соединяющей две точки, лежащие на несмежных сторонах периметра R_0 . Ясно, что расстояние между этими двумя точками не может быть бесконечно малым и, следовательно, неевклидова длина L (см. раздел II) дуги λ также не может быть бесконечно малой и превосходит некоторую данную величину K . Неевклидова длина дуги λ_p будет такой же, как неевклидова длина конгруэнтной дуги λ . Следовательно, она также превосходит K .

Пусть L_0 — неевклидова длина L дуги AMB ; она конечна, поскольку дуга AMB не пересекает ось X . Поэтому число дуг λ_p второго типа меньше L_0/K и, следовательно, ограничено.

Таким образом, выбрав q достаточно большим, мы получим дуги $\lambda_{q+1}, \lambda_{q+2}, \dots$ и, вообще, λ_p при $p > q$ первого типа. Остается доказать, что число дуг λ_p ($p > q$) конечно.

Рассмотрим две смежные дуги λ_p, λ_{p+1} и дугу $\mu_p = \lambda_p + \lambda_{p+1}$, получающуюся при их объединении. Будем говорить, что дуга μ_p первого типа, если дуги λ_p и λ_{p+1} охватывают одну и ту же вершину, в противном случае будем называть ее дугой второго типа. Например, дуга CE на рис. 7 относится ко второму типу, а дуга FH — к первому, поскольку дуга CD охватывает вершину A_p , а дуги FG, GH и DE — вершину A'_p .

Рассмотрим дугу μ_p второго типа. Концы ее принадлежат двум сторонам первого рода, одна из которых заключена в R_p , а другая — в R_{p+1} . Она пересекает сторону C_p , служащую общей границей многоугольников

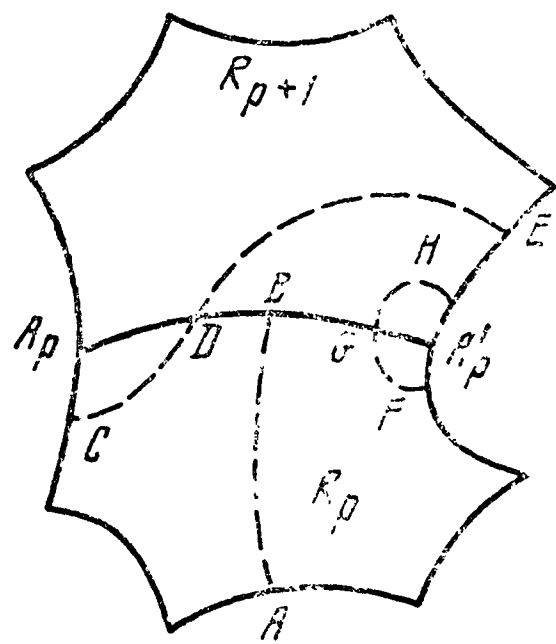


Рис. 7

R_p и R_{p+1} . При этом указанные три стороны не имеют ни одной общей точки.

Ясно, что при этих условиях неевклидова длина L дуги μ и, следовательно, неевклидова длина L дуги μ_p , не может быть бесконечно малой и превосходит некоторую фиксированную величину K . Отсюда, как и ранее, следует, что число дуг μ_p второго типа *ограничено*, и, выбрав q достаточно большим, можно добиться, чтобы все дуги $\mu_{q+1}, \mu_{q+2}, \dots$, и, вообще, μ_p ($p > q$) были дугами первого типа. Иначе говоря, все дуги $\lambda_{q+1}, \lambda_{q+2}, \dots$ и, вообще, все дуги λ_p ($p > q$) охватывают одну и ту же вершину D .

Осталось еще показать, что число дуг λ_p , охватывающих вершину D , конечно. Можно сделать два предположения.

1. Вершина D относится к циклу первой или третьей категории и, следовательно, принадлежит лишь конечному числу многоугольников R , в силу чего число дуг λ_p также должно быть конечным.

2. Вершина D относится к циклу второй категории, т. е. к третьему подвиду, поскольку мы предположили, что многоугольник R_0 не имеет циклов четвертого подвида. Известно (раздел V), что дуга кривой, не пересекающей оси X , может проходить лишь по конечному числу многоугольников с общей вершиной в точке D . Отсюда следует, что число дуг λ_p конечно.

Таким образом, число дуг λ_p конечно во всех случаях, и AMB — дуга первого рода, что и требовалось доказать.

Следовательно, часть плоскости, покрытая многоугольниками R , расположена над осью X .

Рассмотрим теперь замкнутый контур $АМА$ первого рода, т. е. не пересекающий оси X . Применим к нему изложенное выше правило. Предположим, что, описывая его, мы проходим последовательно многоугольники $R_0, R_1, \dots$ и, описав полный круг вокруг точки A , достигаем, наконец, многоугольника R_n . Если многоугольник R_n в точности совпадает с R_0 , мы скажем, что $АМА$ есть контур первого типа, в противном случае назовем $АМА$ контуром второго типа. Для существования фуксовой группы необходимо и достаточно, чтобы все контуры $АМА$ первого рода были контурами первого типа. В связи с этим я доказываю следующие теоремы.

III. *Если контур $АМА$ состоит из: 1) дуги кривой AMB , 2) бесконечно малого замкнутого контура $ВNB$; 3) дуги AMB , проходимой в обратном направлении, то $АМА$ — контур первого типа.*

Действительно, согласно изложенному выше правилу, построим последовательно многоугольники $R_0, R_1, R_2, \dots, R_m$, через которые мы проходим, описывая дугу AMB , после чего опишем бесконечно малый контур $ВNB$. Относительно него можно высказать три предположения.

1. Контур $ВNB$ расположен целиком внутри многоугольника R_0 . Описывая этот контур, мы не выходим за пределы этого многоугольника.

2. Контур BNB пересекает границу C_m некоторого многоугольника R_m , но не содержит внутри себя ни одной из вершин R_m . В этом случае, описывая этот контур, мы сначала выходим из R_m , пересекая при этом C_m , и попадаем в некий новый многоугольник R_{m+1} , а затем, пересекая C_m в противоположном направлении, выходим из R_{m+1} и оказываемся снова в R_m .

3. Контур BNB заключает внутри себя одну из вершин многоугольника R_m . Эта вершина с необходимостью принадлежит к числу вершин первой категории, поскольку не может лежать на оси X . Если цикл, включающий в себя эту вершину, состоит, например, из n вершин, и сумма соответствующих углов равна $2\pi/p$, то, описывая BNB , мы последовательно окажемся в pn многоугольниках $R_{m+1}, R_{m+2}, \dots, R_{m+pn}$. Сумма углов при вершине D всех этих многоугольников равна 2π , многоугольник R_{m+pn} совпадает с R_m .

Итак, во всех возможных случаях, описав контур BNB , мы снова попадаем в многоугольник R_m . Опишем теперь дугу AMB в противоположном направлении. При этом нам встретятся многоугольники $R_m, R_{m-1}, \dots, R_1, R_0$, их порядок обратен тому, в котором мы встречали их при первом обходе дуги AMB . Вернувшись в точку A , мы тем самым вернемся в многоугольник R_0 . Следовательно, $АМА$ — контур первого типа, что и требовалось доказать.

IV. Если $АМВРА$, $АРВНА$ — два контура первого рода и первого типа, то таким же будет и контур $АМВНА$, возникающий при их объединении.

Действительно, если $АМВРА$ и $АРВНА$ — контуры первого рода, то ни дуга $АМВ$, ни дуга $АНВ$ не выходят за пределы области, покрытой многоугольниками R , и, следовательно, контур $АМВНА$ — также первого рода.

Если контур $АМВРА$ — первого рода, то, следуя по дуге $АМВ$ или по дуге $АРВ$, мы придем к одному и тому же многоугольнику R_n ; если к контурам первого рода относится $АРВНА$, то, следуя по дугам $АРВ$ и $АНВ$, мы получим один и тот же многоугольник R_n . Следовательно, дуги $АМВ$ и $АНВ$ приводят к одному и тому же многоугольнику R_n , и $АМВНА$ — контур первого рода, что и требовалось доказать.

V. Если $АМА$ — контур первого рода, то всякий контур $АНА$, заключенный внутри него, также первого рода.

Действительно, если $АМА$ не пересекает ось X , то заключенный внутри $АМА$ контур $АНА$ также не пересекает ось X , что и требовалось доказать.

VI. Всякий контур $АМА$ первого рода является контуром первого типа.

Действительно, контур первого рода можно разложить на бесконечно большое число контуров, о которых говорится в теореме III. По теореме V,

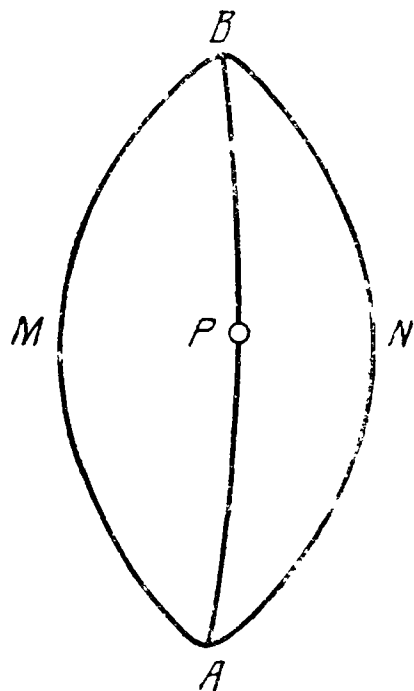


Рис. 8

все эти контуры принадлежат к первому роду; следовательно, по теореме III, каждый из них относится к первому типу. Из теоремы IV следует, что и вся их сумма — контур $АМА$ — также принадлежит к первому типу, что и требовалось доказать.

Итак, существование фуксовой группы, отвечающей многоугольнику R_0 , доказано.

Многоугольники R , в которые R_0 переходит под действием различных подстановок этой группы, покрывают, причем лишь один раз, всю часть плоскости, расположенную над осью X .

Предположим теперь, что R_0 допускает циклы четвертого подвида.

Теоремы I, III и IV будут, очевидно, выполняться по-прежнему, но теорема II перестанет быть справедливой. Посмотрим, как следует ее видоизменить в рассматриваемом случае.

Воспользуемся еще раз обозначениями, принятыми при доказательстве этой теоремы. Докажем, как и прежде, что, выбрав число q достаточно большим, мы получим дуги λ_p ($p > q$) только первого рода, охватывающие одну и ту же вершину D . Если D — вершина первой или третьей категории или относится к третьему подвиду, то ничего нового мы не получим. Предположим, что D принадлежит к четвертому подвиду. Будет ли число дуг λ_p ($p > q$) конечным и в этом случае? Известно (раздел V), что дуга кривой, не пересекающей оси X , проходит по бесконечно многим многоугольникам R с общей вершиной в точке D или только по конечному числу таких многоугольников в зависимости от того, пересекает ли эта дуга определенную окружность C с центром на оси X , проходящую через точку D , или нет.

Отсюда следует, что дуга $АМВ$, не пересекающаяся с осью X , тем не менее может быть дугой второго рода.

Рассмотрим дугу $АМВ$ второго рода, которая примыкает к окружности C . Предположим, что мы непрерывно деформируем дугу $АМВ$. Нетрудно видеть, что она перестанет быть дугой второго рода лишь в том случае, если не будет пересекаться с окружностью C .

Таким образом, теорема V остается верной и в рассматриваемом случае, но требует особого доказательства. Рассмотрим замкнутый контур $АМА$ первого рода и второй контур $АНА$, расположенный внутри первого. Я утверждаю, что $АНА$ не может быть контуром второго рода. Действительно, если бы это было так, то $АНА$ должен был бы пересекаться с некоторой окружностью C . Контур $АНА$ непрерывной деформацией можно было бы перевести в $АМА$, причем во время деформации $АНА$ по-прежнему пересекал бы окружность C и, следовательно, был бы контуром второго рода. Но тогда и $АМА$, вопреки предположению, должен был бы быть контуром второго рода.

Коль скоро теорема V доказана, теорема VI также должна выполняться и, следовательно, *существование отвечающей многоугольнику R_0 фуксовой группы доказано.* Образы R многоугольника R_0 при подстанов-

ках этой группы покрывают (причем только один раз) некоторую часть плоскости S . Область S расположена целиком над осью X и ограничена отрезками этой оси и бесконечно многими окружностями, аналогичными C , центры которых лежат на оси X .

Итак, существование фуксовой группы, отвечающей многоугольнику R_0 , доказано для всех возможных случаев. В некоторых частных случаях, например когда нет вершин первой категории, доказательство можно существенно упростить. Действительно, в этом случае многоугольник R_0 имеет $2n$ сторон первого рода, разбивающих верхнюю (относительно оси X) полуплоскость на $2n + 1$ областей, а именно, сам многоугольник R_0 и области, заключенные между осью X и каждой из сторон первого рода. Рассмотрим сторону C_1 , область S_1 , заключенную между C_1 и осью X , и многоугольник R_1 , пограничный с R_0 вдоль C_1 . Многоугольник R_1 разбивает область S_1 на $2n$ меньших областей, а именно, сам многоугольник R_1 и области, заключенные между осью X и каждой из сторон первого рода, оставшейся свободной. После того как мы построим многоугольники $R_0, R_1, \dots, R_p$, та часть, которая расположена над осью X , окажется разделенной на некоторое число областей: на многоугольники $R_0, R_1, \dots, R_p$ и области $S_1, S_2, \dots, S_q$, заключенные между осью и каждой из оставшихся свободными сторон первого рода. Пытаясь построить новый многоугольник, пограничный с $R_0, R_1, \dots, R_p$, мы обнаружим, что он целиком попадет внутрь одной из областей $S_1, S_2, \dots, S_q$. Следовательно, построенные нами многоугольники не могут перекрываться. Существование отвечающей R_0 фуксовой группы, таким образом, доказано.

VII. Важные примеры

Прежде чем приводить примеры фуксовых групп, существование которых было только что доказано в общем виде, я хочу ввести некоторые обозначения, которые понадобятся нам в дальнейшем при изучении свойств многоугольника R_0 . Начнем с того, что обозначим каждую из сторон многоугольника R_0 тем порядковым номером, который она получает при обходе периметра в выбранном направлении: следуя по периметру, мы встречаем сначала сторону 1, затем сторону 2 и т. д. Условившись о нумерации, запишем номер какой-нибудь стороны первого рода, затем номер стороны, сопряженной с ней, после чего поставим запятую. После запятой запишем номер какой-нибудь другой стороны первого рода, вслед за ним — номер сопряженной с ней стороны, снова поставим запятую и т. д. Наконец, исчерпав все стороны первого рода, перечислим номера сторон второго рода. Например, если R_0 — восьмиугольник, стороны которого с нечетными номерами относятся к первому роду, а с четными — ко второму, причем стороны, противолежащие сторонам первого рода, сопряжены с последними, то мы скажем, что многоугольник R_0 имеет структуру

(15, 37; 2468).

Установив структуру многоугольника, мы узнаем число его сторон каждого рода и их разбиение на сопряженные пары, что позволяет получить разбиение его вершин на циклы.

Пользуясь введенными обозначениями, рассмотрим несколько примеров.

Пример I (14, 23).

Выберем в качестве многоугольника R_0 четырехугольник и обозначим его вершины через A, B, C и D . Стороной 1 будет сторона AB , стороной 2 — сторона BC , стороной 3 — CD и стороной 4 — DA . Все стороны — первого рода и, следовательно, являются дугами окружностей с центрами на оси X . Стороны AB и AD , CB и CD попарно сопряжены и конгруэнтны. Наконец, угол A равен $2\pi/\alpha$, угол $B+D$ равен $2\pi/\beta$, угол C равен $2\pi/\gamma$, где α, β , и γ — целые числа.

Противоположные величины A и C можно соединить дугой окружности с центром на оси X , при этом четырехугольник R_0 разделится на два криволинейных треугольника ACD и ABC .

Определим теперь одно понятие, которое понадобится нам в дальнейшем. Рассмотрим на плоскости преобразование обратными радиусами. Пусть O — центр преобразования, K^2 — его параметр. Окружность C с центром в точке O и радиусом K при таком преобразовании остается неизменной. Это преобразование назовем *отражением относительно окружности C* , а две фигуры, переходящие друг в друга при преобразовании обратными радиусами, — *симметричными относительно окружности C* .

Очевидно, что треугольники ACD и ABC симметричны относительно окружности AC . Отсюда следует, что углы CAD и CAB , ACD и ACB , ABC и ADC попарно равны. Таким образом, углы в треугольнике ABC равны соответственно $2\pi/\alpha$, $2\pi/\beta$, $2\pi/\gamma$.

Пусть R_1 — четырехугольник, пограничный с R_0 вдоль одной из сторон последнего, например вдоль AB . Тогда оба многоугольника будут симметричными относительно окружности AB .

В рассматриваемом нами частном случае это обстоятельство позволяет весьма просто установить структуру многоугольников R .

Прежде всего построим треугольник ABC , углы которого соответственно равны $2\pi/\alpha$, $2\pi/\beta$, $2\pi/\gamma$. Таких треугольников можно построить бесконечно много, однако все они будут конгруэнтными. Затем построим треугольники, симметричные треугольнику ABC относительно тех его сторон, которые остались свободными, и т. д. В результате мы разобьем плоскость на бесконечное множество треугольников, конгруэнтных треугольникам ABC или ACD , а объединяя их попарно, получим разбиение плоскости на бесконечное множество четырехугольников, конгруэнтных $R_0 = ABCD$.

Что произойдет, если одна из величин α, β, γ обратится в бесконечность? Пусть, например, в бесконечность обращается γ . Тогда угол C , равный $2\pi/\gamma$, становится равным нулю; цикл, образованный вершиной C , перестает быть циклом первой категории и становится циклом третьего подвида.

Четырехугольник R_0 будет по-прежнему состоять из двух треугольников ABC и ADC , симметричных относительно окружности AC . Сторонами AC и BC будут дуги окружностей, касательные к которым в точке C направлены по оси X ; стороной AB — дуга окружности, пересекающей AC и BC под углами π/α и π/β .

Пусть, например,

$$\alpha = 3, \quad \beta = 2.$$

Кроме того, для полной определенности предположим, что стороны AC и BC треугольника ABC вырождаются в две прямые, перпендикулярные оси X (вершина C удаляется в бесконечность), продолжение стороны BC проходит через начало O , а расстояние между параллельными прямыми AC и BC равно $1/2$. Тогда окружность AB будет иметь радиус, равный 1, и центр в точке O .

Итак, мы получили *фундаментальный треугольник Клейна* (Mathematische Annalen, Bd. XIV). Соответствующая фуксова группа весьма примечательна: она состоит из всех подстановок $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$, таких, что a, b, c и d — целые числа, причем $ad - bc = 1$. Изучение этой группы и ее подгрупп и составляет основу исследований Клейна по теории модулярных функций.

Пример II (16, 25, 34).

Этот пример уже был рассмотрен в разделе V. Многоугольник R_0 имеет вид шестиугольника $ABCDEF$. Его вершины образуют четыре различных цикла, в которые входят соответственно вершины A ; B и F ; C и E ; D . Криволинейные углы A , $B + F$, $C + E$ и D равны $2\pi/\alpha$, $2\pi/\beta$, $2\pi/\gamma$ и $2\pi/\delta$, где α, β, γ и δ — целые положительные числа или бесконечность.

Особенно интересен случай, когда шестиугольник $ABCDEF$ распадается на два четырехугольника $ABCD$ и $ADEF$, симметричных относительно окружности AD . Криволинейные углы этих четырехугольников имеют следующие значения:

$$BAD = DAF = \frac{\pi}{\alpha}; \quad CDA = EDA = \frac{\pi}{\delta};$$

$$B = F = \frac{\pi}{\beta}; \quad C = E = \frac{\pi}{\gamma}.$$

Следовательно, для того чтобы построить все шестиугольники R , можно поступать так же, как в предыдущем примере: построить четырехугольник $ABCD$, затем четырехугольники, симметричные ему относительно каждой из его сторон, затем — четырехугольники, симметричные каждому из вновь построенных четырехугольников относительно сторон последнего, и т. д.

Рассмотрим теперь более общий пример. Пусть R_0 — многоугольник с $2n$ сторонами первого рода и вершинами $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, B_n, B_{n-1}, \dots, B_2$. Предположим, что стороны A_1A_2 и A_1B_2 , A_2A_3 и $B_2B_3, \dots$

$\dots, A_{n-1}A_n$ и $B_{n-1}B_n$, A_nA_{n+1} и B_nA_{n+1} попарно сопряжены. Тогда вершины R_0 распределяются между $n + 1$ циклами:

$$A_1; \quad A_2, B_2; \quad A_3, B_3; \quad \dots; \quad A_{n-1}, B_{n-1}; \quad A_n, B_n; \quad A_{n+1}.$$

Многоугольник R_0 в принятых обозначениях можно записать в виде $(1, 2n, 2, 2n - 1, 3, 2n - 2, \dots, n - 1, n + 2, n, n + 1)$.

В частном случае многоугольник R_0 можно разбить на две половины $A_1A_2A_3 \dots A_{n+1}$ и $A_1B_2B_3 \dots B_nA_{n+1}$, симметричные относительно окружности A_1A_{n+1} . Каждая из половин представляет собой криволинейный многоугольник, сторонами которого служат дуги окружностей с центрами на оси X , а углы равны π , деленному на некоторое целое число. Чтобы построить все многоугольники R , достаточно, отправляясь от многоугольника $A_1A_2A_3 \dots A_{n+1}$, построить сначала многоугольники, симметричные с ним относительно каждой из его сторон, затем многоугольники, симметричные только что построенным относительно каждой из их сторон, и т. д.

Можно было бы привести много других примеров многоугольников, порождающих фуксовы группы, однако мы остановимся лишь на тех примерах, которые уже обсуждались в разделе V. В соответствии с принятыми обозначениями многоугольники из примеров II, III, IV и V можно записать в виде

$$\begin{aligned} (14, \quad 25, \quad 36), \\ (15, \quad 26, \quad 37, 48), \\ (13, \quad 24, \quad 57, 68), \\ (13, \quad 57; \quad 2468). \end{aligned}$$

Каким условиям должны удовлетворять многоугольники R_0 из этих четырех примеров для того, чтобы они могли порождать фуксовы группы?

В первых трех примерах сопряженные стороны должны быть конгруэнтными. Кроме того, во втором примере сумма углов с четными номерами, так же, как и сумма углов с нечетными номерами, должна быть равной 2π , деленному на целое число. В примерах III и IV этому же условию должна удовлетворять сумма всех углов.

В примере V на многоугольник R_0 не требуется налагать *никаких* условий.

VIII. Классификация по роду

Ранее мы уже видели, каким образом часть плоскости, расположенную над осью X , можно разбить на бесконечно много конгруэнтных криволинейных многоугольников R . Рассмотрим теперь часть плоскости, лежащую под осью X , и в ней — многоугольники $R'_0, R'_1, \dots$, симметричные многоугольникам $R_0, R_1, \dots$ относительно оси X . Ясно, что если некоторая подстановка $f_i(z)$ группы G переводит R_0 в R_i , то та же самая подстановка переводит R'_0 в R'_i . Следовательно, подстановки группы G , переводящие R_0 в $R_1, R_2, \dots$, одновременно осуществляют отображение R'_0 в $R'_1, R'_2, \dots$. Необходимо различать несколько случаев. Если R_0 не имеет вер-

шин четвертого подвида, то множество многоугольников R и R' покрывает всю плоскость. Если же R_0 имеет вершины этого подвида, то многоугольники R и R' оставляют непокрытыми области, расположенные внутри бесконечно многих окружностей с центрами на оси X [12].

Вот другое, более существенное для дальнейшего различие. Пусть группа G принадлежит к первому, второму или шестому семейству, в силу чего порождающий ее многоугольник не имеет ни вершин третьей категории, ни сторон второго рода. Многоугольник R_0 , стороной которого не может быть отрезок оси X , либо вообще не пересекается с симметричным ему многоугольником R'_0 , либо имеет с последним одну общую вершину (если он имеет вершины второй категории), но отнюдь не общую сторону. Наоборот, если предположить, что группа G принадлежит к третьему, четвертому, пятому или седьмому семейству, то многоугольник R_0 будет иметь несколько сторон второго рода, общих с симметричными ему R'_0 . Предположим, что мы стерли стороны второго рода, служащие для R_0 и R'_0 общей границей. Тогда объединение двух фигур R_0 и R'_0 можно рассматривать как одну фигуру, ограниченную дугами окружностей с центрами на оси X , т. е. сторонами первого рода многоугольников R_0 и R'_0 . Совокупность всех этих дуг окружностей распадается, вообще говоря, на несколько замкнутых кривых.

Теперь мы сможем произвести новую классификацию фуксовых групп. Рассмотрим прежде всего группу, принадлежащую к первому, второму или шестому семейству. В этом случае многоугольник R_0 не имеет сторон второго рода. Следовательно, точки периметра R_0 можно разбить на пары соответствующих точек, поскольку каждой точке, принадлежащей стороне первого рода, отвечает некоторая точка, принадлежащая сопряженной стороне. Точке внутри R_0 не соответствует ни одна точка ни внутри многоугольника, ни его периметра. Наконец, все вершины, принадлежащие к одному и тому же циклу, соответствуют друг другу. Предположим, что многоугольник R_0 вырезан. Непрерывно деформируя, сложим его так, чтобы соответствующие точки периметра оказались склеенными друг с другом. Тогда многоугольник R_0 превратится в некоторую замкнутую поверхность. Например, если взять четырехугольник $ABCD$ из примера I предыдущего раздела, и вырезав, сложить его так, чтобы сторона AB склеилась с AD , а затем склеить BC и CD , то R_0 превратится в замкнутую выпуклую поверхность.

Рассмотрим теперь четырехугольник $ABCD$, имеющий структуру (13, 24). Это означает, что его стороны AB и DC , BC и AD попарно сопряжены. Сложим четырехугольник так, чтобы сторона AB совпала со стороной DC . В результате он превратится в цилиндр, открытый с обоих концов, а стороны BC и AD , оставшиеся свободными, — в замкнутые кривые. Если затем склеить BC и AD , то четырехугольник превратится в замкнутое кольцо — тор.

Известно, что замкнутые поверхности допускают классификацию по роду поверхности. Так, на сфере нельзя провести никакой замкнутый

цикл, чтобы она при этом не распалась на две не связанные между собой части. Тор устроен иначе: окружность меридиана, например, не разделяет его поверхность на две отдельные части, однако провести на поверхности тора два различных замкнутых цикла и не расечь ее на два не связанных между собой куса невозможно.

Род замкнутой поверхности есть максимальное число различных замкнутых циклов, которые можно провести на этой поверхности, не пересекая ее на два отдельных куса. Таким образом, род замкнутой поверхности с p дырами равен p .

Родом фуксовой группы назовем род замкнутой поверхности, возникающей при описанной выше деформации R_0 [13].

Чему же равен род p ?

Если поверхность рода p разбита на F криволинейных многоугольников с общим числом сторон A и общим числом вершин S , то справедливо соотношение

$$F + S - A = -2p + 2.$$

Рассмотрим многоугольник R_0 . Пусть число его сторон первого рода равно $2n$, а число замкнутых циклов равно q . После деформации, о которой говорилось выше, эти стороны окажутся попарно склеенными, и число различных сторон станет равным n . Число различных вершин будет равно q . Таким образом, в этом случае

$$F = 1, \quad A = n, \quad S = q,$$

откуда

$$q + 1 - n = 2 - 2p,$$

или

$$p = \frac{n + 1 - q}{2}.$$

В примерах I и II предыдущего раздела

$$q = n + 1,$$

откуда

$$p = 0.$$

Приведем еще один пример применения предыдущего правила.

Пусть многоугольник R_0 имеет $2n$ сторон первого рода, причем его противоположные стороны сопряжены. Чтобы найти род соответствующей фуксовой группы, необходимо выяснить, между сколькими циклами распределяются $2n$ вершин многоугольника R_0 . Следуя правилу, сформулированному в разделе V, находим, что все вершины принадлежат одному и тому же циклу, если n четно, и двум замкнутым циклам, если n нечетно. В последнем случае один из циклов образует вершины с четными номерами, а другой — вершины с нечетными номерами. Таким образом, либо

$$q = 1,$$

либо

$$q = 2$$

в зависимости от того, четно или нечетно n . Следовательно,

$$p = \frac{n}{2},$$

если n четно, и

$$p = \frac{n-1}{2},$$

если n нечетно.

Пусть теперь многоугольник R_0 содержит стороны второго рода, примыкая вдоль них к R'_0 , так что область $R_0 + R'_0$ состоит из одного куска. Ни одна точка, лежащая внутри этой области, не может соответствовать никакой другой точке области. Точки периметра, образованного сторонами первого рода R_0 и R'_0 , попарно соответствуют друг другу. Наконец, соответствующими точками являются вершины, входящие в один и тот же цикл. Разрежем теперь область $R_0 + R'_0$ и сложим ее так, чтобы каждая из пар соответствующих друг другу точек периметра оказалась склеенной в одну точку. Род полученной замкнутой поверхности, по определению, и есть род фуксовой группы.

Пусть $2n$ по-прежнему означает число сторон первого рода многоугольника R_0 , q — число замкнутых циклов, образуемых его вершинами. Пусть R'_0 также имеет $2n$ сторон первого рода и q замкнутых циклов. Предположим, что имеется h сторон второго рода, и следовательно, h незамкнутых циклов, общих для R_0 и R'_0 .

Воспользуемся формулой

$$F + S - A = 2 - 2q.$$

В нашем случае $F=2$, поскольку имеется два многоугольника R_0 и R'_0 . Далее, $A=2n+h$, поскольку n пар сторон первого рода принадлежит многоугольнику R'_0 , n пар сторон первого рода принадлежит многоугольнику R_0 и, кроме того, имеется h сторон второго рода. Наконец, $S=2q+h$, поскольку всего имеется $2q$ замкнутых и h незамкнутых циклов.

Следовательно,

$$p = n - q.$$

Пусть, например, R_0 принадлежит к третьему семейству, т. е. все его вершины принадлежат к третьей категории. Тогда $q=0$, $p=n$. Поэтому в примере V (раздел V) род фуксовой группы равен 2.

Так же, как во втором примере, рассмотрим многоугольник R_0 , вершины которого распределены по циклам согласно формуле

$$(15, 24; 3),$$

или, в более общей форме:

$$(1, 2n + 1, 2, 2n, 3, 2n - 1, \dots, n, n + 2; n + 1),$$

так что $(n+1)$ -я сторона является единственной стороной второго рода, а стороны с номерами m и $2n+2-m$ сопряжены. Тогда

$$q = n,$$

откуда

$$p = 0.$$

IX. Упрощение производящего многоугольника

В начале раздела IV мы видели, что области R_0 не полностью определяются условием, согласно которому каждая из них может содержать лишь одну точку, соответствующую любой заданной точке z . Мы наложили на области R_0 дополнительное условие, потребовав, чтобы они были криволинейными многоугольниками со сторонами, являющимися дугами окружностей и отрезками оси X . Однако и это условие определяет области R_0 (или *производящие многоугольники*) не полностью. Действительно, мы уже знаем, что к области R_0 можно присоединять любую область S_0 , если одновременно с присоединением вырезать из R_0 область S_p , в которую переходит S_0 под действием одной из подстановок фуксовой группы. Область $R_0 + S_0 - S_p$ порождает ту же фуксову группу, что и R_0 . Если области R_0 , S_0 и S_p примыкают друг к другу и все три являются нормальными многоугольниками, т. е. многоугольниками, сторонами которых служат отрезки оси X или дуги окружностей с центром на оси X , то результирующая область $R_0 + S_0 - S_p$ также представляет собой нормальный многоугольник. Отсюда следует, что одну и ту же фуксову группу могут порождать бесконечно много производящих многоугольников R_0 и что этой неопределенностью можно воспользоваться для того, чтобы упростить этот многоугольник.

Упрощение можно произвести следующим образом. Соединим две точки A и B периметра R_0 дугой окружности с центром на оси X . При этом R_0 распадается на два других многоугольника S_0 и T_0 . Рассмотрим две сопряженные стороны CD и EF многоугольника R_0 и предположим, что CD полностью принадлежит периметру S_0 , а EF — периметру T_0 . Пусть R_1 — многоугольник, пограничный с R_0 вдоль EF . Разобьем его на два многоугольника S_1 и T_1 , конгруэнтных соответственно S_0 и T_0 . Многоугольник $R'_0 = S_1 + T_0$, так же, как и R_0 , может служить производящим многоугольником фуксовой группы G . Рассмотрение многоугольника R'_0 может обладать некоторыми преимуществами по сравнению с рассмотрением исходного многоугольника R_0 . Проведя над R'_0 операции, аналогичные сделанным над R_0 , мы придем к многоугольнику R''_0 , который может оказаться проще R_0 и R'_0 .

Мы не будем останавливаться на том, что́ следует считать простым и что́ — сложным, поскольку в каждом конкретном случае это можно установить, руководствуясь данными задачи, и ограничимся лишь несколькими примерами (обозначения те же, что и в разделе VII).

1. Многоугольник R_0 , обладающий структурой (16, 23, 45), можно всегда свести к многоугольнику, обладающему структурой (16, 25, 34).

2. Многоугольник со структурой (12, 34, 56, 78) можно всегда свести к многоугольнику со структурой (18, 27, 36, 45).

3. Восьмиугольник, имеющий структуру (13, 24, 57, 68), можно всегда свести к многоугольнику, имеющему структуру (15, 26, 37, 48).

Какие свойства криволинейного многоугольника R_0 остаются инвариантными при таких преобразованиях?

1. Семейство, к которому принадлежит многоугольник R_0 , остается неизменным во всех случаях за исключением одного, о котором мы будем говорить дальше [14].

2. Не изменяется также род многоугольника.

3. Не изменяется число замкнутых циклов третьего подвида [15].

4. Точно так же не изменяется число замкнутых циклов четвертого подвида.

5. Не изменяется и число замкнутых циклов второго подвида. Мы видели, что сумма углов, соответствующих различным вершинам такого цикла, равна $2\pi/p$, где p — целое число, большее единицы. Число p также остается инвариантным [16].

6. Наоборот, число замкнутых циклов первого подвида, таких что сумма углов, соответствующих всем вершинам цикла, равна 2π , в общем случае можно произвольно увеличивать или уменьшать.

Х. Изоморфизм

В начале раздела III мы видели, что фуксова группа H изоморфна другой фуксовой группе G , если у этих групп одно и то же число образующих подстановок и, кроме того, все соотношения вида (6) (раздел III), существующие между подстановками группы G , справедливы и для подстановок группы H . Таким образом, установление изоморфизма двух данных групп сводится к исследованию соотношений вида (6) (раздел III), существующих между подстановками этих групп, и, в частности, *определяющих соотношений*, из которых следуют все остальные.

В разделе III было показано, что соотношения вида (6) можно получить следующим образом. Исходя из некоторой точки A , расположенной внутри R_0 , опишем произвольный замкнутый контур $АМА$, не выходящий из той части плоскости, которая расположена над осью X . Пусть контур $АМА$ проходит последовательно через области $R_0, R_{\alpha_1}, R_{\beta_1}, \dots, R_{\beta_{v-1}}$ и, наконец, через R_{β_v} , совпадающую с R_0 . Предположим, что из области $R_{\beta_{v-1}}$ в область R_{β_v} наш контур попадает лишь после того, как пере-

сечет границу области $R_{\beta_{\nu+1}}$, гомологичную той стороне R_0 , которая служит общей границей для R_0 и R_{α_1} . Соотношение

$$z = f_{\alpha_1} [f_{\alpha_2} (f_{\alpha_3} (\dots (f_{\alpha_\nu} (z)) \dots)]$$

выполняется тогда тождественно. Так можно получить все соотношения этого вида. Однако, если требуется указать лишь определяющие соотношения, то необходимость описывать все возможные замкнутые контуры $АМА$ отпадает и можно ограничиться лишь бесконечно малыми контурами, охватывающими вершины R_0 .

Итак, рассмотрим одну за другой различные вершины R_0 и вокруг каждой из них опишем бесконечно малый контур. Поскольку $АМА$ не должен выходить из части плоскости, лежащей над осью X , мы не можем совершать обход вокруг тех вершин R_0 , которые расположены на самой оси X . Следовательно, единственные вершины многоугольника R_0 , подлежащие рассмотрению, принадлежат первой категории.

Предположим, что стороны R_0 пронумерованы так, что, обходя периметр этого многоугольника в выбранном направлении, мы последовательно встретим стороны $C_1, C_2, \dots, C_q$ (q — число всех сторон). Пусть A_1 — вершина, лежащая между C_q и C_1 , A_2 — вершина, лежащая между C_1 и C_2 , и т. д., вообще, A_i — вершина, разделяющая стороны C_{i-1} и C_i . Если C_1 — сторона первого рода, то область, пограничную с R_0 вдоль C_i , обозначим R_i , а соответствующую образующую подстановку —

$$[z, f_i(z)].$$

Рассмотрим одну из вершин первой категории, которую назовем A_{α_1} . Эта вершина принадлежит какому-то циклу первой категории. Остальные вершины, входящие в него, найдем с помощью правила из раздела V. Предположим, что мы, следуя этому правилу, получили вершины

$$A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \dots, A_{\alpha_p}$$

(именно в этом порядке). Пусть сумма углов, отвечающих найденным вершинам, равна $2\pi/\lambda$, где λ — некоторое целое число. Введем для краткости следующие обозначения:

$$F(z) = f_{\alpha_1} [f_{\alpha_2} [f_{\alpha_3} \dots [f_{\alpha_p}(z)] \dots],$$

$$F[F(z)] = F^2(z), \quad F[F^2(z)] = F^3(z), \dots, \quad F[F^{\lambda-1}(z)] = F^\lambda(z).$$

Определяющее соотношение, которое, следуя изложенному выше правилу, мы получили при рассмотрении бесконечно малого контура, описанного вокруг A_{α_1} , имеет вид

$$z = F^\lambda(z).$$

Вершины $A_{\alpha_2}, A_{\alpha_3}, \dots, A_{\alpha_p}$, принадлежащие к тому же циклу, что и A_{α_1} , приводят к этому же соотношению.

Таким образом, число определяющих соотношений, которым удовлетворяют подстановки фуксовой группы G , в точности совпадает с числом циклов первой категории, образуемых вершинами соответствующего многоугольника R_0 .

Многоугольники второго, третьего и четвертого семейства не допускают циклов первой категории. Следовательно, между подстановками групп, принадлежащих к этим семействам, не существует никаких определяющих соотношений, и все соотношения вида (6), которые можно найти между этими подстановками, обращаются в тождества.

Отсюда можно вывести первое следствие: всякая группа H , порожденная n образующими подстановками, изоморфна [17] некоторой фуксовой группе G второго, третьего или четвертого семейства, поскольку группа G также порождена n образующими подстановками. Действительно первое условие изоморфизма, требующее, чтобы число образующих подстановок было одинаковым, выполнено. Второе условие, требующее, чтобы всякое определяющее соотношение, которому удовлетворяют подстановки группы G , было справедливо и для подстановок группы H , выполняется автоматически, поскольку такого соотношения в рассматриваемом случае вообще не существует. Необходимо различать два случая. Если между подстановками группы H имеются соотношения вида (6), то группа G не изоморфна группе H , и, следовательно, изоморфизм мериэдрический. Наоборот, если таких соотношений не существует, то изоморфизм между G и H взаимный и, следовательно, голоэдрический. Отсюда мы заключаем, что две фуксовы группы, принадлежащие ко второму, третьему или четвертому семейству, голоэдрически изоморфны, если только число образующих подстановок у них одинаково, т. е. если у соответствующих им многоугольников R_0 одно и то же число сторон первого рода.

Рассмотрим теперь два произвольных многоугольника R_0 и R'_0 с одинаковым распределением сторон первого и второго рода [18] (в обозначениях, введенных в начале раздела VII, такие многоугольники выражаются одной и той же формулой). Оба эти многоугольника, очевидно, имеют один и тот же род, принадлежат к одному и тому же семейству и обладают одним и тем же числом циклов, образуемых их вершинами, так что каждому циклу R_0 отвечает цикл R'_0 и наоборот. Замкнутому циклу первого многоугольника отвечает также замкнутый цикл второго многоугольника. Если помимо этого сумма углов каждого замкнутого цикла многоугольника R_0 равна сумме углов соответствующего цикла R'_0 , то порождаемые этими многоугольниками фуксовы группы голоэдрически изоморфны.

XI. Эффективное построение фуксовых групп

Фуксова группа полностью определена, если известны ее образующие подстановки. Для того чтобы найти все подстановки этой группы, доста-

точно взять все возможные комбинации образующих подстановок. Построить фуксову группу — означает вычислить коэффициенты образующих ее подстановок. Эта задача не вызывает никаких затруднений. Действительно, предположим, что мы построили многоугольник R_0 , соответствующий нашей группе, и, следовательно, вычислили координаты, а тем самым и аффиксы вершин R_0 . Искомые образующие подстановки переводят каждую сторону первого рода в сопряженную ей. Пусть α , β и γ , δ — аффиксы вершин двух сопряженных сторон R_0 . Предположим сначала, что все четыре величины α , β , γ , δ комплексны, так что ни одна из вершин не лежит на оси X . Если α' , β' , γ' , δ' — величины, комплексно сопряженные с α , β , γ , δ , то должно выполняться соотношение

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta),$$

т. е.

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\alpha - \beta'} \frac{\beta - \beta'}{\beta - \alpha'} = \frac{\gamma - \gamma'}{\gamma - \delta'} \frac{\delta - \delta'}{\delta - \gamma'}. \quad (1)$$

Следовательно, вещественная подстановка, переводящая $\alpha\beta$ в $\gamma\delta$, полностью определена.

Вещественность подстановки нетрудно усмотреть, если воспользоваться обозначениями

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + i\alpha_2, & \beta &= \beta_1 + i\beta_2, & \gamma &= \gamma_1 + i\gamma_2, & \delta &= \delta_1 + i\delta_2, \\ \alpha' &= \alpha_1 - i\alpha_2, & \beta' &= \beta_1 - i\beta_2, & \gamma' &= \gamma_1 - i\gamma_2, & \delta' &= \delta_1 - i\delta_2. \end{aligned}$$

Тогда искомую подстановку можно представить в виде

$$\left(z, \frac{Az + B}{Cz + D} \right),$$

где

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 & \gamma_1 & 1 \\ \beta_1\delta_1 - \beta_2\delta_2 & \delta_1 & 1 \\ \beta_1\delta_2 + \beta_2\delta_1 & \delta_2 & 0 \end{vmatrix}, & B &= \begin{vmatrix} \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_1\delta_1 - \beta_2\delta_2 & \beta_1 & \delta_1 \\ \beta_1\delta_2 + \beta_2\delta_1 & \beta_2 & \delta_2 \end{vmatrix}, \\ C &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 1 \\ \beta_1 & \delta_1 & 1 \\ \beta_2 & \delta_2 & 0 \end{vmatrix}, & D &= \begin{vmatrix} \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 & \alpha_1 & 1 \\ \beta_1\delta_1 - \beta_2\delta_2 & \beta_1 & 1 \\ \beta_1\delta_2 + \beta_2\delta_1 & \beta_2 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Далее можно сделать два предположения. Можно предположить, что α и γ вещественны, в то время как β и δ по-прежнему остаются комплексными. Тогда условие (1) теряет смысл, вещественная подстановка, которая переводит $\alpha\beta$ в $\gamma\delta$, по-прежнему полностью определена и имеет вид

$$\left(z, \frac{Az + B}{Cz + D} \right),$$

а коэффициенты A , B , C и D определяются теми же выражениями, что и раньше, но α_2 и γ_2 в них следует положить равными нулю.

Предположим теперь, что вещественны все четыре величины α , β , γ , δ . Тогда подстановка, переводящая $\alpha\beta$ в $\gamma\delta$, уже не будет вполне определенной, и в выражения для ее коэффициентов войдет произвольный параметр h . Ее можно представить в виде

$$\left(z, \frac{Az + B}{Cz + D}\right),$$

где коэффициенты A , B , C и D имеют следующие выражения:

$$A = \begin{vmatrix} \alpha\gamma & \gamma & 1 \\ \beta\delta & \delta & 1 \\ h & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \alpha\gamma & \alpha & \gamma \\ \beta\delta & \beta & \delta \\ h & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & 1 \\ \beta & \delta & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} \alpha\gamma & \alpha & 1 \\ \beta\delta & \beta & 1 \\ h & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Для того чтобы вещественные величины α , β , γ , δ могли быть вершинами некоторого многоугольника R_0 , они должны удовлетворять неравенству

$$\left[\frac{1}{\delta - \alpha} - \frac{1}{\gamma - \alpha}\right] \left[\frac{1}{\delta - \alpha} - \frac{1}{\beta - \alpha}\right] < 0.$$

Что же касается параметра h , то он произволен, предполагается вещественным и удовлетворяет неравенству

$$(\gamma + h)(\delta + h)(\delta - \gamma)(\beta - \alpha) > 0,$$

означающему, что определитель $AD - BC$ положителен.

Таким образом, если аффиксы вершин R_0 известны, то можно вычислить коэффициенты образующих подстановок группы G . Следовательно, речь идет о таком выборе этих аффиксов, чтобы многоугольник R_0 удовлетворял перечисленным в разделе VI условиям, без которых он не может породить фуксову группу. Это чисто алгебраическая задача, и решение ее не представляет никакой трудности. Огромное разнообразие возможных случаев не позволяет мне рассмотреть все их подробно. Такое рассмотрение привело бы к повторениям и было бы излишне длинно. Поэтому я ограничусь лишь несколькими примерами.

Первый пример.

Попробуем прежде всего построить фуксову группу третьего семейства, порожденную n образующими подстановками. Соответствующий многоугольник R_0 имеет $2n$ сторон первого рода и $2n$ сторон второго рода. Для того чтобы такой многоугольник был полностью задан, на него необ-

ходимо наложить $4n$ произвольных условий. Но в разделе IX мы видели, что одну и ту же фуксову группу G могут порождать бесконечно много многоугольников R_0 . Если это учесть, то нетрудно видеть, что для того чтобы полностью задать группу третьего семейства, порожденную n образующими подстановками, необходимо произвольно наложить $3n$ условий. Ровно столько коэффициентов имеют любые n вещественных подстановок. Отсюда не следует, что, выбрав случайно n вещественных подстановок, мы получим (порожденную ими) фуксову группу, принадлежащую к третьему семейству. Однако на коэффициенты этих подстановок не придется накладывать никаких условий типа равенства, они должны удовлетворять лишь некоторым неравенствам.

Каковы эти неравенства? Именно эту задачу нам осталось решить. Прежде всего, нетрудно установить, что все подстановки должны быть гиперболическими и, следовательно, их неподвижные точки должны быть вещественными и расположенными на оси X . Относительно расположения неподвижных точек на оси X можно высказать некое общее утверждение. Действительно, рассмотрим две сопряженные стороны ab и cd многоугольника R_0 . Предположим, что они первого рода и принадлежат к одной и той же паре. Для ясности будем считать, что R_0 содержит точку ∞ и, следовательно, представляет собой часть плоскости, расположенную над осью X вне окружностей, дуги которых образуют его границы первого рода. В противном случае этого всегда можно добиться с помощью подходящей замены переменной.

Среди образующих подстановок найдется такая, которая переводит ab в cd , причем одна из ее неподвижных точек принадлежит отрезку ab оси X , а другая — отрезку cd .

Для того чтобы мы могли продвинуться дальше в изучении неравенств, которым должны удовлетворять коэффициенты образующих подстановок группы третьего семейства, рассмотрим один частный случай, а именно: пример V из раздела V. Впрочем, используемый нами метод распространяется и на самый общий случай.

Две образующие подстановки переводят AB в CD и EF в HG . Рассмотрим сначала подстановку S , переводящую AB в CD . Две ее неподвижные точки M и N принадлежат соответственно отрезкам AB и CD оси X . Опишем на AN как на диаметре окружность и рассмотрим криволинейный треугольник ABN . Точно так же опишем на DN как на диаметре другую окружность и рассмотрим криволинейный треугольник DCN . В соответствии с принципом, изложенным в разделе IX, восьмиугольник $R_0 = ABCDEFGH$ можно заменить семиугольником $R'_0 = ANDEFGH$ [19].

Точно так же рассмотрим подстановку S_1 , переводящую HG в EF . Две ее неподвижные точки M_1 и N_1 расположены: одна — на отрезке EF , другая — на отрезке GH . С помощью совершенно аналогичных рассуждений доказывается, что семиугольник R'_0 можно заменить шестиугольником $R''_0 = ANDEN_1H$. Заметим, что R''_0 принадлежит к четвертому семейству (точнее, ко второму типу этого семейства), в то время как R_0

был многоугольником третьего семейства. Именно об этом исключении и шла речь в разделе IX: упрощая фундаментальный многоугольник R_0 , многоугольник третьего семейства можно свести к многоугольнику второго типа четвертого семейства или даже к многоугольнику второго семейства, но никогда к многоугольнику первого типа четвертого или второго семейства. Рассмотрим теперь операцию S_2 , состоящую в выполнении сначала подстановки S , а затем подстановки, обратной S_1 . Подстановка S переводит AN в DN ; подстановка, обратная S_1 , переводит DN в некоторую окружность QP , расположенную внутри N_1H . Следовательно, подстановка S_2 переводит AN в QP , а две ее неподвижные точки N_2 и M_2 расположены: одна — на отрезке AN , другая — на отрезке PQ . Подстановка S переводит N_2 в некоторую точку N_3 , подстановка S_1 также должна переводить N_2 в N_3 ; следовательно, N_3 расположена на отрезке M_1E . На отрезках N_2N , N_2N_1 , N_1N_3 , NN_3 как на диаметрах опишем окружности. Подстановка S_1 переводит N_2N_1 в N_3N_1 , подстановка S переводит N_2N в N_3N , что (в соответствии с тем, что говорилось в разделе IX) позволяет заменить восьмиугольник R_0 четырехугольником $R_0''' = N_1N_2NN_3$. Этот многоугольник принадлежит ко второму семейству (ко второму типу этого семейства).

Теперь мы уже в состоянии найти те неравенства, которым должны удовлетворять коэффициенты подстановок S и S_1 . Не ограничивая общ-

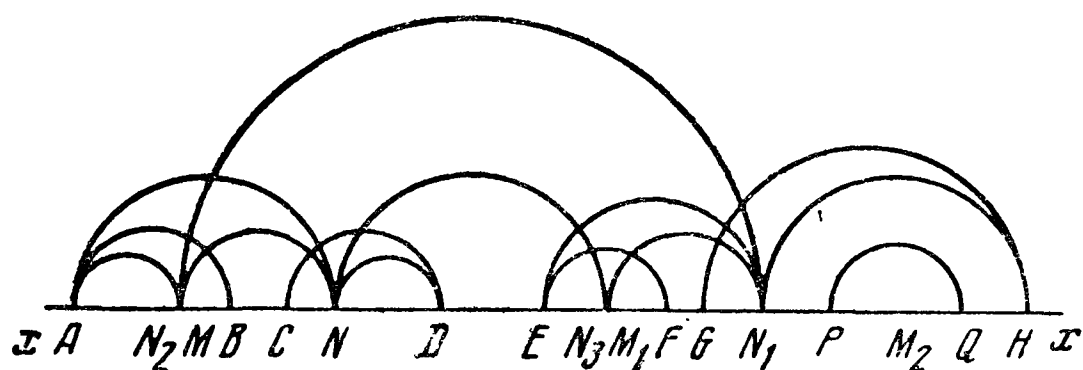


Рис. 9

ности, будем предполагать, что неподвижными точками S служат 0 и ∞ , так что

$$N_1 = 0, \quad M_1 = \infty,$$

ибо в противном случае к условию $N_1 = 0$, $M_1 = \infty$ можно всегда перейти с помощью весьма простой замены переменной.

Итак, наши подстановки можно представить в виде

$$S = \left(z, \frac{az + b}{cz + d} \right), \quad S_1 = (z, Kz),$$

где K — существенно положительная величина, бо́льшая 1. Кроме того, коэффициент c всегда можно считать положительным, ибо в противном случае можно было бы изменить знаки всех коэффициентов a , b , c , d .

Точки M и N , будучи неподвижными точками подстановки S , являются корнями уравнения

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0. \quad (1)$$

Точки M_2 и N_2 служат неподвижными точками подстановки

$$\left(z, \frac{az + b}{K(cz + d)}\right)$$

или корнями уравнения

$$cz^2 + \left(d - \frac{a}{K}\right)z - \frac{b}{K} = 0. \quad (2)$$

Точка N_3 и отличная от нее точка M_3 являются неподвижными точками подстановки

$$\left(z, \frac{az + bK}{cz + dK}\right)$$

и, следовательно, корнями уравнения

$$cz^2 + (dK - a)z - bK = 0. \quad (3)$$

Из рассмотрения рис. 9 ясно, что величины M , N , N_2 , M_2 , N_3 , M_3 вещественны и имеют один и тот же знак, например все положительны, что приводит к соотношениям:

$$\begin{aligned} b < 0, \quad (d - a)^2 + 4bc > 0, \quad a > d, \\ \frac{b}{K} < 0, \quad (dK - a)^2 + 4Kbc > 0, \quad a > dK, \\ bK < 0, \quad (dK - a)^2 + 4Kbc > 0, \quad a > dK. \end{aligned}$$

Последние можно упростить и свести к неравенствам:

$$\begin{aligned} b < 0, \quad a > dK, \quad (a + d)^2 > 4, \quad a > d, \\ \left(\frac{a}{\sqrt{K}} + d\sqrt{K}\right)^2 > 4, \end{aligned}$$

если учесть, что

$$ad - bc = 1.$$

Запишем теперь, что M_2 и N_2 — меньше, а M_3 и N_3 — больше M и N . Тогда

$$\begin{aligned} b < 0, \quad a^2 + bc > 1 > d^2 + bc, \\ b < 0, \quad \frac{a^2}{K} + bc < 1 < d^2K + bc, \quad a - dK > a - d > \frac{a}{K} - d. \end{aligned}$$

Все эти условия сводятся к неравенствам:

$$\begin{aligned} a > 0, \quad b < 0, \quad d < 0, \quad a + d > 2, \\ \frac{a}{\sqrt{K}} + d\sqrt{K} < -2. \end{aligned}$$

Изложенный нами метод применим ко всем фуксовым группам третьего семейства. С его помощью многоугольник R_0 можно всегда свести к некоторому многоугольнику второго типа второго семейства. Вершины нового многоугольника известны, поскольку являются неподвижными точками образующих подстановок или какой-то комбинации из них. Чтобы найти искомые неравенства, достаточно выразить тот факт, что эти вершины расположены на плоскости вполне определенным образом.

Второй пример.

В качестве второго примера рассмотрим группу первого семейства рода 0. Чтобы еще более конкретизировать пример, выберем шестиугольник $ABCDEF$ из примера II (раздел VII).

В этом случае имеются три образующие подстановки:

$$\begin{aligned} S_1, & \text{ переводящая } AB \text{ в } AF, \\ S_2, & \text{ переводящая } BC \text{ в } EF, \\ S_3, & \text{ переводящая } CD \text{ в } ED. \end{aligned}$$

Кроме них, мы рассмотрим также подстановки

$$\begin{aligned} S_4 & \text{ — комбинацию } S_2 \text{ и подстановки, обратной } S_1; \\ S_5 & \text{ — комбинацию } S_3 \text{ и подстановки, обратной } S_2. \end{aligned}$$

Можно считать, что фуксова группа порождена подстановками S_1 , S_2 и S_3 .

Пусть a, b, c, d — аффиксы точек A, B, C, D ; a', b', c', d' — величины, комплексно сопряженные с a, b, c и d ; α, β, γ и δ — углы $A, B+F, C+E$ и D , равные 2π , деленному на целое число. Подстановки S_1, S_4, S_5 и S_3^{-1} имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{z-a}{z-a'}, e^{i\alpha} \frac{z-a}{z-a'} \right), & \quad \left(\frac{z-b}{z-b'}, e^{i\beta} \frac{z-b}{z-b'} \right), \\ \left(\frac{z-c}{z-c'}, e^{i\gamma} \frac{z-c}{z-c'} \right), & \quad \left(\frac{z-d}{z-d'}, e^{i\delta} \frac{z-d}{z-d'} \right). \end{aligned}$$

Комбинация подстановок S_3^{-1}, S_5, S_4 и S_1 , взятых последовательно, равна тождественной подстановке (z, z) . Записав это равенство, получим три соотношения между $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma$ и δ .

Предположим, что эти соотношения выполнены. Достаточны ли они для того, чтобы группа, порожденная подстановками S_1, S_5, S_4 , была дискретной? Нет, для этого еще необходимо, чтобы точки A, B, C и D были вершинами шестиугольника $ABCDEF$, или

$$A = \alpha, \quad B + F = \beta, \quad C + E = \gamma, \quad D = \delta.$$

Рассмотрим углы криволинейного четырехугольника $ABCD$, который получится, если четыре точки A, B, C и D соединить дугами окружностей с центром на оси X . Необходимо, чтобы четыре угла A, B, C и D этого

четырехугольника были соответственно меньше α , β , γ и δ . Отсюда получаем неравенства:

$$\begin{aligned} 0 < \arg \frac{d-a}{d-a'} \frac{b-a'}{b-a} < \alpha, \\ 0 < \arg \frac{a-b}{a-b'} \frac{c-b'}{c-b} < \beta, \\ 0 < \arg \frac{b-c}{b-c'} \frac{d-c'}{d-c} < \gamma, \\ 0 < \arg \frac{c-d}{c-d'} \frac{a-d'}{a-d} < \delta. \end{aligned} \tag{2}$$

Как узнать, могут ли три данные подстановки S , S_4 и S_5 быть образующими подстановками некоторой фуксовой группы, аналогичной только что рассмотренной нами?

Для этого подстановку S_3^{-1} применим к комбинации подстановок, обратных S_1 , S_4 и S_5 , взятых последовательно. Вычислим неподвижные точки $a, a'; b, b'; c, c'; d, d'$ четырех указанных подстановок и их множители $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$, $e^{i\delta}$. Должно выполняться два условия: 1) углы α , β , γ и δ должны быть равны 2π , деленному на целое число; 2) величины $a, a', b, b', c, c', d, d', \alpha, \beta, \gamma, \delta$ должны удовлетворять неравенствам (2).

Третий пример.

В качестве третьего примера выберем группы первого типа второго семейства рода 0. Среди этих групп мы выделим те, которые порождаются шестиугольником $R_0 = ABCDEF$, рассмотренным в примере II (раздел VII). Правда, на этот раз шестиугольник должен принадлежать ко второму семейству, т. е. все его вершины должны располагаться на оси X . Так же, как в предыдущем примере, рассмотрим подстановки

- S_1 , переводящую AB в AF ,
- S_2 , переводящую BC в FE ,
- S_3 , переводящую DC в DE ,
- S_4 —комбинацию S_2 и подстановки, обратной S_1 ,
- S_5 —комбинацию S_3 и подстановки, обратной S_2 .

Пусть a, b, c, d, e, f — аффиксы вершин R_0 (величины строго вещественные). Подстановки S_1, S_4, S_5 и S_3 должны быть параболическими, поскольку группа, по предположению, принадлежит к первому типу. Их можно представить в виде

$$\begin{aligned} S_1 &= \left(\frac{1}{z-a}, \frac{1}{z-a} + \frac{1}{f-a} - \frac{1}{b-a} \right), \\ S_2 &= \left(\frac{1}{z-b}, \frac{1}{z-b} + \frac{1}{h-b} - \frac{1}{c-b} \right), \end{aligned}$$

$$S_3 = \left(\frac{1}{z-c}, \frac{1}{z-c} + \frac{1}{b-c} - \frac{1}{k-c} \right),$$

$$S_4 = \left(\frac{1}{z-d}, \frac{1}{z-d} + \frac{1}{e-d} - \frac{1}{c-d} \right),$$

где h и k — две величины, определяемые уравнениями

$$\frac{1}{c-a} = \frac{1}{h-a} + \frac{1}{f-a} - \frac{1}{b-a},$$

$$\frac{1}{f-d} = \frac{1}{k-d} + \frac{1}{e-d} - \frac{1}{c-d}.$$

При каких условиях три подстановки S_1 , S_4 и S_5 порождают фуксову группу? Для этого необходимо, чтобы шесть величин a, b, c, d, e, f следовали друг за другом либо в указанном порядке (при этом считается, что a следует за f), либо в обратном порядке и были справедливы либо неравенства

$$\frac{1}{b-a} < \frac{1}{c-a} < \frac{1}{d-a} < \frac{1}{e-a} < \frac{1}{f-a}, \quad (3)$$

либо обратные им неравенства

$$\frac{1}{b-a} > \frac{1}{c-a} > \frac{1}{d-a} > \frac{1}{e-a} > \frac{1}{f-a}.$$

Записав, что комбинация подстановок S_3^{-1}, S_5, S_4, S_1 равна тождественной подстановке, получим

$$(b-a)(d-c)(f-e) = (c-b)(e-d)(f-a). \quad (4)$$

Замечание.

В двух предыдущих примерах удобнее рассматривать не шестиугольник $ABCDEF$ из примера II (раздел VII), имеющий структуру (16, 25, 34), а эквивалентный ему (см. раздел IX) шестиугольник (12, 34, 56).

Пусть $ABCDEF$ — шестиугольник (12, 34, 56). Его стороны AB и BC , CD и DE , EF и FA попарно сопряжены. Рассмотрим подстановки

$$S_1, \text{ переводящую } BA \text{ в } BC,$$

$$S_2, \text{ переводящую } DC \text{ в } DE,$$

$$S_3, \text{ переводящую } EF \text{ в } FA,$$

$$S_4 — \text{комбинацию } S_1, S_2 \text{ и } S_3.$$

Эти четыре подстановки — эллиптические, их множители имеют вид $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, e^{i\delta}$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ равны 2π , деленному на целое число.

Пусть B — одна из неподвижных точек подстановки S_1 , D — одна из неподвижных точек подстановки S_2 , F — одна из неподвижных точек подстановки S_3 , A — одна из неподвижных точек подстановки S_4 . Остальные неподвижные точки получаются из названных с помощью операции комплексного сопряжения. Подстановка S_1 переводит точку A в C , под-

становка S_2 переводит C в E . Для того чтобы группа, порожденная S_1, S_2, S_3 , была дискретной, достаточно, чтобы нормальный криволинейный шестиугольник $ABCDEF$ был выпуклым. Отсюда получаем условия:

$$\begin{aligned} 0 < \arg \frac{d-b}{d-b'} \frac{f-b'}{f-b} < \alpha, \\ 0 < \arg \frac{f-d}{f-d'} \frac{b-d'}{b-d} < \beta, \\ 0 < \arg \frac{b-f}{b-f'} \frac{d-f'}{d-f} < \gamma. \end{aligned} \quad (5)$$

Чтобы узнать, дискретна ли группа, порожденная подстановками S_1, S_2, S_3 , вычислим неподвижные точки $b, b', d, d', f, f', a, a'$ и множители $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, e^{i\delta}$ подстановок S_1, S_2, S_3 и их комбинации S_4 и проверим, удовлетворяют ли эти величины неравенствам (5) и равны ли α, β, γ и δ величине $2\pi/k$, где k — целое число.

Предположим теперь, что шестиугольник $absdef$ принадлежит не к первому семейству, а к первому типу второго семейства, вследствие чего величины a, b, c, d, e, f вещественны. Они должны удовлетворять неравенствам (3), которые выполняются лишь при условии, если шестиугольник $abcdef$ выпуклый. Подстановки S_1, S_2, S_3 имеют вид

$$\begin{aligned} S_1 &= \left(\frac{1}{z-b}, \quad \frac{1}{z-b} + \frac{1}{c-b} - \frac{1}{a-b} \right), \\ S_2 &= \left(\frac{1}{z-d}, \quad \frac{1}{z-d} + \frac{1}{e-d} - \frac{1}{c-d} \right), \\ S_3 &= \left(\frac{1}{z-f}, \quad \frac{1}{z-f} + \frac{1}{a-f} - \frac{1}{e-f} \right). \end{aligned}$$

Записав условие параболичности комбинации S_4 подстановок S_1, S_2, S_3 , мы обнаружим, что величины a, b, c, d, e, f удовлетворяют равенству (4). Это равенство вместе с неравенствами (3) и есть условие, при котором группа, порожденная подстановками S_1, S_2, S_3 , дискретна.

Четвертый пример.

В качестве четвертого примера приведем четырехугольник $abcd$, противоположные стороны которого ab, cd и bc, ad попарно сопряжены. Четыре его вершины образуют один цикл, сумма его углов Σ равна 2π , деленному на целое число. Четырехугольник $abcd$ порождает группу первого семейства рода 1. Соединим две противоположные вершины b и d дугой окружности с центром на оси X . При этом мы получим треугольник abd , на сторонах которого отметим три точки α, β, γ , выбрав их так, чтобы первая принадлежала стороне bd , вторая — стороне da и третья — стороне ab , и выполнялись соотношения

$$(b, \alpha) = (\alpha, d), \quad (d, \beta) = (\beta, a), \quad (a, \gamma) = (\gamma, b).$$

Далее, найдется подстановка S_1 , которая переводит ab в ad ; S_2 , которая переводит βd в βa ; S_3 , которая переводит γa в γb . Множитель всех трех подстановок равен -1 . Группа, порожденная подстановками S_1 , S_2 и S_3 , дискретна; ее фундаментальным многоугольником служит шестиугольник $bad\beta a\gamma$, стороны которого ba , ad ; $d\beta$, βa ; $a\gamma$, γb попарно сопряжены и расположены одна на продолжении другой. Следовательно, мы имеем здесь дело с тем особым случаем групп, порожденных шестиугольником $abcdef$, который рассмотрен в замечании к предыдущему примеру.

Образующие подстановки группы, порожденной четырехугольником $abcd$, состоят из подстановки S_5 , переводящей ab в dc , и подстановки S_6 , переводящей bc в ad . Нетрудно видеть, что S_5 представляет собой комбинацию подстановок S_3 и S_1 , а S_6 — комбинацию подстановок S_2 и S_1 . Отсюда можно вывести следующее правило построения фуксовых групп, порожденных такими четырехугольниками, как $abcd$: нужно взять три подстановки S_1 , S_2 , S_3 с множителем, равным -1 , удовлетворяющие условиям, сформулированным в замечании относительно предыдущего примера; комбинируя S_3 и S_1 , а также S_2 и S_1 , мы получим определяющие подстановки искомой группы.

ХII. Обобщение

До сих пор мы предполагали, что все подстановки вещественны. Непосредственно напрашивается первое обобщение.

Пусть

$$\left(z, \frac{az + b}{cz + d}\right) \quad (1)$$

— произвольная вещественная подстановка. Поставим ей в соответствие подстановку

$$\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \frac{a \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + b}{c \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + d}\right), \quad (2)$$

где α , β , γ , δ — произвольные комплексные постоянные. Предположим, что α , β , γ и δ имеют некоторые фиксированные значения, а a , b , c и d могут принимать любые вещественные значения, удовлетворяющие условию $ad - bc = 1$. Подстановки (2), очевидно, образуют группу, которая обладает следующими свойствами.

1. Ее подстановки оставляют инвариантной окружность, уравнение которой имеет вид

$$\text{мнимая часть } \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = 0.$$

Эту окружность мы будем называть *фундаментальной*.

2. Образ точки z при подстановке (2) находится внутри или вне фундаментальной окружности в зависимости от того, находится ли сама точка z внутри или вне этой окружности.

Пусть, например, точка $\frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}$ располагается над осью X , если z лежит внутри фундаментальной окружности.

Предположим теперь, что мы по очереди приравняли коэффициенты в формуле (1) коэффициентам различных подстановок некоторой фуксовой группы G . В результате мы получим бесконечно много подстановок (2), образующих группу G' . Группа G' , очевидно, дискретна. Группе G отвечает разбиение части плоскости, расположенной над осью X , на бесконечное множество конгруэнтных многоугольников $R_0, R_1, \dots, R_i, \dots$

Пусть точка $\frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}$ перемещается по одному из многоугольников R_i , сторонами которого, как мы уже знаем, служат либо отрезки оси X , либо дуги окружностей с центром на X . Точка z в свою очередь описывает некоторый многоугольник S_i , сторонами которого служат либо дуги фундаментальной окружности, либо дуги окружностей, ортогонально пересекающихся с фундаментальной окружностью.

Следовательно, так же, как группе G отвечает разбиение части плоскости, расположенной над осью X , на бесконечное множество нормальных конгруэнтных многоугольников, группе G' отвечает разбиение области, лежащей внутри фундаментальной окружности, на бесконечное множество нормальных конгруэнтных многоугольников. При этом, говоря о нормальных многоугольниках, мы имеем в виду следующее. Нормальным мы называем криволинейный многоугольник, сторонами которого служат либо дуги фундаментальной окружности, либо дуги окружностей, ортогонально пересекающейся с фундаментальной.

Две фигуры конгруэнтны, если одна из них переходит в другую под действием одной из подстановок вида (2), т. е. подстановок, сохраняющих фундаментальную окружность. Все, что говорилось о разбиении сторон на пары и вершин на циклы и о классификации нормальных многоугольников по семействам, типам и родам, остается в силе и в рассматриваемом нами частном случае.

Каковы теперь условия, при которых нормальный многоугольник порождает дискретную группу G' ? Оказывается, что условия эти такие, как и в рассмотренном нами ранее частном случае групп вещественных подстановок, однако формулировка их должна быть надлежащим образом изменена.

1. Сумма углов при вершинах, входящих в один и тот же цикл, должна быть равной 2π , деленному на некоторое целое число.

2. Если ab и cd — две сопряженные стороны, то так же, как и в случае вещественных подстановок, должно выполняться соотношение

$$\frac{a - a' b - b'}{a - b' b - a'} = \frac{c - c' d - d'}{c - d' d - c'}.$$

При этом a', b', c', d' не означают более величин, комплексно сопряженных с a, b, c и d , а симметричны последним относительно фундаментальной окружности (см. определение в разделе VII). Иначе говоря, если α — центр фундаментальной окружности, а β — ее радиус, то

$$a' = \alpha + \text{величина комплексно сопряженная с } \frac{\beta^2}{a - \alpha}.$$

Аналогичная формула справедлива для b', c', d' .

Дискретные группы, аналогичные G' , мы также будем называть *фуксовыми группами*, поскольку они не существенно отличаются от групп вещественных подстановок. Название же *клеиновы группы* мы сохраним за группами, подстановки которых не сохраняют даже фундаментальной окружности. Изучение этих групп составит содержание особого мемуара.

Отдельные частности, которые могут возникнуть при рассмотрении фуксовых групп, повторяют то, что уже было сказано с соответствующих группах вещественных подстановок.

Если фундаментальный многоугольник R_0 относится ко второму типу второго, четвертого, шестого или седьмого семейства, то множество многоугольников R_i не покрывает полностью внутренность фундаментального круга, а заполняет лишь внутренность некоторой области, ограниченной бесконечно многими окружностями, ортогонально пересекающимися с фундаментальной окружностью.

Если многоугольник R_0 принадлежит к третьему, четвертому, пятому или седьмому семейству, то у него имеются стороны второго рода. В начале раздела VIII мы видели, что в этом случае к каждому многоугольнику R_i удобно присоединять многоугольник R'_i , симметричный R_i относительно оси X , и таким образом разбивать всю плоскость на бесконечное множество многоугольников $R_i + R'_i$, граница которых состоит из одного или нескольких кусков. В рассматриваемом нами теперь случае мы присоединяем к каждому многоугольнику R_i многоугольник R'_i , симметричный с ним относительно фундаментальной окружности, и также разбиваем всю плоскость на бесконечно много областей $R_i + R'_i$.

Оставим пока в стороне области, которые мы только что назвали R'_i , и займемся самими многоугольниками R_i . Сумма площадей R_i , расположенных внутри фундаментального круга, конечна, что весьма важно для дальнейших приложений. Единственное исключение может возникнуть в том случае, когда фундаментальная окружность вырождается в прямую, что, в частности, происходит при рассмотрении групп вещественных подстановок. Однако, как было показано в начале этого раздела, достаточно линейной замены переменной, чтобы снять вырождение и вернуться к общему случаю.

В последующих работах я для большей ясности всегда буду предполагать, что центр фундаментальной окружности находится в начале координат, а радиус равен единице. Общий случай нетрудно свести к указанному с помощью чрезвычайно простой замены переменной.

XIII. Исторические сведения

С первым примером дискретной группы, порожденной линейными подстановками, мы встречаемся при изучении модуля k эллиптической функции (обычное обозначение) или модуля J (обозначение Клейна) как функции периодов. Эрмит основательно изучил этот класс трансцендентных функций и доказал, что они однозначны. Тем самым он доказал, что соответствующая группа дискретна.

Затем изучением функций k и J , а также дискретных групп занимались Дедекин, Фукс и Клейн, а позднее Гурвиц. В этой связи следует указать важные работы Клейна, опубликованные в «Mathematische Annalen», и замечательный мемуар Фукса, помещенный в т. 38 «Journal de Crelle».

Очевидно, что любая группа G содержит бесконечно много других групп, дискретных, если дискретна сама G . Следовательно, зная лишь какую-нибудь одну дискретную группу, нетрудно построить бесконечно много других, обладающих тем же свойством. Именно это замечание послужило отправной точкой прекрасных исследований Клейна по теории преобразований эллиптических и вообще модулярных функций.

Помимо групп, входящих в модулярную группу, дискретность которых очевидна, существует еще и другая группа, дискретность которой была замечена Шварцем (см. его мемуар в т. 75 «Journal de Crelle»). Она была рассмотрена нами в примере I (раздел VII). Впервые подобный результат был получен без обращения к теории эллиптических функций. Наконец, к аналогичному вопросу вернулся в своих работах, опубликованных в т. 89 «Journal de Crelle» и «Трудах Геттингенского общества», Фукс. Хотя группы, изученные в последней работе, не выходят за рамки уже известных, все же чтение именно этого замечательного мемуара побудило меня к моим первым исследованиям и позволило найти закон образования фуксовых групп и дать ему строгое доказательство.

Свои результаты я впервые изложил в мемуаре, который имел честь представить на рассмотрение Академии наук в связи с конкурсом на соискание Большой премии по математике 1-го июня 1880 г. Исследование дискретных групп я продолжил в серии работ, опубликованных в «Comptes rendus» в 1881 г.

Избранный мной способ представления (разбиение части плоскости на бесконечное множество криволинейных многоугольников) может оказаться весьма полезным при изучении общих свойств дискретных групп. Именно это я и стремился показать. Тем геометрам, которые пожелали бы подробнее ознакомиться с таким подходом к изучению фуксовых или каких-либо других групп, я бы рекомендовал вступительную лекцию Вальтера Дика, прочитанную в Лейпцигском университете, в которой автор, следуя аналогичному способу представления, сумел продемонстрировать его многочисленные достоинства.

О ФУКСОВЫХ ФУНКЦИЯХ*

І. Тэта-фуксовы ряды

В предыдущем мемуаре ** я показал, каким образом из подстановок вида

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) \quad (1)$$

с помощью подходящего выбора коэффициентов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ можно построить дискретные группы, подстановки которых будут оставлять инвариантной некоторую окружность, названную мной *фундаментальной окружностью*. Впредь я всегда буду предполагать, что центр фундаментальной окружности находится в начале координат, а радиус равен 1, так что ее уравнение можно записать в виде

$$\text{mod } z = 1.$$

Рассмотрим одну из таких дискретных групп, называемых *фуксовыми группами*, и обозначим ее G . Этой группе отвечает разбиение фундаментального круга (так мы будем называть круг, границей которого является фундаментальная окружность) на бесконечное множество конгруэнтных нормальных многоугольников R .

Требуется доказать, что всегда существует некоторая система однозначных функций от z , остающихся неизменными под действием подстановок группы G . Такие функции я буду называть *фуксовыми*.

Для этого рассмотрим подстановки группы G , содержащиеся в формуле (1). Так же, как в разделе III цитированного выше мемуара, введем сокращенное обозначение:

$$\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} = f_i(z).$$

Образуем ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \text{mod} \left[\frac{df_i(z)}{dz} \right]^m, \quad (2)$$

где m — целое положительное число, большее 1.

* Acta mathematica, 1882, 1, 193—294. Окончена 23 октября 1882 г., опубликована 29 ноября 1882 г.

** Théorie des groupes fuchsienues. — Acta math., 1882, 1, 1—62.

Вводя последовательно различные гипотезы, покажем, что этот ряд сходится.

1. Пусть сначала точка z лежит внутри фундаментального круга. Тогда она расположена внутри одного из многоугольников R , например внутри многоугольника R_h , отвечающего подстановке группы G с индексом h , которая имеет вид

$$[z, f_h(z)].$$

Пусть

$$f_k(z) = f_i[f_h(z)].$$

Подстановка

$$[z, f_k(z)]$$

принадлежит группе G и отвечает некоторому многоугольнику R_k . Поскольку z , по предположению, находится внутри R_h , $f_i(z)$ лежит внутри R_k .

Опишем вокруг z очень маленький замкнутый контур C_0 , расположенный целиком внутри R_h . Образом C_0 при подстановке $[z, f_i(z)]$ будет некоторый также очень маленький контур C_i , содержащий внутри себя точку $f_i(z)$ и расположенный целиком внутри R_k .

Для того чтобы установить сходимость ряда (2), докажем несколько лемм.

Лемма I. Сумма площадей, ограниченных всеми контурами C_i , равна некоторой конечной величине S .

Действительно, все контуры C_i (их бесконечно много) лежат внутри фундаментального круга и не имеют общих частей, поскольку каждый из них расположен внутри одного из многоугольников R . Поэтому сумма ограничиваемых ими площадей меньше площади фундаментального круга. Следовательно, эта сумма конечна, что и требовалось доказать.

Лемма II. Отношение наибольшего значения модуля производной df_i/dz к наименьшему при z , не выходящем из контура C_0 , ограничено сверху некоторой величиной K , не зависящей от i .

Действительно,

$$\frac{df_i}{dz} = \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2}.$$

Поэтому модуль df_i/dz равен величине $1/\text{mod } \gamma_i^2$, деленной на квадрат расстояния между точками z и $-\delta_i/\gamma_i$. Точки $-\delta_i/\gamma_i$ являются образами точки ∞ , так же, как и сама точка ∞ , лежат вне фундаментального круга и могут подходить бесконечно близко друг к другу лишь вблизи этой окружности. Пусть M_i и m_i — наибольшее и наименьшее значения, которые может принимать модуль df_i/dz , когда z находится внутри C_0 , a и b — наибольшее и наименьшее расстояние от точки $-\delta_i/\gamma_i$ до контура C_0 . Очевидно, что

$$\frac{M_i}{m_i} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Но все точки $-\delta_i/\gamma_i$ лежат вне фундаментального круга. Пусть A и B — наибольшее и наименьшее расстояние от начала координат, где находится центр фундаментального круга, до контура C_0 . Оба этих расстояния меньше 1, поскольку C_0 лежит целиком внутри фундаментального круга. Следовательно,

$$a < 1 + A^*, \quad b > 1 - B,$$

откуда

$$\frac{M_i}{m_i} < \left(\frac{1+A}{1-B} \right)^2.$$

Кроме того, $\left(\frac{1+A}{1-B} \right)^2 = K$ не зависит от i , что и требовалось доказать.

Лемма III. При любом i справедливо неравенство

$$M_i^2 < K^2 \frac{C_i}{C_0}.$$

Действительно, пусть $z = x + iy$. Тогда площадь той части плоскости, которая ограничена контуром C_0 , будет определяться выражением

$$C_0 = \iint dx dy,$$

а площадь той части плоскости, которая ограничена контуром C_i , выражением

$$C_i = \iint \left(\operatorname{mod} \frac{df_i}{dz} \right)^2 dx dy,$$

причем оба двойных интеграла берутся по внутренности контура C_0 .

* Это неравенство, вообще говоря, не выполняется, но если предположить, что C_0 — окружность (такое предположение вполне допустимо), то $b > 1 - A$ и

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{a-b}{b} = 1 + \frac{A-B}{b} < 1 + \frac{A-B}{1-A} = \frac{1-B}{1-A},$$

откуда

$$\frac{M_i}{m_i} < \left(\frac{1-B}{1-A} \right)^2 = K.$$

Если C_0 — маленький контур произвольной формы, то можно рассуждать следующим образом. Различные образы точки ∞ находятся на конечном расстоянии от начала координат. Можно считать, что все они находятся внутри некоторой окружности радиуса R с центром в начале координат. Тогда

$$a < B + A, \quad b > 1 - A,$$

откуда

$$\frac{M_i}{m_i} < \left(\frac{B+A}{1-A} \right)^2 = K,$$

причем K не зависит от i (Н. Е. Н.).

Отсюда следует, что

$$C_i > \iint m_i^2 dx dy = m_i^2 C_0,$$

или

$$C_i > \frac{M_i^2}{K^2} C_0,$$

или, наконец,

$$M_i^2 < K^2 \frac{C_i}{C_0},$$

что и требовалось доказать.

Теперь уже легко доказать сходимость ряда (2). В самом деле, пусть сначала $m = 2$. Требуется рассмотреть ряд

$$\sum \operatorname{mod} \left(\frac{df_i}{dz} \right)^2 = \sum \operatorname{mod} (\gamma_i z + \delta_i)^{-4}. \quad (2)$$

Но мы уже получили неравенство

$$\operatorname{mod} \left(\frac{df_i}{dz} \right)^2 \leq M_i^2 < \frac{K^2}{C_0} C_i.$$

Следовательно, члены ряда (2) меньше константы K^2/C_0 , умноженной на соответствующий член ряда $\sum C_i$, сумма которого, по лемме I, конечна и равна некоторой величине S . Поэтому ряд (2) также имеет конечную сумму S . Но тогда при любом i подавно справедлива оценка

$$\operatorname{mod} \frac{df_i}{dz} < \sqrt{S}.$$

Отсюда, полагая $m > 2$, получаем

$$\left(\operatorname{mod} \frac{df_i}{dz} \right)^m < \left(\operatorname{mod} \frac{df_i}{dz} \right)^2 S^{\frac{m-2}{2}}.$$

Это означает, что каждый член ряда $\sum \left(\operatorname{mod} \frac{df_i}{dz} \right)^m$ меньше константы $S^{\frac{m-2}{2}}$, умноженной на соответствующий член ряда $\sum \left(\operatorname{mod} \frac{df_i}{dz} \right)^2$, который сходится.

Таким образом, сходимость ряда (2) доказана, и при этом речь идет не об асимптотической, а об абсолютной сходимости, поскольку все члены ряда положительны.

2. Предположим теперь, что z находится вне фундаментальной окружности.

Если точка z совпадает с одной из точек $-\delta_i/\gamma_i$, то один из членов ряда обращается в бесконечность, и сходимость невозможна. Будем предполагать поэтому, что точка z не совпадает ни с одной из точек $-\delta_i/\gamma_i$. Я утверждаю, что ряд (2) в этом случае также сходится.

Действительно, рассмотрим какую-нибудь другую точку z_1 , лежащую внутри фундаментального круга. Как мы только что видели, ряд

$$\sum \operatorname{mod} \left[\frac{df_i(z_1)}{dz_1} \right]^m = \sum \operatorname{mod} (\gamma_i z_1 + \delta_i)^{-2m} \quad (2a)$$

сходится. Я утверждаю, что ряд

$$\sum \operatorname{mod} \left(\frac{df_i}{dz} \right)^m = \sum \operatorname{mod} (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} \quad (2)$$

также сходится. В самом деле, можно найти верхний предел R величины $\operatorname{mod} (z_1 + \delta_i/\gamma_i)$ и нижний предел r — для $(z + \delta_i/\gamma_i)$. Поскольку модуль $-\delta_i/\gamma_i$ конечен и ограничен, точки $-\delta_i/\gamma_i$ не могут подходить бесконечно близко к точке z . Поэтому

$$\frac{\operatorname{mod} (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}}{\operatorname{mod} (\gamma_i z_1 + \delta_i)^{-2m}} < \frac{R^{2m}}{r^{2m}}.$$

Таким образом, каждый член ряда (2) меньше константы $(R/r)^{2m}$, умноженной на соответствующий член сходящегося ряда (2a). Следовательно, ряд (2) сходится и в этом случае.

3. Пусть теперь точка z лежит на фундаментальной окружности. Предыдущее доказательство останется в силе лишь при условии, если точка z не будет неограниченно приближаться ни к одной из точек $-\delta_i/\gamma_i$. Именно так и происходит, когда z лежит на одной из сторон второго рода какого-нибудь многоугольника R . В этом случае ряд (2) также сходится. В противном случае члены ряда (2) неограниченно возрастают, и сходимость нарушается.

Точки фундаментальной окружности делятся на два класса: одни лежат на стороне второго рода одного из многоугольников R , другие, не удовлетворяющие этому условию, называются *существенно особыми точками группы G* . Поэтому условия сходимости ряда (2) можно сформулировать так: *точка z не должна совпадать ни с точками $-\delta_i/\gamma_i$, ни с существенно особыми точками группы G* .

Ряд (2) определяет некоторую функцию от z , но эта функция, как нетрудно видеть из структуры этого ряда, не аналитична. Сумма ряда (2) зависит, помимо прочего, от группы G . Если предположить, что коэффициенты образующих подстановок этой группы являются функциями некоторого параметра t , то сумма ряда (2) также будет функцией от t .

Чтобы яснее изложить свою мысль, мне потребуется сделать небольшое отступление. Вернемся еще раз к разделу XI мемуара о фуксовых группах, носящему название «Эффективное построение фуксовых групп», и рассмотрим приведенный там пример 1. В этом примере речь идет о построении фуксовых групп третьего семейства, порожденных нормальным многоугольником с $2n$ сторонами первого рода и с $2n$ сторонами второго рода. Мы видели, что коэффициенты n образующих подстановок этих групп удовлетворяют лишь некоторым неравенствам. Следовательно, их можно пред-

ставить в виде рациональных функций, зависящих от $3n$ произвольных параметров

$$u_1, u_2, \dots, u_{3n},$$

которые должны быть вещественными и удовлетворять определенным неравенствам. Это означает, что коэффициенты всех подстановок группы так же, как и коэффициенты ее образующих подстановок, являются рациональными функциями параметров u . Кроме того, очевидно, что все группы, которые получаются, если придавать параметрам u различные значения, изоморфны.

Сказанное можно распространить и на более общий случай. Здесь уместно ввести новое определение, которое понадобится нам в дальнейшем и упростит формулировку последующих результатов. Рассмотрим два нормальных многоугольника R_0 и R'_0 . Запишем их в системе обозначений, принятой в разделе VII упоминавшегося выше мемуара. Число циклов каждой категории в R_0 и R'_0 одинаково, и циклы этих многоугольников, принадлежащие к одной и той же категории, находятся во взаимно однозначном соответствии. Предположим также, что сумма углов в R_0 , принадлежащих одному и тому же циклу первой категории, совпадает с суммой углов, принадлежащих соответствующему ему циклу в R'_0 . Если эти условия выполнены, будем говорить, что два многоугольника, так же, как и две порожденные ими группы, принадлежат к одному *классу*. Ясно, что при этом группы изоморфны.

Итак, рассмотрим бесконечное множество групп, принадлежащих к одному и тому же классу C и порожденных n образующими подстановками. Выберем любые n подстановок и попытаемся установить, могут ли они быть образующими подстановками дискретной группы, принадлежащей к классу C . В общем случае мы обнаружим, что коэффициенты выбранных подстановок должны удовлетворять некоторым равенствам и каким-то условиям типа неравенств. Следовательно, эти коэффициенты можно представить в виде рациональных функций от p произвольных параметров

$$u_1, u_2, \dots, u_p.$$

Параметры u должны быть вещественными и удовлетворять некоторым неравенствам. Единственное отличие от примера I (раздел VII) заключается в том, что p , вообще говоря, определяется условием

$$p < 3n$$

вместо прежнего $p = 3n$.

Две группы, принадлежащие к одному и тому же классу, в общем случае принадлежат к одному и тому же семейству, но бывают и исключения. Так, можно указать уже приводившийся выше пример I (раздел XI). Рассмотренные в нем группы, вообще говоря, относятся к третьему семейству, но в некоторых предельных случаях могут вырождаться в группы второго и четвертого семейства. Поэтому можно считать, что группы вто-

рого и четвертого семейства принадлежат к одному классу, образованному группами третьего семейства, которые лишь при некоторых частных значениях параметров u вырождаются в группы второго и четвертого семейства. Точно так же можно считать, что группы шестого и седьмого семейства принадлежат к одному классу, образованному группами пятого семейства. Последние лишь при некоторых частных значениях параметров u вырождаются в группы шестого и седьмого семейства. Этим замечанием мы воспользуемся в дальнейшем.

Итак, существуют классы изоморфных друг другу фуксовых групп. Коэффициенты подстановок, входящих в эти группы, являются рациональными функциями вещественных параметров u , удовлетворяющих некоторым неравенствам. Если ряд (2) построен с помощью различных групп, входящих в один и тот же класс, то его сумма будет, очевидно, функцией параметров u . Я утверждаю, что сумма ряда (2) как функция этих параметров *непрерывна*.

Каждый член ряда (2), будучи рациональной функцией от u , очевидно, непрерывен по u , однако этого недостаточно для того, чтобы сумма ряда также была непрерывной. В самом деле, если члены сходящегося ряда

$$S(x) = F_1(x) + F_2(x) + \dots + F_n(x) + \dots$$

— непрерывные функции от x , то сумма $S(x)$ такого ряда тем не менее может быть разрывной функцией x . Введем поэтому еще одну дополнительную гипотезу: будем считать, что при

$$x_1 \geq x \geq x_0 \tag{3}$$

справедливо неравенство

$$\text{mod } F_n(x) < C_n$$

и что ряд

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n + \dots$$

сходится. Известно, что при выполнении этих условий $S(x)$ как функция от x непрерывна. Этот результат нетрудно обобщить на случай многих переменных. Таким образом, для доказательства непрерывной зависимости суммы ряда (2) от u достаточно установить существование бесконечной последовательности положительных чисел A_i (не зависящих от u), таких, что ряд $\sum A_i$ сходится, а неравенство

$$\left(\text{mod } \frac{df_i}{dz} \right)^m < A_i$$

выполняется при любых u , лишь бы эти параметры были заключены в определенных пределах и могли принимать значения, сколь угодно близкие к тем, при которых требуется доказать непрерывность суммы ряда (2).

Для доказательства непрерывности воспользуемся некоторыми соображениями, которые одновременно позволят дать новое доказательство сходимости рассматриваемого нами ряда. Ввиду важности этого результата

новое доказательство следует считать небесполезным. Напомним некоторые определения, данные в разделе II мемуара о фуксовых группах. В этом разделе мы называли *конгруэнтными фигурами* такие фигуры, которые переходят друг в друга под действием линейной подстановки с вещественными коэффициентами. Введя затем обозначение

$$z = x + y\sqrt{-1},$$

мы называли неевклидовой длиной L некоторой дуги интеграл

$$\int \frac{\operatorname{mod} dz}{y},$$

взятый по этой дуге, и неевклидовой площадью S некоторой плоской фигуры — интеграл

$$\iint \frac{dx dy}{y^2},$$

взятый по ограниченной ею части плоскости.

Величина L для дуги и S для плоской фигуры инвариантны, т. е. две конгруэнтные дуги имеют одинаковые L , а две конгруэнтные плоские фигуры обладают одинаковыми S .

Затем в разделе XII мемуара о фуксовых группах мы рассмотрели группы подстановок, которые уже не должны были быть вещественными, но сохраняли некоторую *фундаментальную окружность*. Обобщая вполне естественно введенные нами определения, мы называли *конгруэнтными* две фигуры, которые переходят друг в друга под действием линейной подстановки, сохраняющей фундаментальную окружность. Для дуг и плоских фигур в этом случае также существуют два инварианта, аналогичные тем, которые встретились нам при рассмотрении вещественных подстановок. Их мы также называли L и S (в обобщенном смысле). Например, в нашем примере центр окружности находится в начале координат, а ее радиус равен единице. Положим

$$z = \rho e^{i\omega}$$

и назовем величиной L какой-нибудь дуги взятый вдоль нее интеграл

$$\int \frac{\operatorname{mod} dz}{1 - \rho^2},$$

а величиной S плоской фигуры — интеграл

$$\iint \frac{\rho d\rho d\omega}{(1 - \rho^2)^2},$$

взятый по ее внутренности. Нетрудно проверить, что две конгруэнтные дуги имеют одинаковые L , а любые две конгруэнтные плоские фигуры — одинаковые S .

Рассмотрим окружность радиуса ρ с центром в начале координат. В этом случае

$$S = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^\rho \frac{\rho d\rho}{(1 - \rho^2)^2} = \frac{\pi \rho^2}{1 - \rho^2}.$$

Величина L для радиуса окружности будет

$$R = \int_0^\rho \frac{d\rho}{1 - \rho^2} = \frac{1}{\rho} \ln \frac{1 + \rho}{1 - \rho}.$$

Эту величину мы будем называть радиусом R нашей окружности; S и ρ как функции R определяются выражениями

$$\rho = \frac{e^{2R} - 1}{e^{2R} + 1},$$

$$S = \frac{\pi}{4} (e^{2R} + e^{-2R} - 2).$$

Перейдем теперь к доказательству сходимости ряда (2) и предположим для простоты, что точка z лежит внутри фундаментального круга. Проводимое нами доказательство без труда распространяется на общий случай.

Опишем вокруг z контур C_0 , выбрав его достаточно малым для того, чтобы он был полностью расположен внутри одного из многоугольников R , например, внутри многоугольника R_k . Варьируя параметры u в установленных нами пределах, мы тем самым будем как-то изменять многоугольники R , однако всегда можно предположить, что контур C_0 достаточно мал и неизменно остается внутри R_k . Рассмотрим теперь различные образы точки z , т. е. различные точки $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$. Каждая из них лежит внутри малого контура C_i , расположенного целиком внутри некоторого многоугольника R_k . При этом все контуры C_i конгруэнтны между собой и расположены один вне другого.

Неевклидову длину S контура C_0 , одинаковую для всех C_i , обозначим σ . Если теперь мы рассмотрим различные окружности, ортогонально пересекающиеся с фундаментальной окружностью, то их дуги, отсекаемые контурами C_i , будут ограничены сверху некоторой величиной, которую мы обозначим λ .

Докажем теперь несколько лемм.

Лемма IV. Рассмотрим образы точки z , т. е. точки

$$\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i},$$

лежащие внутри окружности C' радиуса

$$\rho' = \frac{e^{2R'} - 1}{e^{2R'} + 1}$$

с центром в начале координат. Число этих точек меньше

$$\frac{\pi}{4\sigma} (e^{2(R'+\lambda)} + e^{-2(R'+\lambda)} - 2).$$

Действительно, пусть число образов точки z равно N .

Если точка $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ лежит внутри окружности C' , то соответствующий контур C_i , очевидно, располагается целиком внутри окружности C'' с центром в начале координат и радиусом R , на λ большим радиуса окружности C' (иначе говоря, $R = R' + \lambda$).

Следовательно, внутри окружности C'' имеется по крайней мере N контуров C_i ; их полная неевклидова площадь S равна $N\sigma$.

Но неевклидова площадь S окружности C'' равна

$$\frac{\pi}{4} (e^{2(R'+\lambda)} + e^{-2(R'+\lambda)} - 2),$$

поэтому

$$N < \frac{\pi}{4\sigma} (e^{2(R'+\lambda)} + e^{-2(R'+\lambda)} - 2),$$

что и требовалось доказать.

Лемма V. Для любых i справедливо тождество

$$\text{mod} \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2} = \frac{1 - \text{mod} \left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right)^2}{1 - \text{mod} z^2}.$$

Действительно, рассмотрим бесконечно малый контур C_0 , описанный вокруг точки z , и его образ C_i при подстановке

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right).$$

Пусть ω_0 и ω_i — площади тех частей плоскости, которые ограничены этими контурами. Тогда

$$\frac{\omega_i}{\omega_0} = \text{mod} \left[\frac{d \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}}{dz} \right]^2 = \text{mod} \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2}.$$

Неевклидовы площади S тех же фигур ω_0 и ω_i равны:

$$\iint \frac{dx dy}{(1 - \text{mod} z^2)^2} = \frac{\omega_0}{(1 - \text{mod} z^2)^2},$$

$$\iint \frac{dx dy}{\left[1 - \text{mod} \left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right)^2 \right]^2} = \frac{\omega_i}{\left[1 - \text{mod} \left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right)^2 \right]^2}.$$

Но эти фигуры конгруэнтны и имеют одинаковые S , следовательно,

$$\frac{\omega_i}{\omega_0} = \left[\frac{1 - \operatorname{mod} \left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right)^2}{1 - \operatorname{mod} z^2} \right]^2,$$

откуда

$$\operatorname{mod} \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2} = \frac{1 - \operatorname{mod} \left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right)^2}{1 - \operatorname{mod} z^2},$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим две окружности с центром в начале координат, одна из которых проходит через точку z , а другая — через точку $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$.

Пусть неевклидов радиус R первой окружности равен A , а R второй окружности равен R' . Тогда

$$\operatorname{mod} z = \frac{e^{2A} - 1}{e^{2A} + 1}, \quad \operatorname{mod} \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} = \frac{e^{2R'} - 1}{e^{2R'} + 1},$$

и, наконец,

$$\operatorname{mod} \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2} = \frac{e^{2A} + e^{-2A} + 2}{e^{2R'} + e^{-2R'} + 2}.$$

Теорема. Ряд (2) сходится.

В самом деле, проведем бесконечно много окружностей с общим центром в начале координат и радиусами R , образующими арифметическую прогрессию. Обозначим эти окружности $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$; пусть радиус R окружности K_n равен nr .

Ряд (2) запишем в следующем виде:

$$\Sigma = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots \quad (2\text{bis})$$

Член U_n ряда (2bis) получается, если сгруппировать все члены ряда (2), отвечающие точкам $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$, заключенным внутри круглого кольца, ограниченного окружностями K_{n-1} и K_n .

Поскольку члены ряда (2) положительны, такая группировка законна, и сходимость ряда (2bis) влечет за собой сходимость ряда (2).

Число членов ряда (2), сгруппированных в U_n , в силу леммы IV, меньше

$$\frac{\pi}{4\sigma} (e^{2(nr+\lambda)} + e^{-2(nr+\lambda)} - 2) < \frac{\pi}{4\sigma} e^{2(nr+\lambda)}.$$

В силу леммы V, каждый из этих членов меньше

$$\left(\frac{e^{2A} + e^{-2A} + 2}{e^{2(nr+\lambda)} + e^{-2(nr+\lambda)} + 2} \right)^m < \left(\frac{e^{2A} + e^{-2A} + 2}{e^{2(nr+\lambda)}} \right)^m.$$

Следовательно,

$$U_n < \frac{\pi}{4\sigma} (e^{2A} + e^{-2A} + 2)^m e^{2\lambda+2mr} e^{-2n(m-1)r}.$$

Пусть

$$\frac{\pi}{4\sigma} (e^{2A} + e^{-2A} + 2)^m e^{2\lambda+2mr} = K,$$

тогда

$$U_n < \frac{K}{e^{2n(m-1)r}}. \quad (4)$$

Постоянная K не зависит от n . Поскольку $m > 1$, правая часть неравенства (4) представляет собой n -й член убывающей геометрической прогрессии. Итак, ряд (2 bis), а следовательно, и ряд (2) сходится, что и требовалось доказать.

Посмотрим, какую ошибку мы совершим, если оборвем ряд (2) на членах, отвечающих точкам $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$, расположенным внутри окружности с центром в начале координат и $R = (n-1)r$. Сумма членов, которыми мы пренебрегаем, равна

$$U_n + U_{n+1} + \dots$$

и, следовательно, меньше, чем

$$\frac{K e^{2n(1-m)r}}{1 - e^{2r(1-m)}}.$$

Теорема. Сумма Σ ряда (2) есть непрерывная функция параметров u . Действительно, пусть Σ — значение суммы ряда (2) при некоторых значениях

$$u_1, u_2, \dots, u_p$$

параметров u , а $\Sigma + \Delta\Sigma$ — значение той же суммы для значений

$$u_1 + \Delta u_1, u_2 + \Delta u_2, \dots, u_p + \Delta u_p$$

параметров, близких к исходным. Я утверждаю, что приращения Δu можно выбрать достаточно малыми для того, чтобы

$$|\Delta\Sigma| < \varepsilon,$$

где ε — любая наперед заданная величина.

Пусть Σ_0 — сумма $(n-1)$ первых членов ряда (2bis):

$$\Sigma_0 = U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}.$$

Обозначим через Σ_1 сумму остальных членов ряда

$$\Sigma_1 = U_n + U_{n+1} + \dots$$

Тогда

$$\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1.$$

Пусть точно так же $\Sigma_0 + \Delta \Sigma_0$, $\Sigma_1 + \Delta \Sigma_1$ означают суммы соответствующих членов ряда $\Sigma + \Delta \Sigma$:

$$\Sigma + \Delta \Sigma = (\Sigma_0 + \Delta \Sigma_0) + (\Sigma_1 + \Delta \Sigma_1).$$

Имеем

$$\Sigma_1 < \frac{K e^{2n(1-m)r}}{1 - e^{2r(1-m)}}, \quad \Sigma_1 + \Delta \Sigma_1 < \frac{K e^{2n(1-m)r}}{1 - e^{2r(1-m)}}.$$

Следовательно, выбирая n достаточно большим, можно прийти к неравенствам

$$\Sigma_1 < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \Sigma_1 + \Delta \Sigma_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Но коль скоро n выбрано, Σ_0 будет непрерывной функцией параметров u . Следовательно, при достаточно малых Δu

$$|\Delta \Sigma_0| < \frac{\varepsilon}{3}$$

и, таким образом,

$$|\Delta \Sigma| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь ряд

$$\Theta(z) = \sum H \left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right) (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} \quad (5)$$

и предположим, что:

1) $H(z)$ означает рациональную функцию от z , не обращающуюся в бесконечность на фундаментальной окружности, а в остальном произвольную;

2) m — целое число, большее 1 [1].

Функция $H(z)$ обращается в бесконечность в конечном числе точек

$$a_1, a_2, \dots, a_p.$$

Если z совпадает с одной из точек

$$\frac{\alpha_i a_k + \beta_i}{\gamma_i a_k + \delta_i},$$

то один из членов ряда (5) обращается в бесконечность, и, следовательно, ряд (5) в этом случае не может сходиться.

Наоборот, предположим, что z не совпадает ни с одной из указанных выше точек. Тогда при любом i можно найти положительное число M , такое, что

$$\text{mod } H \left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right) < M.$$

Число M можно даже выбрать достаточно большим, чтобы это неравенство выполнялось при любых значениях параметров u , заключенных в некоторых пределах.

Я утверждаю, что ряд $\Theta(z)$, который я назову *тэта-фуксовым рядом*, сходится. В самом деле, справедливо неравенство

$$\operatorname{mod} \left[H \left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right) (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} \right] < M \operatorname{mod} (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}.$$

Отсюда следует, что модуль каждого члена ряда (5) меньше соответствующего члена сходящегося ряда с положительными членами. Это и означает, что ряд (5) сходится и его сумма не зависит от порядка его членов.

Кроме того, доказано, что сумма ряда (2) так же, как и сумма ряда (5), является *непрерывной* функцией параметров u .

II. Классификация и общие свойства

Итак, ряд (5) сходится всюду, за исключением особых точек. При этих условиях он определяет некоторую голоморфную функцию $\Theta(z)$. Функция $\Theta(z)$ однозначна, но перестает быть голоморфной в особых точках — там, где перестает сходиться ряд (5).

Таковыми особыми точками служат:

1. Точки

$$\frac{\alpha_i a_k + \beta_i}{\gamma_i a_k + \delta_i},$$

т. е. образы точек, в которых обращается в бесконечность $H(z)$; эти точки являются полюсами, в окрестности которых $\Theta(z)$ мероморфна.

2. Точки $-\delta_i/\gamma_i$, т. е. образы точки ∞ ; эти точки также являются полюсами, в окрестности которых $\Theta(z)$ мероморфна.

Оба эти факта доказываются, если заметить, что в окрестности указанных точек один из членов ряда (5) должен обращаться в бесконечность, а ряд, остающийся после вычеркивания этого члена, сходится.

3. Наконец, особые точки $\Theta(z)$ расположены в существенно особых точках группы G , т. е. в точках фундаментальной окружности, не принадлежащих стороне второго рода и одного из многоугольников R . Для функции $\Theta(z)$ эти точки являются существенно особыми.

Перечислим теперь основные свойства $\Theta(z)$. Рассмотрим какую-нибудь подстановку группы G , например

$$\left(z, \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k} \right), \quad (6)$$

и попытаемся найти соотношение, существующее между

$$\Theta \left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k} \right) \quad \text{и} \quad \Theta(z).$$

Множество подстановок

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right),$$

образующих группу, которой принадлежит подстановка (6), совпадает с множеством подстановок

$$\left[z, \frac{\alpha_i \left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k} \right) + \beta_i}{\gamma_i \left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k} \right) + \delta_i} \right] = \{ z, f_i[f_k(z)] \}$$

(для краткости мы ввели обозначения

$$\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} = f_i(z), \quad \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k} = f_k(z)).$$

Функцию $\Theta(z)$ можно записать тогда в виде

$$\Theta(z) = \sum H \{ f_i[f_k(z)] \} \left\{ \frac{d \{ f_i[f_k(z)] \}}{dz} \right\}^m,$$

или

$$\Theta(z) = \sum H \{ f_i[f_k(z)] \} \left[\frac{df_i(f_k)}{df_k} \right]^m \left(\frac{df_k}{dz} \right)^m.$$

Кроме того,

$$\Theta(f_k) = \sum H [f_i(f_k)] \left[\frac{df_i(f_k)}{df_k} \right]^m.$$

Следовательно,

$$\Theta(f_k) = \Theta(z) \left(\frac{df_k}{dz} \right)^{-m},$$

или

$$\Theta \left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k} \right) = \Theta(z) (\gamma_k z + \delta_k)^{2m}. \quad (7)$$

Назовем *тэта-фуксовой* любую однозначную функцию от z , обладающую свойством (7) [2]. Тэта-фуксовы функции мы будем классифицировать так же, как и фуксовы группы — по свойствам соответствующего нормального многоугольника R_0 [3].

Известно, что многоугольники R_0 можно разбить на семь семейств и что первое, второе, четвертое, шестое и седьмое семейства подразделяются на два типа. Однако всякая группа второго типа, принадлежащая ко второму, четвертому, шестому или седьмому семейству, совпадает либо с некоторой группой третьего или пятого семейства, либо с группой первого типа, принадлежащей к шестому или седьмому семейству (см. разделы IX и XI мемуара о фуксовых группах) [4].

Следовательно, мы всегда можем считать, что группа G не принадлежит ко второму типу второго, четвертого, шестого или седьмого семейства.

Зная это, я буду говорить, что функция $\Theta(z)$ принадлежит к первому, третьему и пятому семейству, если группа G принадлежит к одному из этих семейств, и говорить, что функция $\Theta(z)$ принадлежит ко второму, четвертому, шестому или седьмому семейству, если группа G принадлежит к первому типу этих семейств.

Точно так же я буду говорить, что тэта-функция имеет род p , если его имеет соответствующая группа G .

На тэта-фуксовы функции можно распространить и ту классификацию фуксовых групп (разбиение их на классы), о которой говорилось в предыдущем разделе.

Рассмотрим сначала функции первого, второго и шестого семейства. Соответствующие многоугольники R не имеют сторон второго рода, вследствие чего все точки фундаментальной окружности являются существенно особыми. Таким образом, кривая, все точки которой существенно особые, делит плоскость на две части: внутренность и внешность фундаментального круга. В соответствии с принципами современной теории функций, развитыми в работах Вейерштрасса, заключаем, что разложение (5) задает две различные функции в зависимости от того, где лежит точка z : внутри фундаментального круга или вне его. Первая из этих функций существует лишь внутри круга и допускает в качестве лакунарного пространства любую часть плоскости, расположенную вне этой окружности; вторая же, наоборот, существует лишь вне фундаментального круга. Ниже мы будем рассматривать лишь первую из функций, поскольку вторую функцию, т. е. ту из них, которая существует лишь вне фундаментального круга, подстановкой $1/z$ вместо z нетрудно перевести в тэта-фуксову функцию, существующую лишь внутри фундаментального круга.

Итак, рассмотрим тэта-фуксову функцию, существующую лишь внутри фундаментального круга и определяемую рядом (5). Можно сделать два различных предположения.

Можно предположить, что одна или несколько точек, в которых $H(z)$ обращается в бесконечность, лежит внутри фундаментального круга. Тогда функция $\Theta(z)$ также обращается в бесконечность (за исключением некоторых особых случаев, когда несколько ее особенностей взаимно уничтожаются), и мы говорим, что она *первого типа*. В этом случае сумма ряда (5) заведомо не равна тождественно нулю, поскольку может неограниченно возрастать.

Наоборот, можно предположить, что все точки, в которых $H(z)$ обращается в бесконечность, лежат вне фундаментального круга. Тогда функция $\Theta(z)$ не будет обращаться в бесконечность, и мы будем называть ее функцией *второго типа*. При этом $\Theta(z)$ допускает разложение в ряд, расположенный по возрастающим степеням z , сходящийся, когда z остается внутри фундаментального круга, т. е. когда существует функция $\Theta(z)$.

Если $\Theta(z)$ — функция второго типа, то ничто не мешает сумме ряда (5) быть тождественно равной нулю. Ниже мы докажем, что все функции $\Theta(z)$ *второго типа* линейно выражаются через конечное число таких функций.

Перейдем теперь к функциям третьего, четвертого, пятого и седьмого семейства. Им отвечают многоугольники R , имеющие стороны второго рода, вследствие чего уже не все точки фундаментальной окружности будут существенно особыми. Вместо кривой, заполненной существенно особыми точками, в этом случае имеется бесконечно много изолированных особых точек [5]. Отсюда следует, что ряд (5) представляет не две различные функции в зависимости от того, лежит ли точка z внутри или вне фундаментального круга, а лишь одну трансцендентную функцию, которая голоморфна всюду, за исключением некоторых изолированных точек. Итак, $\Theta(z)$ представляет собой в этом случае однозначную трансцендентную функцию, существующую на всем протяжении плоскости и имеющую бесконечно много существенно особых точек.

Можно поставить вопрос о том, какое место она занимает в классификации подобных функций, произведенной Миттаг-Леффлером в его сообщении от 3 апреля 1882 года в «Comptes rendus de l'Academie des Sciences de Paris».

Поскольку число существенно особых точек бесконечно, они располагаются сколь угодно близко друг от друга в окрестностях некоторых особых точек второго рода. Последние же, поскольку их также бесконечно много, могут неограниченно сближаться друг с другом в окрестностях некоторых особых точек третьего рода, и т. д.

Я утверждаю, что этот процесс нигде не обрывается, и мы таким образом получаем бесконечно много особых точек всех родов. В самом деле, если у нас имеется бесконечно много особых точек $(n-1)$ -го рода, то должна быть по крайней мере одна точка n -го рода. Но коль скоро у нас имеется одна такая точка, мы сразу же получаем бесконечно много их, поскольку все ее образы при подстановках группы G также должны быть особыми точками n -го рода, что и требовалось доказать.

Итак, наша функция оказывается одной из тех функций, которые Миттаг-Леффлер называл функциями *второго рода*.

На первый взгляд кажется, что все такие функции могут обращаться в бесконечность, поскольку они существуют на всей плоскости и должны иметь полюсы в точках, служащих полюсами рациональной функции $H(z)$ (последняя же должна обращаться в бесконечность в некоторых точках плоскости). Однако может случиться, что несколько особенностей функции $\Theta(z)$ взаимно уничтожатся. Тогда так же, как и в предыдущем случае, можно будет построить тэта-функции второго типа (см. пример в разделе VIII).

Среди особых точек тэта-фуксовых функций имеются такие, которые должны привлечь наше особое внимание: вершины многоугольников R , относящиеся ко второй категории и образующие цикл третьего подвида (см. раздел V мемуара о фуксовых группах).

Пусть α — такая вершина. Среди подстановок группы G найдется параболическая подстановка вида

$$\left(\frac{1}{z - \alpha}, \frac{1}{z - \alpha} + \beta \right).$$

Именно так мы определяли циклы третьего подвида.

Пусть

$$\frac{2i\pi}{\beta} \frac{1}{z - \alpha} = t, \quad \frac{2i\pi}{\beta} \frac{1}{f_i(z) - \alpha} = \varphi_i(t).$$

Символ $f_i(z)$ будем понимать в прежнем смысле, т. е.

$$f_i(z) = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}.$$

Величину H_1 определим следующим образом:

$$H_1(t) = H\left(\alpha + \frac{2i\pi}{\beta t}\right) \left(\frac{-2i\pi}{\beta t^2}\right)^m.$$

Ясно, что H_1 есть некоторая рациональная функция. Справедливо тождество

$$\Theta(z) = \sum H[f_i(z)] \left[\frac{df_i(z)}{dz_i} \right]^m = \sum H_1[\varphi_i(t)] \left[\frac{d\varphi_i(t)}{dt} \right]^m \left(\frac{dt}{dz} \right)^m.$$

Но ряд $\Theta(z)$ сходится абсолютно, и члены его можно располагать в любом порядке. Мы упорядочим их следующим образом.

Среди функций $\varphi_i(t)$ выберем бесконечную последовательность

$$\vartheta_0(t) = t, \vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \dots$$

так, чтобы любую функцию $\varphi_i(t)$ можно было одним и только одним способом представить в виде

$$\varphi_i(t) = \vartheta_k(t + 2hi\pi),$$

где h — целое (положительное или отрицательное) число. Тогда $\Theta(z)$ можно записать так:

$$\Theta(z) = \left(\frac{dt}{dz} \right)^m \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} H_1[\vartheta_k(t + 2hi\pi)] \left[\frac{d\vartheta_k(t + 2hi\pi)}{dt} \right]^m.$$

Введем новую функцию $H'_k(t)$, определив ее следующим образом:

$$H'_k(t) = H_1[\vartheta_k(t)] \left(\frac{d\vartheta_k}{dt} \right)^m.$$

Тогда

$$\Theta(z) = \left(\frac{dt}{dz} \right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} H'_k(t + 2hi\pi).$$

Сначала необходимо просуммировать по k . Но $H'_k(t)$ — рациональная функция от t , которая стремится к нулю, когда t стремится к бесконечности. Следовательно,

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} H'_k(t + 2hi\pi) = H''_k(e^t),$$

где $H''_k(e^t)$ означает рациональную функцию от e^t , стремящуюся к нулю при t , стремящемся к бесконечности. В результате

$$\Theta(z) = \left(\frac{dt}{dz}\right)^m \sum_k H''_k(e^t).$$

Сходимость этого ряда очевидна, поскольку он получается при некотором объединении в группы членов абсолютно и равномерно сходящегося ряда (5). Кроме того, его члены рациональны по e^t , и точки, в которых они обращаются в бесконечность, не могут подходить сколь угодно близко к точкам

$$e^t = 0 \quad \text{и} \quad e^t = \infty,$$

вследствие чего можно найти верхний и нижний предел модулей тех значений e^t , при которых одна из функций H''_k обращается в бесконечность.

Отсюда следует, что в окрестности особой точки $z = \alpha$ функция $\Theta(z)(z - \alpha)^{2m}$ голоморфна по $e^{\frac{2i\pi}{\beta(z-\alpha)}}$ или по $e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha-z)}}$ в зависимости от того, приближаемся ли мы к точке α изнутри или извне фундаментальной окружности. Иначе говоря, α является для функции Θ *логарифмической особенностью* [6].

Итак, при рассмотрении вершин многоугольника R возможны следующие случаи:

- 1) вершины, принадлежащие циклам первой и третьей категории, для функции $\Theta(z)$ служат обычными точками или полюсами;
- 2) в вершинах, принадлежащих циклу третьего подвида, функция $\Theta(z)$ имеет логарифмические особенности;
- 3) вершины, принадлежащие циклу четвертого подвида, являются особыми точками более сложной природы.

III. Нули и полюсы

Исследуем теперь, как распределены нули и полюсы функции Θ . Ясно, что если в точке z функция Θ обращается в нуль или в бесконечность, то она также обращается в нуль или в бесконечность во всех точках, соответствующих z , т. е. в точках $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$. Таким образом, каждому нулю, расположенному внутри многоугольника R_0 , можно поставить в соответствие нуль в каждом из многоугольников R . Эти нули мы *не будем считать существенно различными* (и отличать их от первого). Таким образом, число

существенно различных точек, в которых функция Θ обращается в нуль или в бесконечность, равно числу этих точек, заключенных внутри R_0 , если функция Θ существует лишь внутри фундаментального круга, и внутри $R_0 + R'_0$, если она определена на всей плоскости. Напомним, что R'_0 — многоугольник, симметричный многоугольнику R_0 относительно фундаментальной окружности.

Для того чтобы наши будущие результаты относительно числа нулей и полюсов можно было сформулировать достаточно просто, необходимо принять специальное соглашение. Прежде всего, ясно, что двукратный нуль или двукратный полюс следует считать двумя нулями или двумя полюсами. То же относится и к нулям и полюсам более высокой кратности. Однако помимо нулей, расположенных внутри R_0 , могут встретиться и нули, лежащие на периметре этого многоугольника. Предположим, что один нуль лежит на стороне ab первого рода, а другой нуль, соответствующий первому, — на стороне, сопряженной с ab . Два таких нуля не будут существенно различными, и их следует считать за один нуль, или, если угодно, каждый из них — за «половину» нуля. Предположим теперь, что нуль кратности p расположен в вершине первой категории. Пусть число вершин, входящих в тот же цикл, что и рассматриваемая, равно, например, n , причем каждая из них так же, как и первая вершина, является нулем кратности p . Пусть сумма углов, отвечающих этим вершинам, равна $2\pi/k$. Каждая из вершин принадлежит к nk различным многоугольникам и должна быть как-то распределена между ними, так что на долю многоугольника R_0 придется нуль кратности p/nk . Отсюда следует, что среди вершин цикла имеется лишь p/k различных нулей.

Принятое нами соглашение нетрудно распространить на случай, когда один из нулей расположен в вершине второй категории, принадлежащей циклу третьего подвида. Мы уже знаем, что если α — такая вершина, то функцию Θ можно представить в виде

$$(z - \alpha)^{-2m} \Phi \left[e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha-z)}} \right],$$

где Φ — голоморфная функция аргумента $e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha-z)}}$, обращающаяся в нуль при

$$\begin{array}{l} z = \alpha, \\ \text{т. е. при} \quad \left| \begin{array}{l} e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha-z)}} = 0. \end{array} \right. \end{array}$$

Таким образом, $u=0$ является нулем функции $\Phi(u)$. Пусть кратность этого нуля равна p . Тогда мы скажем, что вершины, входящие в цикл, к которому принадлежит α , образуют p различных нулей функции Θ .

Разумеется, все сказанное выше о нулях с тем же успехом применимо и к полюсам функции Θ .

Итак, приступим к рассмотрению полюсов. Ряд (5) обращается в бесконечность, если в бесконечность обращается $H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ или $\frac{1}{\gamma_i z + \delta_i}$. Предположим сначала, что функция Θ существует лишь внутри фундаментального круга. Тогда $\frac{1}{\gamma_i z + \delta_i}$ не может обращаться в бесконечность. Кроме того, каждому полюсу $H(z)$ внутри фундаментального круга, отвечает в общем случае полюс одной из функций $H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ в области R_0 .

Следовательно, число различных полюсов функции Θ равно числу полюсов функции H , расположенных внутри фундаментального круга.

Предположим теперь, что Θ существует на всей плоскости. Тогда каждому полюсу функции $H(z)$, расположенному внутри фундаментального круга, отвечает полюс одной из функций $H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$, расположенный внутри R_0 . Каждому полюсу z функции $H(z)$, расположенному вне фундаментального круга, отвечает полюс одной из функций $H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$, расположенный внутри R'_0 .

Внутри каждого из многоугольников R'_i и, следовательно, внутри R'_0 , находится одна из точек $-\delta_i/\gamma_i$, служащих для функции Θ полюсами порядка $2m$, однако имеется исключение. Дело в том, что точки $-\delta_i/\gamma_i$ гомологичны бесконечно удаленной точке, а один из многоугольников R'_i содержит точку ∞ и не содержит точку $-\delta_i/\gamma_i$. Однако точка ∞ не всегда является особой для функции Θ . Для того чтобы избежать этой трудности, предположим, что многоугольник R'_0 не содержит бесконечно удаленной точки. Тогда можно сформулировать следующий результат.

Число полюсов функции Θ , расположенных внутри $R_0 + R''_0$, т. е. число различных полюсов функции Θ , на $2m$ больше числа полюсов функции H .

Перейдем к исследованию нулей. Среди них имеются такие, которые должны привлечь наше внимание в первую очередь. Я имею в виду вершины первой категории, которые в некоторых случаях с необходимостью становятся нулями определенной кратности.

Пусть α — вершина первой категории, а α' — вершина, симметричная α относительно фундаментальной окружности. Предположим, что α принадлежит некоторому циклу и сумма углов, отвечающих вершинам этого цикла, равна $2\pi/k$. Одна из подстановок группы G будет иметь вид

$$\left(\frac{z - \alpha}{z - \alpha'}, e^{2\frac{i\pi}{k}} \frac{z - \alpha}{z - \alpha'}\right) = [z, f_1(z)].$$

Тогда

$$\Theta[f_1(z)] = \Theta(z) \left(\frac{df_1}{dz}\right)^{-m},$$

или

$$\Theta(f_1)(f_1 - \alpha')^{2m} = \Theta(z)(z - \alpha')^{2m} \left[\frac{d\left(\frac{f_1 - \alpha}{f_1 - \alpha'}\right)}{d\left(\frac{z - \alpha}{z - \alpha'}\right)} \right]^m. \quad (8)$$

Но

$$\frac{f_1 - \alpha}{f_1 - \alpha'} = e^{\frac{2i\pi}{k}} \frac{z - \alpha}{z - \alpha'}.$$

Кроме того, заметим, что $\Theta(z)(z - \alpha')^{2m}$ можно разложить по степеням $\frac{z - \alpha}{z - \alpha'}$:

$$\Theta(z)(z - \alpha')^{2m} = \Theta_1\left(\frac{z - \alpha}{z - \alpha'}\right) = \sum A_p \left(\frac{z - \alpha}{z - \alpha'}\right)^p.$$

Тогда равенство (8) преобразуется к виду

$$\sum A_p e^{\frac{2ip\pi}{k}} \left(\frac{z - \alpha}{z - \alpha'}\right)^p = \sum A_p e^{-\frac{2mi\pi}{k}} \left(\frac{z - \alpha}{z - \alpha'}\right)^p.$$

Последнее тождество требует, чтобы

$$A_p = 0,$$

или

$$e^{\frac{2i\pi p}{k}} = e^{-\frac{2mi\pi}{k}},$$

т. е.

$$p + m \equiv 0 \pmod{k}. \quad (9)$$

Итак, разложение функции Θ_1 содержит лишь члены, порядок которых p удовлетворяет сравнению (9). Если k не делит m , то $z = \alpha$ является нулем для Θ_1 и, следовательно, для Θ [7].

Кратность этого нуля не меньше остатка от деления $m(k-1)$ на k и может отличаться от этого остатка на величину, кратную k . Очевидным исключением является случай, когда α является полюсом функции Θ .

Мы видели также, что вершины, принадлежащие циклу третьего подвида, в общем случае служат нулями функции Θ .

Попробуем теперь установить, чему равно число существенно различных нулей функции Θ . Для определенности предположим, что речь идет о функции первого семейства. Пусть q — число полюсов, p — искомое число существенно различных нулей, а p_0 — число нулей, расположенных внутри R_0 (сюда не входят нули, которые могут лежать на периметре или в вершинах этого многоугольника). Предположим, что на периметре нет других нулей, кроме тех, которые расположены в вершинах (именно так обстоит дело в наиболее общем случае). Если бы наше предположение не было выполнено, то нули, лежащие на сторонах многоугольника,

можно было бы рассматривать как вершины, разделяющие две смежные стороны многоугольника, каждая из которых расположена на продолжении другой. Будем считать, что вершины подразделяются на некоторое число циклов первой категории $C_1, C_2, \dots, C_i, \dots$. Пусть все вершины цикла C_i — нули кратности p_i , а сумма отвечающих им углов равна $2\pi/k_i$, так, что в соответствии с принятым нами соглашением всю совокупность этих нулей следует считать состоящей из p_i/k_i различных нулей. Тогда должны выполняться соотношения

$$p_i + m \equiv 0 \pmod{k_i},$$

$$p = p_0 + \sum \frac{p_i}{k_i}.$$

Задача заключается в вычислении p_0 . Для этого необходимо вычислить интеграл

$$\int \frac{\theta'(z) dz}{\theta(z)} \quad (10)$$

по периметру многоугольника R_0 . Вещественная часть интеграла (10) равна нулю, а его мнимую часть можно представить в виде

$$2i\pi(p_0 - q).$$

Вычисление интеграла (10) наталкивается в рассматриваемом случае на одну специфическую трудность.

В самом деле, подынтегральная функция обращается в бесконечность в некоторых точках контура интегрирования, поскольку, как мы знаем, некоторые из вершин многоугольника R_0 являются нулями функции θ . Указанную трудность удастся обойти, если описать вокруг каждой из таких вершин как вокруг центра дуги бесконечно малых окружностей, соединяющие две стороны, которые встречаются в рассматриваемой вершине. Эти дуги необходимо провести так, чтобы они оказались внутри R_0 , а вершины многоугольника были расположены вне контура, ибо мы хотим вычислить p_0 , т. е. число нулей *внутри* R_0 .

Итак, интеграл (10) требуется вычислить вдоль следующих кривых:

- 1) вдоль бесконечно малых окружностей, описанных вокруг указанных ранее вершин;
- 2) вдоль сторон первого рода;
- 3) вдоль сторон второго рода.

При этом достаточно вычислить лишь мнимую часть этого интеграла, ибо заранее известно, что его вещественная часть равна нулю. Мнимая же часть представляет собой не что иное, как вариацию аргумента функции θ .

Предположим сначала, что мы рассматриваем функцию первого семейства и, следовательно, имеем дело лишь с вершинами первой категории и со сторонами первого рода. Пусть число этих сторон равно $2n$.

Рассмотрим прежде всего малую дугу окружности, описанной вокруг вершины. Будем считать, что эта вершина принадлежит к циклу C_i , сумма

входящих в него углов равна $2\pi/k_i$, а все соответствующие вершины — нули порядка p_i . Пусть λ — угол при рассматриваемой вершине. Интеграл вдоль дуги соответствующей окружности равен $-\sqrt{-1} p_i \lambda$; интеграл, взятый вдоль дуг всех окружностей, описанных вокруг вершин цикла C_i , оказывается равным

$$-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{k_i} p_i.$$

Наконец, интеграл (10), взятый вдоль всех бесконечно малых дуг, описанных вокруг вершин многоугольника R_0 , равен

$$-2\pi\sqrt{-1} \sum \frac{p_i}{k_i}.$$

Остается вычислить интеграл вдоль сторон первого рода. Пусть ab и $a'b'$ — две сопряженные стороны R_0 . Требуется найти

$$J = \int_a^b \frac{\Theta' dz}{\Theta} + \int_{b'}^{a'} \frac{\Theta' dz}{\Theta} = \int_a^b \frac{\Theta' dz}{\Theta} - \int_{a'}^{b'} \frac{\Theta' dz}{\Theta}.$$

Пусть $[z, f_i(z)]$ — подстановка группы G , которая переводит ab в $a'b'$. Из сказанного ранее следует, что

$$\Theta(f_i) = \Theta(z) \left(\frac{df_i}{dz} \right)^{-m},$$

или

$$\ln \Theta(f_i) = \ln \Theta(z) - m \ln \frac{df_i}{dz}.$$

Отсюда

$$J = \int_{a'}^{b'} \left[\frac{\Theta'(f_i)}{\Theta(f_i)} - \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} \right] dz = -m \int_{a'}^{b'} d \left[\ln \frac{df_i}{dz} \right]^*.$$

Итак, нам осталось исследовать, как изменяется мнимая часть $\ln \frac{df_i}{dz}$ или аргумент $\frac{df_i}{dz}$, когда z описывает сторону $a'b'$.

Напомним, что стороны ab и $a'b'$ многоугольника R_0 являются дугами окружностей. Проведем к дугам ab и $a'b'$ касательные в точках a, b, a', b' и обозначим эти касательные $ac, bc, a'c', b'c'$. Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ — аргументы комплексных величин $(c-a), (b-c), (c'-a'), (b'-c')$.

Предположим, что аналогичные построения мы провели для всех сторон криволинейного многоугольника R_0 [рис. 10]. В результате получим пря-

* $\Theta'(f_i) = \frac{d\Theta[f_i(z)]}{dz}$. (Н. Е. Н.).

молинейный многоугольник P_0 с $4n$ сторонами — касательными к сторонам многоугольника R_0 . Вершинами P_0 служат вершины R_0 и точки, аналогичные точкам s и s' . Углы многоугольника P_0 , отвечающие вершинам s и s' , обозначим просто буквами s и s' . Кроме вершин типа s , в многоугольнике P_0 имеется $2n$ углов, общих с R_0 . Их сумма равна $\sum \frac{2\pi}{k_i}$. Следовательно, справедливо соотношение

$$\sum c + \sum \frac{2\pi}{k_i} = (4n - 2)\pi.$$

Таким образом, мы можем записать, что

$$\arg \frac{df_i}{dz} = \omega_1 - \omega_3 \quad \text{при} \quad z = a',$$

$$\arg \frac{df_i}{dz} = \omega_2 - \omega_4 \quad \text{при} \quad z = b',$$

мнимая часть $J = -m(\omega_2 - \omega_1 - \omega_4 + \omega_3)i$,

$$c = \omega_1 - \omega_2 + \pi,$$

$$c' = \pi - \omega_3 + \omega_4,$$

мнимая часть $J = m(c + c' - 2\pi)i$.

Интеграл (10), вычисленный вдоль всех сторон первого рода, равен мнимой части $\sum J$, или

$$im \sum c - 2n\pi i,$$

или, что то же,

$$(4n - 2)\pi i - 2\pi i \sum \frac{m}{k_i} - 2n\pi i = (n - 1)2\pi i - 2\pi i \sum \frac{m}{k_i}.$$

Таким образом, интеграл (10) оказывается равным

$$2\pi i \left[m(n - 1) - \sum \frac{p_i + m}{k_i} \right].$$

Отсюда вытекает соотношение

$$p_0 = q + m(n - 1) - \sum \frac{p_i + m}{k_i}.$$

Из сравнения

$$p_i + m \equiv 0 \pmod{k_i}$$

следует, что число нулей p_0 внутри многоугольника R_0 — целое.

Найдем теперь число p существенно различных нулей (в соответствии с принятыми выше соглашениями). Имеем

$$p = q + m \left(n - 1 - \sum \frac{1}{k_i} \right).$$

Итак, число существенно различных нулей превышает число существенно различных полюсов на величину, зависящую лишь от числа n , числа $2n$ сторон многоугольника R_0 и суммы $\sum \frac{2\pi}{k_i}$ углов этого многоугольника [8].

Сумма $\sum \frac{2\pi}{k_i}$ удовлетворяет неравенству

$$\sum \frac{2\pi}{k_i} < \pi (2n - 2),$$

откуда

$$\sum \frac{1}{k_i} < n - 1,$$

и, следовательно, $p > q$. Выражение $(n - 1 - \sum \frac{1}{k_i})$ пропорционально неевклидовой площади многоугольника R_0 .

Предположим теперь, что функция Θ принадлежит ко второму или шестому семейству. В этом случае все стороны первого рода, но кроме циклов первой категории $C_1, C_2, \dots, C_i, \dots$, с которыми мы уже встречались в первом случае, имеются циклы $C'_1, C'_2, \dots, C'_i, \dots$ второй категории и третьего подвида. Рассмотрим цикл C'_i . Входящие в него вершины являются нулями. В соответствии с принятыми ранее соглашениями будем считать, что цикл C'_i состоит из h_i различных нулей. Тогда

$$p = p_0 + \sum \frac{p_i}{k_i} + \sum h_i. \quad (11)$$

Интеграл (10) требуется вычислить:

- 1) вдоль дуг бесконечно малых окружностей, описанных вокруг вершин первой категории;
- 2) вдоль сторон первого рода;
- 3) вдоль дуг бесконечно малых окружностей, описанных вокруг вершин второй категории.

Первая часть интеграла так же, как и раньше, оказывается равной $-2\pi \sqrt{-1} \sum \frac{p_i}{k_i}$, вторая —

$$\sum J = 2\pi m \sqrt{-1} \left(n - 1 - \sum \frac{1}{k_i} \right).$$

Для того чтобы вычислить третью часть, достаточно исследовать, как изменяется аргумент Θ в окрестности вершины второй категории. Действительно, функцию Θ необходимо представить в виде

$$(z - \alpha)^{-2m} \Phi \left[e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha-z)}} \right].$$

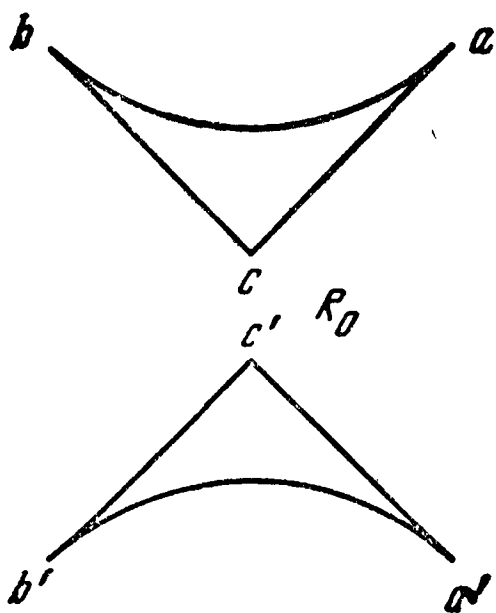


Рис. 10

(Φ — некая голоморфная функция), что, как мы видели выше, возможно. Третья часть интеграла оказывается равной $-2\pi\sqrt{-1}\sum h_i$.

Таким образом, выражение для интеграла (10) сводится к

$$2\pi\sqrt{-1}\left[m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{k_i} - \sum h_i\right],$$

откуда

$$p_0 = q + m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{k_i} - \sum h_i$$

и

$$p = q + m\left(n-1 - \sum \frac{1}{k_i}\right).$$

Итак, для разности между числом различных нулей и числом различных полюсов мы получаем то же выражение, что и в предыдущем случае [9]. Эта разность пропорциональна числу m и зависит, кроме того, от числа сторон многоугольника R_0 и суммы его углов (можно также сказать, что она пропорциональна неевклидовой площади S многоугольника R_0 , умноженной на m).

Предположим, наконец, что функция Θ принадлежит к третьему, четвертому, пятому или седьмому семейству, т. е. существует на всей плоскости. В этом случае многоугольник R_0 имеет стороны первого и второго рода, вершины первой и третьей категории, а также вершины второй категории, образующие циклы третьего подвида. Найдем число различных нулей и полюсов (их мы определяем так же, как и раньше). Относительно числа различных полюсов необходимо сделать одно замечание. В общем случае таким числом будет число полюсов, расположенных внутри R_0 и R'_0 , однако если область R'_0 содержит бесконечно удаленную точку, возникает затруднение. В этом случае можно считать, что ∞ не является особой точкой функции Θ , в то время как все ее образы при подстановках группы G служат для Θ полюсами. Поэтому число существенно различных полюсов в этом случае равно числу полюсов внутри $R_0 + R'_0$ плюс $2m$. Эту трудность можно обойти, предположив многоугольник R_0 выбранным так, что область R'_0 не содержит точки ∞ .

Условившись об этом, обратимся снова к интегралу (10). Его необходимо вычислить вдоль контура многоугольника R_0 , затем — вдоль контура R'_0 и результаты сложить. Пусть $2n$ — число сторон первого рода, l — число сторон второго рода. Кроме того, мы сохраним те же обозначения, которых придерживались раньше: p_0 и q будут означать число нулей и полюсов внутри $R_0 + R'_0$.

Интеграл требуется вычислить:

- 1) вдоль малых дуг окружностей, описанных вокруг вершин первой категории;
- 2) вдоль малых дуг окружностей, описанных вокруг вершин третьего подвида;

3) вдоль сторон первого рода;

4) вдоль сторон второго рода.

Первая и вторая часть интеграла равны

$$-2i\pi \left(\sum \frac{p_i}{k_i} + \sum h_i \right).$$

Третья часть так же, как и выше, равна мнимой части величины $\sum J$. Построим многоугольник R_0 , проведя из вершин R_0 касательные к сторонам первого рода. Получившийся при этом прямолинейный многоугольник имеет $4n+l$ сторон. Его углы делятся на два типа: к первому относятся углы, аналогичные углам, ранее обозначенным s и s' ; ко второму — углы, общие с углами многоугольника R_0 . Последние в свою очередь подразделяются, во-первых, на углы, отвечающие вершинам первой категории (их сумма равна $\sum \frac{2\pi}{k_i}$), во-вторых, на углы, отвечающие вершинам второй категории, и, наконец, на $2l$ прямых углов, отвечающих вершинам третьей категории. В результате мы получаем соотношение

$$\sum s + \sum \frac{2\pi}{k_i} + l\pi = (4n + l - 2)\pi.$$

Так же, как и раньше, находим: мнимая часть $\sum J = m\sqrt{-1}(\sum s - 2n\pi)$; следовательно, мнимая часть $\sum J = 2\pi m\sqrt{-1}\left(n - 1 - \sum \frac{1}{k_i}\right)$.

Наконец, обозначив через $2\pi I\sqrt{-1}$ мнимую часть интеграла, взятого вдоль стороны второго рода, получим для интеграла (10), взятого по контуру многоугольника R_0 , следующее выражение:

$$2\pi\sqrt{-1}\left[m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{k_i} - \sum h_i + I\right].$$

Остается еще вычислить интеграл (10) вдоль контура R'_0 . В соответствии с принятым соглашением предположим, что вершины первой категории многоугольника R'_0 можно рассматривать как $\sum \frac{p'_i}{k_i}$, а вершины второго типа — как $\sum h'_i$ различных нулей. С помощью тех же рассуждений, что и раньше, получим для интеграла (10), взятого вдоль контура многоугольника R'_0 , выражение

$$2\pi\sqrt{-1}\left[m(n-1) - \sum \frac{p'_i + m}{k_i} - \sum h'_i - I\right].$$

Суммируя оба интеграла, находим

$$2\pi\sqrt{-1}\left[2m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{k_i} - \sum \frac{p'_i + m}{k_i} - \sum h_i - \sum h'_i\right],$$

откуда

$$p_0 = q + 2m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{k_i} - \sum \frac{p'_i + m}{k_i} - \sum (h_i + h'_i).$$

Однако, если p так же, как и раньше, означает число различных нулей, то

$$p = p_0 + \sum \frac{p_i}{k_i} + \sum \frac{p'_i}{k_i} + \sum h_i + \sum h'_i,$$

откуда

$$p = q + 2m \left(n - 1 - \sum \frac{1}{k_i} \right).$$

Итак, число различных нулей превышает число различных полюсов на величину, зависящую лишь от числа m , числа $2m$ сторон первого рода и суммы углов первой категории [10].

Следует особо заметить, что во всех случаях число нулей и полюсов всегда конечно.

IV. Фуксовы функции

Функция $F(z)$ называется *фуксовой*, если она однозначна, переходит сама в себя под действием всех подстановок фуксовой группы G (иначе говоря, если

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right)$$

— подстановка группы G , то справедливо тождество

$$F\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) \equiv F(z))$$

и имеет, наконец, лишь конечное число существенно различных нулей и полюсов. Существуют ли такие функции? Оказывается, существуют и их нетрудно построить.

Действительно, если взять две тэта-фуксовы функции, отвечающие одной и той же группе G , с одним и тем же значением m , то их отношение будет фуксовой функцией. Наш метод допускает простое обобщение. Назовем число m *степенью* Θ -ряда. Составим произведение тэта-рядов. Степень одночлена произведения будет равна сумме степеней всех сомножителей. Рассмотрим полином относительно тэта-рядов. Мы скажем, что данный полином — однородный, степени k , если все его члены имеют степень k . Отношение двух однородных полиномов степени k и k' будет рациональной однородной функцией степени $k - k'$. Ясно, что всякая рациональная однородная функция степени 0 относительно тэта-рядов является фуксовой. Позже мы увидим, что любую фуксову функцию можно представить в таком виде.

Каковы свойства фуксовых функций?

1. Они имеют те же особенности, что и тэта-фуксовы функции. Отсюда мы заключаем, что некоторые фуксовы функции существуют лишь внутри фундаментального круга. Для них любая точка окружности является существенно особой. Другие же фуксовы функции существуют на

всей плоскости. Их существенно особые точки, расположенные на фундаментальной окружности, изолированы, хотя число их бесконечно [11].

2. Число различных нулей фуксовой функции $F(z)$ равно числу ее различных полюсов. С другой стороны, число различных нулей $F(z)$ равно числу различных нулей фуксовой функции $F(z) - a$, т. е. числу существенно различных точек, в которых $F(z)$ принимает значение a . Следовательно, число точек внутри R_0 (или $R_0 + R'_0$), в которых $F(z)$ принимает одно и то же значение, не зависит от a и конечно.

3. Пусть две фуксовы функции $F(z)$ и $F_1(z)$ отвечают одной и той же фуксовой группе G . Предположим, что первая из них принимает внутри R_0 одно и то же значение p раз, а вторая — p_1 раз. Я утверждаю, что между F и F_1 существует алгебраическое соотношение. Действительно, каждому значению функции F соответствует p_1 значений функции F_1 . Всякая симметрическая функция от этих p_1 значений мероморфна относительно F при всех значениях функции F , конечных или бесконечных. Следовательно, все такие симметрические функции рациональны по F , и сама F_1 — алгебраическая функция от F , что и требовалось доказать.

4. Рассмотрим все фуксовы функции, отвечающие одной и той же группе G . Между любыми двумя из них, как мы только что видели, существует алгебраическое соотношение. Отсюда следует, что все эти функции рационально выражаются через две функции, которые мы обозначим x и y . Кроме того, между x и y имеется алгебраическое соотношение

$$\varphi(x, y) = 0. \quad (1)$$

Каков род соотношения (1) или, что то же, каков род соответствующей римановой поверхности? Для того чтобы ответить на этот вопрос, необходимо вернуться к разделу VIII мемуара о фуксовых группах, озаглавленному «Классификация по роду». В этом разделе после разрезания области R_0 (или $R_0 + R'_0$), сложив ее и склеив сопряженные стороны, мы получили некоторую замкнутую поверхность. Ясно, что с точки зрения геометрии строение полученной нами замкнутой поверхности не отличается от рассматриваемой теперь римановой поверхности. Отсюда следует, что род соотношения (1) в точности совпадает с величиной, которую в указанном мемуаре я назвал *родом группы G* . Следовательно, если группа G рода 0, то и род соотношения (1) также равен нулю. Это означает, что все фуксовы функции можно рационально выразить через какую-нибудь одну из них, которую мы обозначим x .

Можно было бы не прибегать к геометрическим представлениям. Именно такой путь был избран мной в работе, помещенной в мемуарах Кайенской академии*, где род соотношения (1) я определял по числу различных циклов, которые можно описать вокруг аналитической точки (x, y) . Однако при этом приходится проводить довольно длинные рассуждения.

* Mémoires de l'Académie nationale des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Caen, pour 1882, p. 2—29.

5. Рассмотрим фуксову функцию, которую мы только что обозначили через x . Образует две следующие функции:

$$v_1 = \sqrt{\frac{dx}{dz}}, \quad v_2 = z \sqrt{\frac{dx}{dz}}. \quad (2)$$

Ясно, что

$$\frac{1}{v_1} \frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{1}{v_2} \frac{d^2 v_2}{dx^2} = \frac{2 \frac{d^3 x}{dz^3} \frac{dx}{dz} - 3 \left(\frac{d^2 x}{dz^2} \right)^2}{4 \left(\frac{dx}{dz} \right)^4}.$$

Нетрудно проверить, что третий член этого двойного равенства представляет собой фуксову функцию от z и его, как мы только что видели, можно представить в виде рациональной функции от x и y . Обозначим эту функцию $\varphi(x, y)$.

Тогда линейное уравнение

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v \varphi(x, y) \quad (3)$$

будем иметь два интеграла

$$v = v_1 \quad \text{и} \quad v = v_2.$$

Таким образом, рассмотрение фуксовой функции x позволяет интегрировать линейное уравнение (3) с рациональными функциями аналитической точки (x, y) в качестве коэффициентов. Иногда независимая переменная x бывает фуксовой функцией относительно z , т. е. относительно отношения интегралов. Коль скоро эта фуксова функция известна, интегралы уравнения мы находим по формулам (2).

В частном случае, когда G — группа рода нуль, уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v \varphi(x), \quad (3\text{bis})$$

где $\varphi(x)$ — рациональная функция лишь одной переменной x . Действительно, как мы только что видели, в этом случае всякая фуксова функция рационально выражается через x . Исследуем теперь, каковы особые точки уравнения (3) и как ведут себя интегралы в окрестности каждой из них. В общем случае интегралы голоморфны относительно x , однако имеются два исключения. В этих случаях мы встречаем особые точки двух типов:

1. В особых точках соотношения (1) y перестает быть голоморфной функцией от x . То же происходит и с интегралами v_1 и v_2 , однако и v_1 , и v_2 по-прежнему остаются голоморфными функциями аналитической точки (x, y) . Следовательно, в этом случае (x, y) нельзя считать настоящей особой точкой.

2. Вторым исключением являются точки (x, y) , соответствующие вершинам многоугольника R_0 . Среди этой (второй) разновидности особых точек мы различаем следующие:

1. Те, которые отвечают вершинам первой категории. В окрестности таких особых точек, если воспользоваться терминологией Фукса, интегралы уравнения (3) регулярны. Составив определяющее уравнение для такой особой точки, мы обнаружим, что разность его корней равна единице, деленной на целое число. Действительно, рассматриваемая особая точка отвечает вершине многоугольника R_0 , принадлежащей циклу первой категории. Сумма углов такого цикла равна $2\pi/p_i$, где p_i — целое число. Нетрудно видеть, что разность корней определяющего уравнения в точности равна $1/p_i$.

В частном случае, когда рассматриваемая вершина многоугольника R_0 принадлежит циклу первого подвида, $p=1$ в силу самого определения цикла первого подвида. Следовательно, разность корней определяющего уравнения в этом случае равна единице, и точки этого типа не являются особыми.

2. Рассмотрим теперь особую точку, соответствующую вершине многоугольника R_0 , принадлежащей циклу второй категории. Этот цикл будет относиться к третьему подвиду, поскольку, как мы видели выше, всегда можно предполагать, что интересующие нас циклы не принадлежат к четвертому подвиду. Составим определяющее уравнение для такой особой точки. Его корни будут равными, а интегралы уравнения (3) — *логарифмическими, но регулярными*.

3. Наконец, следовало бы рассмотреть аналитические точки (x, y) , соответствующие вершинам третьей категории, однако нетрудно видеть, что подобные точки не будут особыми.

Подведем итоги. Интегралы уравнения (3) всюду регулярны, и, если оставить в стороне особые точки соотношения (1), число особых точек дифференциального уравнения (3) равно числу циклов второго и третьего подвида, образуемых вершинами многоугольника R_0 (или двух многоугольников R_0 и R'_0).

V. Первое семейство; род 0

Изучив общие свойства фуксовых функций, приступим теперь к изучению отдельных семейств и различных родов, на которые подразделяются эти функции. Мы начнем с подробного изучения наиболее простых функций: функций рода 0 первого семейства.

Напомним прежде всего, какой вид имеет многоугольник R_0 для таких функций. Все стороны R_0 — первого рода, их число равно $2n$. Стороны с номерами p и $2n+1-p$ сопряжены и, следовательно, конгруэнтны. Число циклов равно $n+1$. Два из них содержат лишь по одной вершине: первый — вершину с номером 1, второй — вершину с номером $n+1$. Остальные $n-1$ циклов образованы двумя вершинами, а именно: верши-

ной с номером p и вершиной с номером $2n+2-p$. (Такой многоугольник рассмотрен в примере II из раздела VII мемуара о фуксовых группах.)

Особенно замечательным является случай, когда многоугольник R_0 симметричен относительно дуги окружности, ортогонально пересекающейся с фундаментальной окружностью и соединяющей вершины 1 и $n+1$. Такой многоугольник мы будем просто называть симметричным.

В рассматриваемом нами случае род равен 0, и, следовательно, все фуксовы функции рационально выражаются через одну из них, которую мы обозначим через x , или $f(z)$. Это условие не определяет функцию $x = f(z)$ однозначно. Действительно, если любая фуксова функция рационально выражается через x , то она также рационально выражается и через $\frac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c и d — произвольные постоянные. Следовательно, для того чтобы полностью определить функцию $x = f(z)$, необходимо наложить еще три условия. Выберем их следующим образом. Пусть α_1, α_2 и α_{n+1} — вершины с номерами 1, 2 и $n+1$. Предположим, что

$$f(\alpha_1) = 0, \quad f(\alpha_2) = 1, \quad f(\alpha_{n+1}) = \infty.$$

Тогда функция $f(z)$ будет полностью определена. Относительно этой функции заметим следующее. Если многоугольник R_0 симметричен, то функция $f(z)$ вещественна и положительна на всем периметре этого многоугольника.

Обозначим через α_i вершину с номером i . Эта вершина вместе с вершиной α_{2n+2-i} образует цикл. Соответствующая ему сумма углов равна $2\pi\beta_i$, где β_i — целое число. Наконец, введем обозначение

$$a_i = f(\alpha_i) = f(\alpha_{2n+2-i}),$$

откуда

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = \infty.$$

При $z = \alpha_i$ все $\beta_i - 1$ производных функции $f(z)$ обращаются в нуль, вследствие чего разложение $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = a_i + b_1(z - \alpha_i)^{\beta_i} + b_2(z - \alpha_i)^{\beta_i+1} + \dots$$

При $z = \alpha_{n+1}$ функция $f(z)$ имеет особенность порядка β_{n+1} , вследствие чего ее разложение имеет вид

$$f(z) = \frac{b_1}{(z - \alpha_{n+1})^{\beta_{n+1}}} + \frac{b_2}{(z - \alpha_{n+1})^{\beta_{n+1}+1}} + \dots$$

Ранее мы видели, что функция

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(z), \quad (3bis)$$

где $\varphi(x)$ — рациональная функция от x . Какой вид имеет эта функция $\varphi(x)$?

Ответ на этот вопрос дать нетрудно:

$$\varphi(x) = \frac{P(x)}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2} = \frac{P(x)}{Q^2(x)},$$

где $Q(x)$ — произведение $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$, а $P(x)$ — многочлен от x степени $2n-2$.

Многочлен $P(x)$ должен удовлетворять следующим условиям:

$$P(a_i) = Q'^2(a_i) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\beta_i^2} \right)$$

(здесь $Q'(x)$ означает производную функции $Q(x)$). Кроме того, коэффициент при x^{2n-2} в $P(x)$ должен быть равен

$$-\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\beta_i^2} \right).$$

Таковы $(n+1)$ необходимых условий, которым должен удовлетворять многочлен $P(x)$ для того, чтобы уравнение (3bis) было интегрируемым, как утверждалось выше. Перечисленные условия не являются достаточными. Действительно, степень многочлена $P(x)$ равна $2n-2$. Следовательно, он содержит еще $n-2$ произвольных параметра. У этих $n-2$ параметров, поскольку они *комплексны*, необходимо различать вещественные и мнимые части, поэтому они эквивалентны $2n-4$ *вещественным* параметрам. Возникает вопрос: сколько произвольных параметров содержит группа G ? Группа G определяется многоугольником R_0 с $2n$ сторонами. Для того чтобы задать такой многоугольник в общем случае, необходимо $4n-3$ условий. Однако наш многоугольник не произволен. Действительно, его сопряженные стороны должны быть конгруэнтными, что налагает n условий; кроме того, сумма углов различных циклов должна быть соответственно равна $2\pi/\beta_1, 2\pi/\beta_2, \ldots, 2\pi/\beta_{n+1}$, что дает еще $n+1$ условий. Следовательно, в нашей группе G остается всего $2n-4$ произвольных параметра. Однако у нашей функции $\varphi(x)$ имеется $2n-4$ параметра, остающихся произвольными в $P(x)$ и, кроме того, $n-2$ произвольных комплексных параметра, а именно: $a_3, a_4, \ldots, a_n$ (эквивалентных $2n-4$ вещественным параметрам) — в $Q(x)$. Таким образом, $\varphi(x)$ имеет на $2n-4$ произвольных параметра больше, чем группа G . Следовательно, для того чтобы уравнение (3bis) было интегрируемым указанным выше способом, помимо уже сформулированных условий, необходимо еще наложить $2n-4$ дополнительных условия. Эти условия трансцендентны и весьма сложны. Они рассмотрены в другом мемуаре *.

* Sur les groupes des équations linéaires. — Acta math., 4, 201—312 etc. (H. E. H.).

Предположим теперь, что нам заданы $a_3, a_4, \dots, a_n$, т. е. особые точки уравнения (3bis). В этом случае знаменатель $Q(x)$ будет полностью определен, и произвольными останутся лишь $2n - 4$ параметра числителя $P(x)$. При этом число параметров, оставшихся произвольными, и число наложенных условий в точности совпадают. Если задача содержит лишь алгебраические или простые трансцендентные функции, то из сказанного можно заключить, что произвольным параметрам можно всегда придать такие значения, чтобы удовлетворить имеющимся условиям. Следовательно, *в этом случае всегда существует уравнение вида (3bis), интегрируемое в фуксовых функциях, с заранее заданными особыми точками $a_1, a_2, \dots, a_n$* . Здесь мы удовлетворимся этими краткими соображениями, но сформулированная только что весьма важная теорема требует особого доказательства. Я дам его в следующем мемуаре.

В частном случае, когда многоугольник R_0 симметричен, особые точки $a_1, a_2, \dots, a_n$, так же, как и коэффициенты многочлена $P(x)$, вещественны.

В еще более частном случае, когда $n=2$, уравнение (3bis) вырождается просто в гипергеометрическое уравнение Гаусса. Кроме того,

$$2n - 4 = 0,$$

в силу чего число трансцендентных условий, вопрос о котором обсуждался выше, равно 0. Но тогда, для того чтобы x был фуксовой функцией относительно интегралов, необходимо и достаточно выполнение равенств

$$P(0) = -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\beta_1^2} \right),$$

$$P(1) = -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\beta_2^2} \right),$$

кроме того, коэффициент при x^2 в $P(x)$ должен быть равен

$$-\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\beta_3^2} \right).$$

Здесь $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — целые числа.

Исследуем теперь тэта-фуксовы функции.

Пусть $\Theta(z)$ — тэта-фуксова функция, обладающая фундаментальным свойством тэта-функций:

$$\Theta \left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k} \right) = \Theta(z) (\gamma_k z + \delta_k)^{2m}.$$

Возьмем фуксову функцию $f(z) = x$ и ее производную $f'(z)$. Ясно, что функция

$$\frac{\Theta(z)}{[f'(z)]^m}$$

— фуксова и, тем самым, рациональна относительно x .

Следовательно, общее выражение для функции $\Theta(z)$ можно представить в виде

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x), \quad (1)$$

где F — рациональная функция.

Среди тэта-фуксовых функций, как нам уже известно, существуют два типа: те, которые обращаются в бесконечность внутри фундаментального круга, и те, которые в бесконечность внутри фундаментального круга не обращаются.

Каков общий вид функций второго типа? Выражение (1) для них не должно обращаться в бесконечность ни при каком значении x . В этом случае $F(x)$ может обращаться в бесконечность лишь при условии, если dx/dz обращается в нуль, т. е. если x совпадает с одной из особых точек $x=a_1, x=a_2, \dots, x=a_n$.

Отсюда следует, что

$$\Theta(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^m \frac{\vartheta_p(x)}{(x-a_1)^{\lambda_1} (x-a_2)^{\lambda_2} \dots (x-a_n)^{\lambda_n}}, \quad (2)$$

где $\vartheta_p(x)$ означает многочлен степени p . Запишем теперь условие, состоящее в том, что $\Theta(z)$ не должна обращаться в бесконечность ни при $x=a_1$, ни при $x=a_2, \dots$, ни при $x=a_n$, ни при $x=\infty$. Имеем

$$\begin{aligned} \lambda_i &< m \left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right), \\ p &< \sum \lambda_i - m \left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Эти неравенства (их $n+1$) совместны. Они не позволяют придавать p сколь угодно большие значения. Поэтому всегда существует число q , такое, что $p < q$, и в силу неравенств (3) самое большее значение p равно $q-1$.

Предположим, что число m задано и q также определено. Ясно, что среди q тэта-функций второго типа всегда существует линейное соотношение, выполняющееся тождественно.

Если мы обратимся к выражению для этих трансцендентных функций, приведенному в разделе I, то увидим, что рациональная функция $H(z)$ содержит бесконечно много произвольных параметров. Отсюда следует, что существует бесконечно много рациональных функций H , таких, что соответствующий им тэта-фуксов ряд тождественно равен нулю.

Следовательно, между тэта-фуксовыми рядами существует бесконечно много линейных тождеств. Продолжим наше рассмотрение.

Вернемся к выражению (2). До сих пор мы предполагали, что входящие в него числа $m, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ — целые. В противном случае, функция, определяемая этим выражением, не обладала бы основным свойством

тэта-фуксовых функций, хотя и могла бы оставаться однозначной. Для этого достаточно, чтобы

$$m(\beta_i - 1) - \lambda_i \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и

$$m(\beta_{n+1} + 1) - \sum \lambda_i \beta_{n+1}$$

были целыми числами.

Ясно, что уравнения

$$\begin{aligned} m(\beta_i - 1) - \lambda_i \beta_i &= \varepsilon_i, \\ m(\beta_{n+1} + 1) - \sum \lambda_i \beta_{n+1} &= \varepsilon_{n+1}, \end{aligned} \quad (4)$$

(их $n+1$), где ε — заданные целые числа, позволяют всегда найти λ_i и m_i , ибо это — линейные уравнения с определителем, отличным от нуля.

Предположим, что в уравнениях (4) все ε_i выбраны нулями, за исключением ε_k , которое равно 1. Значения m и λ , найденные из уравнений (4), подставим в выражение (2) и заменим в нем ϑ_p константой. При этом мы получим некоторую функцию X_k , голоморфную во всем фундаментальном круге и не имеющую других нулей, кроме точек α_k и им соответствующих. Все эти нули простые.

Функции $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$, играющие весьма важную роль, были открыты Альфаном для частного случая, когда $n=2$. Между этими функциями и x можно обнаружить некоторые интересные соотношения. Действительно, рассмотрим ряды X_1 и X_{n+1} . Пусть m_1 и m_{n+1} — соответствующие значения m . Эти значения дробные.

Пусть Y — произвольная однозначная функция, представимая в виде

$$Y = \left(\frac{dx}{dz}\right)^m \frac{K}{(x - a_1)^{\lambda_1} (x - a_2)^{\lambda_2} \dots (x - a_n)^{\lambda_n}}. \quad (2bis)$$

Величина K означает здесь численный множитель. Функция Y может обращаться в нуль или в бесконечность лишь в точках $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ и им соответствующих. Предположим, что эти нули имеют соответственно кратность $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}$. Излишне говорить, что если бы какая-нибудь точка, например α_i , была полюсом, то его порядок γ_i был бы отрицательным. Функцию Y можно представить в виде

$$Y = K X_1^{\gamma_1} X_2^{\gamma_2} \dots X_{n+1}^{\gamma_{n+1}},$$

где K — численный множитель. В частности,

$$x = K_1 X_1^{\beta_1} X_{n+1}^{-\beta_{n+1}}$$

и

$$x - a_i = K_i X_i^{\beta_i} X_{n+1}^{-\beta_{n+1}},$$

где все K по-прежнему означают численные множители. Отсюда получаем тождества

$$K_1 X_1^{\beta_1} = K_i X_i^{\beta_i} + a_i X_{n+1}^{\beta_{n+1}}.$$

Тэта-фуксову функцию мы выразили двумя совершенно различными способами, задав ее в виде ряда (5) (раздел I) и с помощью формулы (1) этого раздела. Следовательно, мы а priori знаем о том, что существует бесконечно много тождеств вида

$$\sum H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} = \left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x),$$

где H и F означают две рациональные функции.

Отыскание явного вида этих тождеств и, в частности, выяснение того, в каком случае функция F тождественно равна нулю, — вот проблема, которую желательно было бы теперь решить настолько полно, насколько это возможно.

Однако, чтобы найти решение, нам придется воспользоваться двумя соображениями несколько иного рода.

До сих пор мы всегда считали, что число m положительно. Предположим теперь, что m — целое, но отрицательное число. Рассмотрим следующую функцию:

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} \frac{[f(z) - a_1]^{\mu_1} [f(z) - a_2]^{\mu_2} \dots [f(z) - a_n]^{\mu_n}}{[f(z) - f(z_1)] [f(z) - f(z_2)] \dots [f(z) - f(z_p)]}.$$

Будем считать, что h и показатели $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ — целые положительные числа, удовлетворяющие вместе с числом p множителей в знаменателе следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} \mu_i &> h \left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right), \\ \sum \mu_i &< h \left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) + p. \end{aligned} \tag{5}$$

В силу неравенств (5) функция $\Lambda(z)$ может обращаться в бесконечность лишь в том случае, когда один из множителей в знаменателе обращается в нуль. Отсюда следует, что все полюсы этой функции — простые и содержатся среди точек

$$\frac{\alpha_i z_1 + \beta_i}{\gamma_i z_1 + \delta_i}, \frac{\alpha_i z_2 + \beta_i}{\gamma_i z_2 + \delta_i}, \dots, \frac{\alpha_i z_p + \beta_i}{\gamma_i z_p + \delta_i}, \tag{6}$$

где

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

означает какую-то подстановку группы G .

Положим

$$F(z) = [f(z) - a_1]^{\mu_1} [f(z) - a_2]^{\mu_2} \dots [f(z) - a_n]^{\mu_n}$$

$$= \frac{1}{[f(z) - f(z_1)][f(z) - f(z_2)] \dots [f(z) - f(z_p)]} =$$

$$= \frac{A_1}{f(z) - f(z_1)} + \frac{A_2}{f(z) - f(z_2)} + \dots + \frac{A_p}{f(z) - f(z_p)},$$
$$\begin{aligned}
A_1 + \dots + A_p &= 0, \\
A_1 f(z_1) + A_2 f(z_2) + \dots + A_p f(z_p) &= 0, \\
A_1 f^2(z_1) + A_2 f^2(z_2) + \dots + A_p f^2(z_p) &= 0, \\
&\vdots \\
A_1 f^{p-2}(z_1) + A_2 f^{p-2}(z_2) + \dots + A_p f^{p-2}(z_p) &= 0, \\
A_1 f^{p-1}(z_1) + A_2 f^{p-1}(z_2) + \dots + A_p f^{p-1}(z_p) &= 1.
\end{aligned} \tag{7}$$
$$\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i},$$
$$\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{k+1}} (\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(k+1)}.$$
$$\Lambda(z) = \sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)}}{z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} + G(z), \quad (8)$$
$$\Lambda(z)\varphi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^p \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{\varphi\left(\frac{\alpha_i z_n + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)}{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{2(h+1)}} \frac{1}{z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} + G(z). \quad (9)$$

Пусть R_i — различные многоугольники, которые либо целиком, либо частично попадают внутрь фундаментального круга.

Совокупность таких многоугольников образует некоторую многоугольную фигуру S , зависящую лишь от радиуса r окружности C . Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{\Lambda(z) \varphi(z) dz}{z - x}$$

по контуру фигуры S . Сформулированную выше теорему можно считать доказанной, если мы установим, что при r , стремящемся к 1, т. е. к радиусу фундаментальной окружности, интеграл стремится к 0.

Для этого нам необходимо выяснить:

- 1) остается ли периметр фигуры S конечным при любом r ;
- 2) будет ли модуль подынтегральной функции меньше некоторой величины M , когда точка z принадлежит контуру интегрирования;
- 3) будет ли величина M стремиться к 0, когда r стремится к 1.

По лемме IV (раздел I), число многоугольников R_i , частично или полностью попадающих внутрь окружности C , меньше величины

$$N = \frac{\pi}{4\sigma} (e^{2(R+\lambda)} + e^{-2(R+\lambda)} - 2),$$

где σ и λ — константы, а R определяется из уравнения

$$r = \frac{e^{2R} - 1}{e^{2R} + 1}.$$

Следовательно, число сторон фигуры S заведомо меньше $2nN$. Пусть l_i — длина одной из сторон многоугольника R_i , l_0 — длина соответствующей стороны многоугольника R_0 . Наконец, пусть $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ — подстановка группы G , соответствующая многоугольнику R_i . Тогда

$$l_i < l_0 H,$$

где H — наибольшее значение, которое может принимать

$$\bmod \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2},$$

когда переменная z пробегает сторону l_0 .

Предположим, что многоугольник R_0 расположен целиком внутри окружности с центром в начале координат и радиусом

$$\frac{e^{2A} - 1}{e^{2A} + 1}.$$

По лемме V (раздел I)

$$H < \frac{e^{2A} + e^{-2A} + 2}{e^{2R} + e^{-2R} + 2}.$$

Если L — длина наибольшей стороны многоугольника R_0 , то периметр фигуры S меньше

$$2nNHL$$

и тем более меньше

$$\frac{2n\pi L}{\sigma} (e^{2A} + e^{-2A} + 2) \frac{2e^{2(R+\lambda)}}{e^{2R}}.$$

Следовательно, он конечен, что и требовалось доказать.

Относительно x , очевидно, необходимо предположить, что эта точка не принадлежит ни одному из контуров интегрирования. Тогда функция $\varphi(z)/(z-x)$ будет рациональной, вполне определенной и не будет обращаться в бесконечность ни при каком значении переменной, отвечающем точкам контуров интегрирования. Нетрудно найти верхний предел M_1 модуля этой функции.

Можно также предположить, что функция $\Lambda(z)$ не обращается в бесконечность ни в одной из точек периметра R_0 , и найти верхний предел M_2 модуля $\Lambda(z)$, когда z пробегает периметр многоугольника R_0 . Но справедливо тождество

$$\Lambda\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = \Lambda(z) \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^{2h}}.$$

Отсюда следует, что, когда z описывает контур S , модуль $\Lambda(z)$ остается меньше

$$M_2 H^h,$$

и подынтегральная функция — меньше

$$M = M_1 M_2 H^h.$$

Кроме того, при r , стремящемся к 1, M стремится к 0, поскольку M_1 и M_2 — постоянные, а H стремится к 0.

Таким образом, теорема доказана.

Второе доказательство. Пусть

$$\Phi(z, a) = \sum_i \frac{\varphi\left(\frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}\right)}{z - \frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}} \frac{1}{(\gamma_i a + \delta_i)^{2(h+1)}}.$$

Если в этом выражении z рассматривать как постоянную, то $\Phi(z, a)$ будет тэта-фуксовой функцией относительно a . Предположим сначала, что z и a лежат внутри фундаментального круга. Тогда тэта-фуксова функция $\Phi(z, a)$ будет обращаться в бесконечность лишь при $a=z$ и в соответствующих точках, т. е. при $f(a)=f(z)$. Вычет в полюсе $z=a$ равен $-\varphi(z)$. Следовательно,

$$\Phi(z, a) = \frac{[f'(a)]^{h+1}}{f(z) - f(a)} \frac{\vartheta_q[f(a)]}{F_1(a)} \frac{F_1(z) \varphi(z)}{\vartheta_q[f(z)] [f'(z)]^h}. \quad (10)$$

В выражении (10) $F_1(a)$ означает следующее произведение:

$$[f(a) - a_1]^{\lambda_1} [f(a) - a_2]^{\lambda_2} \dots [f(a) - a_n]^{\lambda_n},$$

а $\vartheta_q[f(a)]$ — многочлен степени q относительно $f(a)$, коэффициенты которого могут быть функциями от z . Наконец, числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и q должны удовлетворять неравенствам (3):

$$\begin{aligned} \lambda_i &< (h+1) \left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right), \\ q &< \sum \lambda_i - (h+1) \left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) + 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Действительно, нетрудно видеть, что именно такой вид должна иметь всякая тэта-фуксова функция относительно a , обращающаяся в бесконечность лишь при $a=z$.

Сравнивая неравенства (3) и (11), находим

$$\lambda_i \leq \mu_i, \quad q < p.$$

Неравенство (9) мы установим, доказав, что функция $G(z)$ тождественно равна нулю, т. е. доказав тождество

$$\varphi(z) \Lambda(z) = \sum_{k=1}^p \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \Phi(z, z_k),$$

или

$$\varphi(z) \Lambda(z) = \sum_k \frac{A_k}{f(z) - f(z_k)} \frac{F(z_k)}{F_1(z_k)} \vartheta_q[f(z_k)] \frac{F_1(z) \varphi(z)}{\vartheta_q[f(z)] [f'(z)]^h}.$$

Правую часть можно упростить, предположив, что

$$\lambda_i = \mu_i.$$

Если бы этого равенства не было, то $F_1(a)$ и $\vartheta_q[f(a)]$ можно было бы умножить на

$$[f(a) - a_1]^{\mu_1 - \lambda_1} [f(a) - a_2]^{\mu_2 - \lambda_2} \dots [f(a) - a_n]^{\mu_n - \lambda_n}.$$

При этом степень многочлена $\vartheta_q[f(a)]$ возросла бы, но осталась по-прежнему меньше p .

Поэтому мы всегда можем считать, что

$$\lambda_i = \mu_i,$$

и, следовательно,

$$F(z) = F_1(z),$$

неизменно предполагая, что

$$p > q.$$

Это позволяет упростить тождество, которое мы намереваемся доказать, и представить его в виде

$$\sum_k \frac{A_k}{f(z) - f(z_k)} \frac{F(z) \varphi(z)}{[f'(z)]^h} = \sum_k \frac{A_k}{f(z) - f(z_k)} \frac{\vartheta_q[f(z_k)]}{\vartheta_q[f(z)]} \frac{F(z) \varphi(z)}{[f'(z)]^h}.$$

Введем новое обозначение:

$$\frac{\vartheta_q[f(z_k)] - \vartheta_q[f(z)]}{f(z) - f(z_k)} = P[f(z_k)].$$

Величина P есть многочлен относительно $f(z_k)$ степени $q - 1$, не превосходящей, следовательно, числа $p - 2$. Наше тождество можно записать в виде

$$\sum A_k P[f(z_k)] = 0,$$

в котором оно в силу соотношений (7) становится очевидным. Итак, сформулированная ранее теорема доказана еще раз.

Второе доказательство совершенно естественно подводит нас к важной теореме о тэта-фуксовых функциях второго типа. Пусть

$$\sum H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) (\gamma_i z + \delta_i)^{-2(h+1)} \quad (12)$$

— ряд, в котором H означает рациональную функцию, не обращающуюся в бесконечность внутри фундаментального круга. Мы уже знаем, что такой ряд задает тэта-фуксову функцию, не обращающуюся в бесконечность. Ее можно представить в виде

$$[f'(z)]^{h+1} \frac{\vartheta_{q-1}[f(z)]}{F(z)}, \quad (13)$$

где ϑ_{q-1} — многочлен степени $q - 1$ относительно $f(z)$, а q — наибольшее из целых чисел, удовлетворяющих неравенствам (11).

Всякое выражение вида (13) можно представить в виде линейной комбинации q таких же выражений. Следовательно, всякую функцию (12) можно представить в виде линейной комбинации q функций того же вида. При этом можно сделать два предположения: либо всякое выражение (13) можно привести к виду (12), причем само выражение (12) не представимо в виде $q - 1$ таких же функций; либо не всякое выражение (13) можно привести к виду (12), но само выражение (12) представимо в виде линейной комбинации $q - 1$ аналогичных функций.

Второе предположение следует отвергнуть.

Действительно, предположим, что оно верно. Пусть

$$\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{q-1}$$

есть $q - 1$ функций (12), таких, что все остальные функции того же вида представимы в виде их линейной комбинации.

Поскольку последнее соотношение справедливо при любом выборе подстановки $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ из группы G , необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} F(x),$$

где функция $F(x)$ рациональна по x .

Но $\Lambda(z)$ может обращаться в бесконечность лишь в q различных точках $z_1, z_2, \dots, z_q$. Функция же $\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} F(x)$, как нетрудно видеть, должна обращаться в бесконечность более чем в q различных точках. Следовательно, предположение, сделанное вначале, неверно.

Итак, всякое выражение (13) можно всегда привести к виду (12).

Это означает, что любую функцию вида (1) можно всегда задать с помощью ряда (5) (раздел I, стр. 75), если только $m > 1$.

Пусть теперь ряд (5) (раздел I) задан. Как реально привести его к виду (1).

Итак, мы имеем ряд $\Theta(z)$ вида (5) из раздела I. Требуется представить его в виде

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x).$$

Прежде всего нам известны полюсы ряда $\Theta(z)$ и соответствующие им вычеты, но этого недостаточно, чтобы полностью определить функцию $F(x)$: в последнюю еще входит рациональная функция с несколькими неопределенными коэффициентами. Поэтому сначала можно вычислить достаточно много значений ряда $\Theta(z)$, чтобы получить уравнения для отыскания этих коэффициентов. Проще всего поступить следующим образом. Рассмотрим функцию

$$\Theta(z) \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-m} = F(x).$$

Она обращается в бесконечность не только при обращении в бесконечность функции $\Theta(z)$, но и в том случае, когда производная dx/dz становится равной нулю, т. е. при

$$z = \alpha_1, \quad z = \alpha_2, \quad \dots, \quad z = \alpha_n.$$

Разложим ряд $\Theta(z) \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-m}$ по возрастающим степеням $z - \alpha_i$ и вычислим коэффициенты при всех отрицательных степенях. Коль скоро эти коэффициенты так же, как первые коэффициенты разложения x по степеням $z - \alpha_i$, известны, функция $F(x)$ также известна.

Но для того чтобы найти сами коэффициенты, необходимо вычислить несколько значений ряда $\Theta(z)$ и аналогичных ему рядов. Однако имеется случай, когда эту трудность удастся обойти.

Рассмотрим функцию

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} \frac{F(z)}{[f(z) - f(z_1)][f(z) - f(z_2)] \dots [f(z) - f(z_p)]},$$

уже исследовавшуюся нами ранее. Мы доказали тогда следующее тождество:

$$\Lambda(z) = \sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)}}{z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}}. \quad (8)$$

Продифференцируем его $2h+1$ раз по z , тогда

$$\frac{1}{(2h+1)!} \frac{d^{2h+1} \Lambda}{dz^{2h+1}} = - \sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)}}{\left(z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)^{2(h+1)}}. \quad (16)$$

Правую часть можно записать в виде

$$- \sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z - \alpha_i)^{-2(h+1)}}{\left(z_k - \frac{-\delta_i z + \beta_i}{\gamma_i z - \alpha_i}\right)^{2(h+1)}}.$$

Заметим, что группа G наряду с подстановкой $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ содержит и обратную подстановку $\left(z, \frac{-\delta_i z + \beta_i}{\gamma_i z - \alpha_i}\right)$, в силу чего предыдущее выражение можно преобразовать к виду

$$- \sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z + \delta_i)^{2(h+1)}}{\left(z_k - \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^{2(h+1)}}.$$

Следовательно, правой частью тождества (16) служит ряд (5) из раздела I (стр. 75). Остается еще преобразовать левую часть этого тождества к виду (1). Это требует несложных выкладок. Приведем результат для случая $h=1$ и $h=2$. Пусть

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} \Lambda_0(z),$$

и пусть $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ — последовательные производные функции Λ_0 по z . Запишем уравнение

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v \varphi(x). \quad (3bis)$$

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ означают последовательные производные функции φ по x . Тогда при $h=1$

$$\frac{d^3 \Lambda}{dz^3} = (\Lambda_3 - 2\Lambda_0 \varphi_1 - 4\Lambda_1 \varphi) \left(\frac{dx}{dz}\right)^2, \quad (17)$$

при $h = 2$

$$\begin{aligned} \frac{d^5 \Lambda}{dz^5} = & (\Lambda_5 - 20\Lambda_3\varphi - 30\Lambda_2\varphi_1 - 18\Lambda_1\varphi_2 - 4\Lambda_0\varphi_3 + \\ & + 64\Lambda_1\varphi^2 + 64\Lambda_0\varphi\varphi_1) \left(\frac{dx}{dz} \right)^2. \end{aligned} \quad (18)$$

С помощью различных методов можно найти бесконечно много соотношений, аналогичных соотношению (16). Например, это соотношение можно дифференцировать по параметрам $z_1, z_2, \dots, z_p$.

Теперь я хотел бы сформулировать последнюю задачу, которую мне удалось решить лишь отчасти.

Рассмотрим ряд (5) из раздела I:

$$\sum H \left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right) (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}.$$

Он зависит от рациональной функции H , поэтому я обозначу его

$$\Theta [z, H].$$

Как следует выбирать функцию H для того, чтобы ряд Θ был тождественно равен нулю?

Полное решение этой задачи, несомненно, было бы весьма сложным, однако в каждом частном случае можно воспользоваться следующими соображениями:

1. Если равенство

$$\Theta (z, H_1) = \Theta (z, H_2) = 0$$

выполняется тождественно, то одновременно с ним справедливо и равенство

$$\Theta (z, H_1 + H_2) = 0.$$

2. Если рациональную функцию H можно разложить в сходящийся ряд вида

$$k_1 H_1 + k_2 H_2 + \dots + k_n H_n + \dots, \quad (S)$$

где $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ — постоянные коэффициенты, а $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ — рациональные функции, такие, что

$$\Theta (z, H_n) = 0,$$

и если ряд (S) сходится всякий раз, когда z оказывается внутри фундаментальной окружности, то равенство

$$\Theta (z, H) = 0$$

выполняется тождественно.

3. Если справедливо тождество

$$\Theta (z, H) = 0$$

и $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ означает подстановку группы G , то, положив

$$H_1(z) = H\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)(\gamma z + \delta)^{-2m},$$

получим тождество

$$\Theta(z, H_1) = 0.$$

Действительно, обозначив для краткости

$$\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} = f_i(z), \quad \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = f_1(z), \quad \frac{-\delta z + \beta}{\gamma z - \alpha} = f_1^{-1}(z),$$

представим ряд (5) в виде

$$\Theta(z, H) = \sum H[f_1[f_i[f_1^{-1}(z)]]] \left[\frac{df_1[f_i[f_1^{-1}(x)]]}{dz} \right]^m.$$

Заменяем теперь в тождестве

$$\Theta(z, H) = 0$$

z на $f(z)$, тогда

$$0 = \sum H[f_1[f_i(z)]] \left[\frac{df_1[f_i(z)]}{df_i(z)} \right]^m \left[\frac{df_i}{dz} \right]^m \left[\frac{d(z)}{df_1(z)} \right]^m = \Theta(z, H) \left[\frac{dz}{df_1(z)} \right]^m,$$

что и доказывает требуемое тождество.

4. Вернемся к обозначениям, принятым в начале этого раздела. Пусть α_r означает некоторую вершину многоугольника R_0 , α'_r — вершину, симметричную ей относительно фундаментальной окружности. Одна из подстановок группы G записывается в виде

$$\left(\frac{z - \alpha_r}{z - \alpha'_r}, e^{\frac{2i\pi}{\beta_r} \frac{z - \alpha_r}{z - \alpha'_r}} \right),$$

где β_r — известное целое число. Если положить

$$H(z) = \left(\frac{z - \alpha_r}{z - \alpha'_r} \right)^p \frac{1}{(z - \alpha'_r)^{2m}},$$

то равенство

$$\Theta(z, H) = 0$$

будет выполняться тождественно, если только

$$p + m \equiv 0 \pmod{\beta_r}.$$

Действительно, рассмотрим различные подстановки (z, f_i) группы G . Можно выбрать бесконечную последовательность подстановок

$$(z, \varphi_0), (z, \varphi_1), (z, \varphi_2), \dots, (z, \varphi_n), \dots,$$

таких, чтобы каждую из функций $f_i(z)$ можно было однозначно задать с помощью соотношения

$$\frac{f_i - a_r}{f_i - a'_r} = e^{\frac{2hi\pi}{\beta_r} \frac{\varphi_k - a_r}{\varphi_k - a'_r}},$$

где h — целое число, меньшее или равное β_r . Тогда

$$\Theta(z, H) = \sum_i \frac{(f_i - a_r)^p}{(f_i - a'_r)^{p+2m}} \left(\frac{df_i}{dz} \right)^m,$$

или

$$\Theta(z, H) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{\beta_r} \frac{(\varphi_k - a_r)^p}{(\varphi_k - a'_r)^{p+2m}} \left(\frac{d\varphi_k}{dz} \right)^m e^{\frac{2h(p+m)i\pi}{\beta_r}}.$$

Но если сравнение

$$p + m \equiv 0 \pmod{\beta_r}$$

не имеет места, то

$$\sum_{h=1}^{\beta_r} e^{\frac{2h(p+m)i\pi}{\beta_r}} = 0.$$

Следовательно,

$$\Theta(z, H) = 0,$$

что и требовалось доказать.

5. Рассмотрим тождество

$$\varphi(z) \Lambda(z) = \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \Phi(z, z_k), \quad (9)$$

где

$$\Phi(z, z_k) = \sum_i \frac{\varphi \left(\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i} \right)}{z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} \frac{1}{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{2(h+1)}}$$

Полагая по очереди

$$\varphi(z) = 1 \quad \text{и} \quad \varphi(z) = \frac{1}{z - b},$$

где b — некоторая константа (точка b лежит вне фундаментального круга), получаем два тождества вида (9).

Умножим первое из них на $1/(z - b)$ и вычтем из него второе. Тогда

$$\sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \Psi(b, z_k) = 0, \quad (19)$$

если

$$\Psi(b, a) = \sum_i \frac{1}{b - \frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}} \frac{1}{(\gamma_i a + \delta_i)^{2(h+1)}}.$$

Далее, полагая

$$\Theta(b, a) = - \cdot \frac{d^{2h+1}\Psi}{db^{2h+1}} \frac{1}{(2h+1)!}$$

и дифференцируя соотношение (19) $2h+1$ раз по b , находим

$$\sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \Theta(b, z_k) = 0. \quad (20)$$

Но $\Theta(b, z_k)$ есть тэта-фуксова функция относительно b . Следовательно, левой частью тождества (20) является ряд вида (5) (раздел I). Итак, мы получили ряд указанного вида, который тождественно равен нулю, если постоянная b , играющая здесь роль независимой переменной, соответствует точке вне фундаментальной окружности. Нам же необходимо найти ряд вида (5) (раздел I), который тождественно равен нулю, когда независимая переменная остается *внутри* фундаментального круга. К счастью, перейти от одного случая к другому нетрудно. В самом деле, пусть

$$b = \frac{1}{z}.$$

Тогда

$$\frac{\alpha_i b + \beta_i}{\gamma_i b + \delta_i} = \frac{1}{\frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}},$$

где α'_i , β'_i , γ'_i и δ'_i означают величины, комплексно-сопряженные с α_i , β_i , γ_i и δ_i , так что подстановки $\left(z, \frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}\right)$ образуют группу G' , сопряженную G .

Точно так же, полагая

$$b_i = \frac{\alpha_i b + \beta_i}{\gamma_i b + \delta_i}, \quad z_i = \frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i},$$

находим

$$\frac{db_i}{db} = \frac{z^2}{z_i^2} \frac{dz_i}{dz}.$$

Следовательно,

$$\Theta(b, a) = \sum_i \frac{1}{(b_i - a)^{2h+2}} \left(\frac{db_i}{db}\right)^{h+1} = \sum_i \frac{z^{2h+2}}{(1 - az_i)^{2h+2}} \left(\frac{dz_i}{dz}\right)^{h+1},$$

или, если обозначить

$$\Theta'(z, a) = \sum_i \frac{1}{(1 - az_i)^{2h+2}} \left(\frac{dz_i}{dz} \right)^{h+1},$$

то

$$\Theta(b, a) = z^{2h+2} \Theta'(z, a).$$

Итак, мы пришли к следующему тождеству:

$$\sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \Theta'(z, z_k) = 0.$$

Поскольку Θ' — тэта-функции относительно z , мы получили тождество именно того вида, который требовался, однако функциям Θ' отвечает не группа G , а сопряженная ей группа G' . Перейдем от группы G' к группе G , подставив $\sqrt{-1}$ вместо $-\sqrt{-1}$. Тогда

$$\sum_k \left\{ \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \right\}' \Theta'_1(z, z'_k) = 0.$$

В этой формуле $\left\{ \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \right\}'$ и z'_k означают величины, комплексно сопряженные с $\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}}$ и z_k . Положив

$$\Theta'_1(z, a) = \sum \frac{1}{\left(1 - a \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^{2h+2}} \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^{2h+2}}$$

и

$$H(z) = \sum_k \left\{ \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \right\}' \frac{1}{(1 - z'_k z)^{2h+2}},$$

получим тождество

$$\Theta(z, H) = 0,$$

которое выполняется, если z находится внутри фундаментального круга.

6. Если имеет место тождество

$$\Theta(z, H) = 0,$$

и H зависит от произвольного параметра λ , то точно так же имеет место и тождество

$$\Theta\left(z, \frac{dH}{d\lambda}\right) = 0.$$

С помощью различных комбинаций этих шести принципов можно получить бесконечно много соотношений вида

$$\Theta(z, H) = 0.$$

VI. Первое семейство; род произволен

Функции первого семейства рода 0 мы рассмотрели потому, что они являются наиболее простыми из всех функций, и общие принципы, доказанные для столь простого частного случая, без труда переносятся на функции всех семейств и любых родов. Что же касается других фуксовых функций, то мы не будем останавливаться на них подробно и ограничимся рассмотрением лишь их наиболее замечательных свойств.

Если многоугольник R_0 , по-прежнему оставаясь многоугольником первого семейства, не имеет того простого вида, который был изучен нами в предыдущем разделе и не может быть к нему сведен, то соответствующие фуксовы функции будут функциями первого семейства, но род их будет больше 0.

Начнем с простого примера. Пусть многоугольник R_0 имеет $4n$ сторон, причем его противоположные стороны сопряжены. Тогда все его вершины образуют один-единственный цикл, так что сумма всех углов многоугольника R_0 равна 2π , деленному на некоторое целое число. Предположим сначала, что сумма углов равна в точности 2π . Тогда все фуксовы функции, связанные с многоугольником R_0 , можно выразить через две из них, которые мы обозначим x и y . Между x и y существует алгебраическое соотношение

$$\psi(x, y) = 0 \tag{1}$$

рода n .

Воспользуемся уравнением (3) из раздела IV. Его можно записать в виде

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(x, y) \tag{2}$$

и, обозначив через x' , x'' и x''' последовательные производные функции x по z , получить тождество

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} \frac{x'''x'}{(x')^4} - \frac{3}{4} \frac{(x'')^2}{(x')^4}. \tag{3}$$

Какой вид имеет функция $\varphi(x, y)$? Для простоты предположим, что функция y , зависящая от x и определяемая уравнением (1), имеет особые точки лишь самой простой природы, т. е. всякий раз, когда

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,$$

справедливы неравенства

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \neq 0$$

(они отвечают тому случаю, когда касательная к алгебраической кривой $\psi(x, y) = 0$ параллельна оси y и имеет с кривой касание лишь первого порядка), или же

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \neq 0$$

(что отвечает обычной двойной точке алгебраической кривой $\psi(x, y) = 0$).

Кроме того, предположим, что уравнение (1) порядка r , и при x , обращающемся в бесконечность, ему удовлетворяют r различных конечных значений отношения y/x (в случае алгебраической кривой $\psi(x, y) = 0$ это означает, что у кривой имеется r асимптотических направлений).

Сделанные нами предположения отнюдь не ограничивают общности. В самом деле, среди фуксовых функций, отвечающих группе G , можно бесконечно многими способами выбирать функции x и y , через которые все остальные функции будут выражаться рационально. Этот выбор всегда можно произвести так, чтобы удовлетворить сделанным только что предположениям.

Рассмотрим нашу функцию $\varphi(x, y)$. Ясно, что при x , обращающемся в бесконечность, она остается конечной. Точно так же она конечна и при x' , отличном от нуля. Но x' может обращаться в нуль лишь в том случае, когда одновременно выполняются соотношения:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \neq 0.$$

Итак, единственными полюсами функции $\varphi(x, y)$ являются особые точки уравнения (1). В число последних входят лишь обычные особые точки (но не двойные точки кривой (1)).

Рассмотрим один из таких полюсов. Пусть α , β и γ — соответствующие значения x , y и z . Нетрудно видеть, что разложение $x - \alpha$ начинается с члена $(z - \gamma)^2$, а разложение $y - \beta$ — с члена $z - \gamma$. Отсюда следует, что

$$\lim (y - \beta)^2 \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \varphi(x, y) = -\frac{3}{4} \quad (\text{при } x = \alpha, y = \beta).$$

Этих условий недостаточно для того, чтобы полностью определить функцию $\varphi(x, y)$. Необходимо наложить еще определенное число трансцендентных условий, подробное изучение которых составит предмет последующего мемуара. Кроме того, в другом мемуаре мы покажем, что если не налагать этих условий, но требовать, чтобы коэффициенты $\varphi(x, y)$ удовлетворяли некоторым неравенствам, то функция x , хотя и не будет фуксовой функцией от z , но еще останется однозначной (клеиновой).

От скольких различных параметров зависит наша группа G ?

Чтобы задать многоугольник с $4n$ сторонами, необходимо $8n-3$ условий. Но наш многоугольник R_0 не является произвольным. Он удовлетворяет $2n+1$ условиям, а именно: его противоположные стороны конгруэнтны, а сумма углов равна 2π . Следовательно, остается $6n-4$ произвольных параметров. Но в разделе IX мемуара о фуксовых группах мы показали, что одна и та же группа G может быть порождена бесконечно многими различными многоугольниками. В рассматриваемом случае многоугольник R_0 можно заменить другим многоугольником R'_0 с тем же числом сторон и того же вида, что и R_0 , но расположенным в другом месте на плоскости. Поэтому группе G отвечает двукратно бесконечное множество многоугольников R_0 , и число параметров группы G на 2 меньше числа параметров многоугольника R_0 . Итак, группа G зависит от $6n-6$ параметров.

От скольких параметров зависит соотношение (1)? Разумеется, мы не считаем различными два соотношения

$$\psi(x, y) = 0, \quad \psi_1(\xi, \eta) = 0,$$

если от одного из них к другому можно перейти с помощью однозначного преобразования, т. е. подстановкой вместо ξ и η рациональных функций от x и y . Из теории абелевых функций известно, что искомое число параметров для соотношения рода n равно $3n-3$. Однако речь идет о $3n-3$ комплексных параметрах, что соответствует $6n-6$ вещественным параметрам, т. е. число параметров, от которых зависит соотношение (1), в точности совпадает с числом параметров группы G . Следует ли отсюда, что параметры группы G можно всегда выбрать так, чтобы между x и y имело место именно то алгебраическое соотношение, которое требуется? В следующем мемуаре мы покажем, что дело обстоит именно так.

В частном случае, когда $n=1$, функции, строго говоря, не являются фуксовыми. Действительно, сумма углов криволинейного многоугольника R_0 , сторонами которого служат дуги окружностей, ортогонально пересекающихся с фундаментальной окружностью, меньше суммы углов прямолинейного многоугольника с тем же числом сторон. Для четырехугольника сумма углов должна быть меньше 2π . Мы же предположили, что сумма углов нашего криволинейного многоугольника с $4n$ сторонами равна 2π . Следовательно, при $n=1$ многоугольник R_0 должен стать прямолинейным, радиус фундаментальной окружности — обратиться в бесконечность, и четырехугольник R_0 — выродиться в обычный прямолинейный параллелограмм. Но тогда группа G вырождается в группу подстановок вида $(z, z + \alpha)$, а фуксовы функции переходят в двоякопериодические функции. В этом смысле можно сказать, что эллиптические функции являются частным случаем фуксовых функций.

Итак, пусть $n > 1$. Многоугольник R_0 может обладать симметрией различного рода. Прежде всего, он может быть симметричным относительно окружности, ортогонально пересекающейся с фундаментальной окружностью. В этом случае коэффициенты функций $\psi(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ вещественны. Предположим теперь, что R_0 симметричен относительно какой-либо точки или

может быть приведен к такому виду либо с помощью подходящей замены переменной z , либо с помощью правила из раздела IX мемуара о фуксовых группах. В этом случае соотношение (1) приводится к гиперэллиптическому соотношению

$$y^2 = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{2n}).$$

Обратное утверждение неверно.

Рассмотрим теперь абелев интеграл первого рода

$$\int g(x, y) dx \quad (4)$$

и заменим x и y их выражениями через z . Тогда

$$\int g(x, y) dx = \int g(z) \frac{dx}{dz} dz = G(z),$$

где $g(z)$ означает фуксову функцию от z , а $G(z)$ — однозначную функцию от z , голоморфную внутри фундаментального круга и не существующую вне его.

Пусть $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ — подстановка фуксовой группы. Справедливо тождество

$$G\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = G(z) + K_i,$$

где K_i — один из периодов абелева интеграла. Таким образом, каждой подстановке нашей группы отвечает период абелева интеграла (4).

То же можно рассматривать и с иной точки зрения. Пусть ab — сторона многоугольника R_0 . Тогда

$$\int_a^b g(z) \frac{dx}{dz} dz = G(b) - G(a),$$

и $G(b) - G(a)$ служит одним из периодов абелева интеграла (4). Итак, каждой стороне многоугольника R_0 отвечает один из периодов абелева интеграла (4).

Если cd — сторона, сопряженная ab , то, очевидно,

$$G(b) - G(a) = G(c) - G(d).$$

Отсюда следует, что две сопряженные стороны отвечают одному и тому же периоду, взятому с противоположными знаками, а $2n$ пар сопряженных сторон нашего многоугольника отвечают фундаментальной системе $2n$ периодов интеграла (4). Но эти периоды не являются нормальными.

Правило из раздела IX мемуара о фуксовых группах позволяет установить, что среди многоугольников, эквивалентных R_0 , имеется один особенно замечательный. Рассмотрим многоугольник R'_0 с $4n$ сторонами и вер-

шинами (обход периметра совершается в положительном направлении) в точках

$$a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, \dots, a_n, b_n, c_n, d_n.$$

Для большей симметрии в обозначениях последнюю вершину будем называть и вершиной d_n , и вершиной d_0 . Предположим, что сторона $d_{i-1}a_i$ сопряжена со стороной c_ib_i , а сторона a_ib_i — со стороной d_ic_i . Иначе говоря, сторона с номером $4p+1$ сопряжена со стороной $4p+3$, а сторона с номером $4p+2$ — со стороной $4p+4$. Нетрудно видеть, что все вершины такого многоугольника принадлежат одному и тому же циклу и что род многоугольника R'_0 равен n . Предположим, кроме того, что сумма углов равна 2π . Легко видеть, что тогда многоугольник R'_0 с помощью правила из раздела IX может быть приведен к многоугольнику типа R_0 .

Рассмотрим теперь два абелевых интеграла первого рода

$$\int g(x, y) dx = \int g(z) \frac{dx}{dz} dz = G(z), \quad (4)$$

$$\int g_1(x, y) dx = \int g_1(z) \frac{dx}{dz} dz = G_1(z). \quad (5)$$

Положим

$$\begin{aligned} \int_{d_{i-1}}^{a_i} g(z) \frac{dx}{dz} dz &= - \int_{b_i}^{c_i} g(z) \frac{dx}{dz} dz = G(a_i) - G(d_{i-1}) = A_i, \\ \int_{a_i}^{b_i} g(z) \frac{dx}{dz} dz &= - \int_{c_i}^{d_i} g(z) \frac{dx}{dz} dz = G(b_i) - G(a_i) = B_i, \\ \int_{d_{i-1}}^{a_i} g_1(z) \frac{dx}{dz} dz &= - \int_{b_i}^{c_i} g_1(z) \frac{dx}{dz} dz = G_1(a_i) - G_1(d_{i-1}) = A'_i, \\ \int_{a_i}^{b_i} g_1(z) \frac{dx}{dz} dz &= - \int_{c_i}^{d_i} g_1(z) \frac{dx}{dz} dz = G_1(b_i) - G_1(a_i) = B'_i. \end{aligned}$$

Периоды A_i, B_i, A'_i, B'_i интегралов (4) и (5) соответствуют различным сторонам многоугольника R'_0 .

Интеграл

$$\int G_1(z) g(z) \frac{dx}{dz} dz,$$

взятый вдоль периметра многоугольника R'_0 , должен быть равен нулю, и, вычисляя этот интеграл, мы без труда получим известное тождество

$$\sum_i (A_i B'_i - B_i A'_i) = 0,$$

означающее, что периоды $A_i, B_i, \dots$ нормальны.

Я не буду останавливаться на соображениях, показывающих, какую пользу можно извлечь из фуксовых функций для изучения абелевых интегралов.

Предположим теперь, что сумма углов многоугольника R_0 больше не есть 2π , а равна $2\pi/\beta$, где β — некоторое целое число.

Посмотрим, какие изменения вызовет эта гипотеза в ранее полученных результатах. Соотношение (1) будет по-прежнему рода n . Функция $\varphi(x, y)$ также будет обладать теми же свойствами, что и раньше, с той лишь разницей, что при $x=a, y=b$, т. е. при значениях x и y , отвечающих вершинам многоугольника R_0 , $\varphi(x, y)$ должна теперь обращаться в бесконечность.

Следовательно,

$$\lim (x-a)^2 \varphi(x, y) = -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \quad (\text{при } x=a, y=b).$$

Таким образом, особыми точками уравнения (3) будут особые точки соотношения (1) и точка (a, b) .

Рассмотрим теперь многоугольник R_0 , принадлежащий к первому семейству, а в остальном произвольный. Пусть $2n$ — число его сторон, p — число циклов. Предположим, что, вычисляя суммы углов для различных циклов, мы получили для первого, второго и т. д., ..., p -го цикла $2\pi/\beta_1, 2\pi/\beta_2, \dots, 2\pi/\beta_p$. Фуксовы функции, порождаемые таким многоугольником R_0 , рационально выражаются через две из них, которые мы обозначим x и y . Между x и y существует алгебраическое соотношение

$$\psi(x, y) = 0 \tag{1}$$

рода

$$P = \frac{n - p + 1}{2}.$$

Пусть $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_p, b_p)$ — значения, которые принимают x и y , когда z совпадает с одной из вершин первого, второго, ..., p -го цикла.

Обозначим через (c_i, d_i) аналитические точки, в которых

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \neq 0,$$

а через (e_i, f_i) — аналитические точки, в которых

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Относительно функции $\psi(x, y)$ будем придерживаться сделанных ранее предположений и считать, что степень ее равна r . Тогда число точек c_i, d_i равно

$$r(r-1) + 2P - (r-1)(r-2) = 2r + 2P - 2,$$

а число точек e_i, f_i равно

$$\frac{(r-1)(r-2)}{2} - P.$$

Запишем уравнение (3):

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v \varphi(x, y).$$

Функция $\varphi(x, y)$, рациональная относительно x и y , должна обращаться в бесконечность при

1) $x=c_i, y=d_i$; тогда

$$\lim (y-d_i)^2 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \varphi(x, y) = -\frac{3}{4} \quad (\text{при } x=c_i, y=d_i);$$

2) $x=a_i, y=b_i$; тогда

$$\lim (x-a)^2 \varphi(x, y) = \frac{1-\beta_i^2}{4\beta_i^2} \quad (\text{при } x=a_i, y=b_i).$$

Число условий, которые необходимо наложить на группу G для того, чтобы x и y удовлетворяли данному соотношению (1), а величины (a_i, b_i) и целые числа β_i имели заданные значения, равно $6P-6+2p$. Число параметров, от которых зависит группа G , также равно $6P-6+2p$. Отсюда непосредственно не следует, что этими параметрами можно распорядиться так, чтобы удовлетворить всем $6P-6+2p$ условиям. Но в следующем memoirе я покажу, что на самом деле все обстоит именно так и что *всегда* существуют две фуксовы функции x и y , отвечающие одной и той же группе G , удовлетворяющие *заданному* алгебраическому соотношению

$$\psi(x, y) = 0,$$

и такие, что их $\beta_1-1, \beta_2-1, \dots, \beta_p-1$ первых производных ($\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ — заданные целые числа) обращаются в нуль в P заданных точках $(x=a_1, y=b_1), (x=a_2, y=b_2), \dots, (x=a_p, y=b_p)$.

Рассмотрим тэта-фуксовы функции. Они имеют вид

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x, y), \tag{6}$$

где F — рациональная функция от x и y .

При каких условиях тэта-фуксова функция будет функцией второго типа, т. е. останется голоморфной внутри фундаментального круга? Функцию $F(x, y)$ всегда можно представить в виде

$$\frac{P(x, y)}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^m (x-a_1)^{\lambda_1} (x-a_2)^{\lambda_2} \dots (x-a_p)^{\lambda_p}},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ — наибольшие целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\lambda_i \leq m \left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right).$$

Нетрудно установить, какие условия необходимы и достаточны для того, чтобы функция (6) была функцией второго типа.

1. Рациональная функция $P(x, y)$ должна быть многочленом.

2. $p(r-1)$ точек пересечения кривой $\psi(x, y)=0$ с прямыми $x=a_1, x=a_2, \dots, x=a_r$ (не считая особых точек $(x=a_1, y=b_1), (x=a_2, y=b_2), \dots, (x=a_p, y=b_p)$) должны лежать на кривой $P(x, y)=0$. Последняя должна иметь с кривой $\psi(x, y)=0$ касание (λ_i-1) -го порядка в точке пересечения $\psi(x, y)=0$ с прямой $x=a_i$ (точка пересечения считается отличной от особой точки $x=a_i, y=b_i$).

Таким образом, для многочлена $P(x, y)$ имеется

$$(r-1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p) = (r-1) \sum \lambda_i$$

условий.

3. Степень многочлена $P(x, y)$ не должна превосходить числа

$$\sum \lambda_i + m(r-3).$$

4. Рассмотрим точки $x=e_i, y=f_i$, т. е. двойные точки кривой $\psi(x, y)=0$. Они должны лежать на кривой $P(x, y)=0$ и даже быть для нее (поскольку $m > 1$) двойными точками. Наконец, две ветви кривой $P=0$ должны иметь с соответствующими двумя ветвями кривой $\psi=0$ касание порядка $m-2$. Это приводит к $2m-1$ условиям на многочлен $P(x, y)$ в каждой из двойных точек $x=e_i, y=f_i$, т. е. всего к

$$(2m-1) \left[\frac{(r-1)(r-2)}{2} - P \right]$$

условиям.

Многочлен степени $\sum \lambda + m(r-3)$ зависит от

$$\frac{1}{2} \left[\sum \lambda + m(r-3) + 1 \right] \left[\sum \lambda + r(r-3) + 2 \right]$$

параметров. Однако, если учесть соотношения (1) и

$$\sum \lambda + m(r-3) \geq r, \quad (7)$$

то число параметров понизится до

$$r \sum \lambda + \left(m - \frac{1}{2}\right) r(r-3).$$

Но наш многочлен удовлетворяет, с одной стороны, $(r-1) \sum \lambda$, а с другой — $(2m-1) \left[\frac{(r-1)(r-2)}{2} - P \right]$ условиям. Следовательно, он содержит лишь

$$\sum \lambda + (2m-1)(P-1) \quad (8)$$

произвольных параметров. Однако выражение (8) определяет лишь нижний предел числа произвольных параметров, реально остающихся у многочлена. Причины тому могут быть разные.

1. Может случиться, что условие (7) не выполнено. Тогда число оставшихся произвольных параметров многочлена будет определяться не выражением

$$\sum \lambda + (2m-1)(P-1),$$

а

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\sum \lambda + m(r-3) + 1 \right] \left[\sum \lambda + m(r-3) + 2 \right] - \\ - (r-1) \sum \lambda - (2m-1) \left[\frac{(r-1)(r-2)}{2} - P \right]. \end{aligned}$$

Второе выражение отличается от первого членом

$$\frac{1}{2} \left[\sum \lambda + m(r-3) - r + 1 \right] \left[\sum \lambda + m(r-3) - r + 2 \right].$$

Отсюда следует, что оба выражения не отличаются друг от друга, если

$$\sum \lambda + m(r-3) - r = -1 \text{ или } -2.$$

Таким образом, выражение (8) перестает определять число оставшихся произвольных параметров, если

$$\sum \lambda + (m-1)r - 3m < -2.$$

Это неравенство вместе с неравенствами $m \geq 2$, $r \geq 3$ приводит к соотношениям

$$r = 3, \quad \sum \lambda = 0.$$

Но равенства $r=3$, $P=1$, $\sum \lambda=0$ (следовательно, все λ_i также равны 0) отвечают оставляемому нами в стороне случаю эллиптических функций.

2. Может также возникнуть вопрос, все ли из

$$(r-1) \sum \lambda + (2m-1) \left[\frac{(r-1)(r-2)}{2} - P \right]$$

условий, наложенных на наш многочлен, различны. Эту трудность можно обойти следующим образом. Если N — число различных нулей выражения (6), то верхний предел числа оставшихся произвольных параметров

того же выражения, очевидно, равен $N-1$. Но этот предел можно еще понизить. Действительно, когда z попадает в одну из вершин многоугольника R_0 , выражение (6) обращается в нуль. Именно эти нули не являются произвольными. Следовательно, если N' — число существенно различных нулей, совпадающих с вершинами многоугольника R_0 , то в качестве верхнего предела следует взять $N-N'+1$. Однако и это еще не все. Возьмем рациональную функцию от x и y , имеющую q нулей и q полюсов. Теория абелевых интегралов утверждает, что выбрать произвольно все q нулей и q полюсов нельзя: достаточно знать q полюсов и $q-P$ нулей, чтобы однозначно указать остальные P нулей. Но $N-N'$ нулей выражения (4) совпадают с нулями рациональной функции

$$\frac{P(x, y)}{[F'(y)]^m (x-a_1)^{\lambda_1} (x-a_2)^{\lambda_2} \dots (x-a_p)^{\lambda_p}},$$

полюсы которой известны. Отсюда следует, что достаточно знать лишь $N-N'-P$ нулей для того, чтобы мы могли найти все остальные. Таким образом, окончательно наш верхний предел равен $N-N'-P+1$.

С помощью принципов, перечисленных в разделе IV, находим:

$$N = m \left(n - 1 - \sum \frac{1}{\beta_i} \right),$$

$$N' = \sum \frac{m(\beta_i - 1) - \lambda_i \beta_i}{\beta_i} = mp - m \sum \frac{1}{\beta_i} - \sum \lambda,$$

$$N - N' - P + 1 = \sum \lambda + (2m - 1)(P - 1).$$

Эти равенства означают, что верхний предел совпадает с найденным выше нижним пределом. Исключение составляет лишь не рассматриваемый нами случай эллиптических функций, когда $\sum \lambda = 0$, $P = 1$.

Отсюда следует, что все тэта-фуксовы функции второго типа (как представимые, так и непредставимые в виде ряда (5) (раздел I)) могут быть линейно выражены через $\sum \lambda + (2m - 1)(P - 1)$ из них.

Рассмотрим функцию вида

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz} \right)^{1-m} F(x, y),$$

где F означает рациональную функцию от x и y , и попытаемся установить, каково минимальное число полюсов этого выражения.

Предположим, что вершины многоугольника R_0 не являются полюсами функции $\Lambda(z)$. Для того чтобы число полюсов достигло своего минимума, необходимо, чтобы число нулей также было минимально. Следовательно, вершины многоугольника R_0 должны быть нулями как можно меньшей кратности, а вне вершин также должно быть по возможности

меньше нулей. Для того чтобы удовлетворить этим требованиям, положим (что всегда возможно)

$$F(x, y) = \frac{(x - a_1)^{\lambda_1} (x - a_2)^{\lambda_2} \dots (x - a_p)^{\lambda_p} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^{m-1}}{P(x, y)},$$

где λ — именно те целые числа, которые мы определили выше. Следующие условия необходимы и достаточны для того, чтобы число нулей было минимальным.

1. $P(x, y)$ должен быть многочленом степени

$$\sum \lambda + (m - 1)(r - 3).$$

2. Кривая $P=0$ должна проходить через все точки пересечения кривой $\psi=0$ с прямыми $x=a_1, x=a_2, \dots, x=a_p$, отличные от особых точек $(x=a_i, y=b_i)$, причем в общих точках кривые $P=0$ и $\psi=0$ должны иметь касание порядка $\lambda_i - 1$.

3. Наконец, кривая $P=0$ должна иметь те же двойные точки, что и кривая $\psi=0$, так что ее ветви, пересекающиеся в этих двойных точках, должны иметь с соответствующими ветвями кривой $\psi=0$ касание порядка $m-2$.

Этим условиям можно действительно удовлетворить, поскольку многочлен $P(x, y)$, как мы показали, содержит

$$r \sum \lambda + \left(m - \frac{3}{2} \right) r (r - 3)$$

параметров, а мы наложили на него лишь

$$(r - 1) \sum \lambda + \left(m - \frac{3}{2} \right) [(r - 1)(r - 2) - 2P]$$

условий. Следовательно, у многочлена $P(x, y)$ остается

$$\sum \lambda + (2m - 3)(P - 1)$$

произвольных параметров. Кроме того, как нетрудно видеть, при наложенных условиях число различных нулей и, следовательно, число различных полюсов минимально, поскольку число различных нулей, совпадающих с вершинами многоугольника R_0 , является наименьшим из возможных, а вне вершин нулей нет вообще. Применяя правило из раздела III, находим, что минимум числа полюсов равен

$$J = \sum \lambda + (2m - 2)(P - 1).$$

Поскольку многочлен $P(x, y)$ зависит лишь от $\sum \lambda + (2m - 3)(P - 1)$ параметров, наши J различных полюсов не могут быть выбраны произвольно, и знание $J - P$ из них достаточно для того, чтобы полностью определить остальные P . Следовательно, функцию Λ в общем случае

нельзя определить так, чтобы она имела J заданных и не имела бы других полюсов.

Каково наименьшее число J' , при котором функцию можно было бы всегда определить так, чтобы она имела ровно J' заданных полюсов? Функция Λ имеет на $J' - J$ нулей и на $J' - J$ полюсов больше, чем функции того же вида, имеющие лишь J полюсов. Следовательно, она содержит на $2J' - 2J$ параметров больше, чем эти функции. Общее число ее параметров равно

$$2J' - 2J + \sum \lambda + (2m - 3)(P - 1).$$

Подставляя вместо J его значение, равное

$$2J' - \sum \lambda - (2m - 1)(P - 1),$$

находим

$$2J' - \sum \lambda - (2m - 1)(P - 1) \geq J' + 1,$$

или

$$J' \geq \sum \lambda + (2m - 1)(P - 1) + 1. \quad (9)$$

Таков искомый нижний предел числа J' .

Теперь мы уже в состоянии ответить на один важный вопрос, возникающий вполне естественно. Как мы уже видели, все выражения вида (6), не имеющие полюсов, можно представить в виде линейной комбинации $\sum \lambda + (2m - 1)(P - 1)$ из них. Все тэта-фуксовы ряды вида (5) (раздел I) второго типа можно преобразовать к виду (6) и, следовательно, линейно выразить через $\sum \lambda + (2m - 1)(P - 1)$ из них. Однако мы не знаем еще, все ли выражения, аналогичные выражению (6), не имеющие полюсов, можно задать в виде ряда (5) (раздел I). В противном случае все ряды вида (5) (раздел I) второго типа можно было бы представить в виде линейной комбинации

$$\sum \lambda + (2m - 1)(P - 1) - 1$$

из них. Сейчас мы покажем, что эта гипотеза неприемлема.

Действительно, из предыдущего раздела (стр. 105 и след.) известно, что все ряды вида (5) (раздел V) второго типа представимы в виде линейных комбинаций $q - 1$ из них. Зная это, можно было бы построить функцию

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(z),$$

где $F(z)$ — фуксова функция от z , имеющая лишь q заданных и не имеющая никаких других полюсов. Следовательно, если бы сделанное в начале предположение было возможно, то мы могли бы построить функцию $\Lambda(z)$, имеющую ровно

$$J' = \sum \lambda + (2m - 1)(P - 1)$$

заданных (и не имеющую никаких других) полюсов. Таким образом, число J' , вопреки доказанному ранее, не удовлетворяло бы неравенству (9).

Следовательно, всякое выражение вида (6), не обращающееся в бесконечность, можно задать в виде ряда (5) (раздел I) второго типа. Отсюда мы заключаем, что *любое выражение вида (6), независимо от того, имеет ли оно полюсы или нет, можно представить в виде ряда (5) (раздел I) первого или второго типа.*

Перейдем теперь к рассмотрению одного важного свойства функций типа $\Lambda(z)$. Эти функции обладают всегда бесконечным набором полюсов. Обозначим их через $z_1, z_2, \dots, z_i, \dots$. Для простоты предположим, что все полюсы простые и что соответствующие им вычеты равны $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$. Пусть $\varphi(z)$ — рациональная функция, не обращающаяся в бесконечность внутри фундаментального круга. Тогда справедливо тождество

$$\Lambda(z) \varphi(z) = \sum_i \frac{A_i \varphi(z_i)}{z - z_i}.$$

Доказывается оно так же, как в предыдущем разделе. Первое доказательство можно повторить, не изменяя ни слова; второе потребовало бы небольших изменений.

Члены в правой части предыдущего тождества можно сгруппировать более удобным образом. Действительно, пусть q — число различных полюсов функции $\Lambda(z)$. Пусть $z_1, z_2, \dots, z_q$ — эти точки, $A_1, A_2, \dots, A_q$ — соответствующие им вычеты. Тогда

$$\Lambda(z) \varphi(z) = \sum_k A_k \sum_i \frac{\varphi\left(\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)}{\left(z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right) (\gamma_i z_k + \delta_i)^{2m}}; \quad (10)$$

различные подстановки группы G в этой формуле обозначены через $(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i})$. Дифференцируя соотношение (10) $2n - 1$ раз по z , получим формулу, полностью аналогичную формуле (16) из предыдущего раздела. Слева стоит выражение вида (6), справа — ряд вида (5) (раздел I).

VII. Второе семейство; род 0

Рассмотрим многоугольник R_0 , вершины которого (их $2n$) расположены на фундаментальной окружности, а стороны образованы дугами окружностей, ортогонально пересекающихся с фундаментальной окружностью. Все углы нашего многоугольника заключены между двумя касательными друг к другу дугами этих окружностей и, следовательно, равны нулю. Предположим, что стороны p и $2n + 1 - p$ сопряжены. Тогда число циклов будет равно $n + 1$, из них два цикла содержат лишь по одной вершине: первый — вершину с номером 1, второй — вершину с номером $n + 1$.

Остальные $n-1$ циклов образованы двумя вершинами, а именно: вершинами p и $2n+2-p$.

Обозначив через S_p подстановку, которая сторону p переводит в сторону $2n+1-p$, мы получим n подстановок $S_1, S_2, \dots, S_n$ — образующих подстановок нашей группы G .

Далее, определим подстановки $S'_2, \dots, S'_n$ с помощью следующих равенств:

$$S'_2 = S_2 S_1^{-1}, \quad S'_3 = S_3 S_2^{-1}, \dots, S'_n = S_n S_{n-1}^{-1}$$

и для большей симметрии обозначений положим

$$S_1 = S'_1, \quad S_n = S'_{n+1}.$$

Обозначим i -ю вершину через α_i . Ясно, что α_i — неподвижная точка подстановки S'_i . Предположим, что $n+1$ подстановок $S'_1, S'_2, \dots, S'_{n+1}$ — *параболические*. Это было бы невозможно, если бы $2n$ точек α_i на фундаментальной окружности были выбраны произвольно. Точки α_i должны удовлетворять соотношению

$$\begin{aligned} (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_3) \dots (\alpha_{2p} - \alpha_{2p-1}) \dots (\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1}) = \\ = (\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_5 - \alpha_4) \dots (\alpha_{2p+1} - \alpha_{2p}) \dots (\alpha_{2n} - \alpha_1). \end{aligned} \quad (1)$$

При этих условиях R_0 будет многоугольником рода 0 первого типа второго семейства. Наша группа G и связанные с ней фуксовы функции будут рода 0 и второго семейства. Среди этих фуксовых функции так же, как в разделе X, можно выбрать одну функцию (обозначим ее $x=f(z)$), через которую все остальные будут выражаться рационально. Для определенности будем считать, что

$$f(\alpha_1) = 0, \quad f(\alpha_2) = 1, \quad f(\alpha_{n+1}) = \infty.$$

Кроме того, так же, как и в разделе X, положим

$$a_i = f(\alpha_i) = f(\alpha_{2n+2-i}),$$

откуда

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = \infty.$$

Функция

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

удовлетворяла линейному уравнению

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v \varphi(x), \quad (3bis)$$

где $\varphi(x)$ — рациональная функция от x . Каков в нашем случае вид функции $\varphi(x)$? Нетрудно видеть, что

$$\varphi(x) = \frac{P(x)}{[Q(x)]^2},$$

где $Q(x)$ означает произведение $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$, а $P(x)$ — многочлен степени $2n - 2$. Многочлен $P(x)$ должен удовлетворять следующим условиям:

$$1) \quad P(a_i) = \frac{1}{4} Q'^2(a_i);$$

2) коэффициент при x^{2n-2} в $P(x)$ должен быть равен $-1/4$.

Эти условия недостаточны для того, чтобы x был фуксовой функцией отношения интегралов уравнения (3bis). На $P(x)$ необходимо наложить еще $2n-4$ трансцендентных условий.

В другом мемуаре мы покажем, что группу G можно всегда выбрать так, чтобы числа $a_3, a_4, \dots, a_n$ имели любые заданные значения.

В частном случае, когда многоугольник R_0 симметричен относительно окружности, соединяющей точки α_1 и α_{n+1} и ортогонально пересекающейся с фундаментальной окружностью, все коэффициенты рациональной функции $\varphi(x)$ вещественны.

Если, кроме того, $n=2$, то $f(z)$ вырождается в модулярную функцию k^2 .

Исследуем, как ведут себя интегралы уравнения (3bis) в окрестности любой из особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n$. Интересующие нас интегралы, по терминологии Фукса и его учеников, являются *регулярными* и *логарифмическими*. Оба корня определяющего уравнения равны $1/2$, вследствие чего интегралы можно записать в виде

$$v_1 = (x - a_i)^{1/2} [P_i + Q_i \ln(x - a_i)]$$

и

$$v_2 = (x - a_i)^{1/2} Q_i,$$

где P_i и Q_i — голоморфные функции от $x - a_i$, из которых первая обращается в нуль при $x = a_i$, а вторая не обращается.

Кроме того, при $x = \infty$

$$v_1 = x^{1/2} (P_{n+1} + Q_{n+1} \ln x), \quad v_2 = x^{1/2} Q_{n+1},$$

причем P_{n+1} и Q_{n+1} означают здесь голоморфные функции от $1/x$, из которых первая обращается в нуль при $x = \infty$, а вторая в нуль не обращается.

Выразим теперь в окрестности каждой из этих особых точек z как функцию x . В окрестности $x = a_i$

$$z = \frac{\lambda Q_i + \mu [Q_i \ln(x - a_i) + P_i]}{\lambda' Q_i + \mu' [Q_i \ln(x - a_i) + P_i]};$$

$\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ — соответствующим образом подобранные константы. Предположим, что подстановка S'_i имеет вид

$$\left(\frac{1}{z - a_i}, \frac{1}{z - a_i} + \beta_i \right)$$

и положим

$$e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{(z-\alpha_i)\beta_i}} = t_i.$$

Запишем, что функция z при $x = a_i$ принимает значение α_i , а $\ln(x - a_i)$ под действием подстановки S'_i переходит в $\ln(x - a_i) + 2\pi\sqrt{-1}$. Тогда предыдущее соотношение преобразуется к виду

$$\frac{2\pi\sqrt{-1}}{(z-\alpha_i)\beta_i} = P'_i + \ln(x - a_i),$$

где P'_i — функция, голоморфная относительно $x - a_i$. Отсюда следует, что

$$t_i = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{(z-\alpha_i)\beta_i}} = Q'_i;$$

здесь Q'_i — некоторая функция, голоморфная относительно $(x - a_i)$. Разложение Q'_i по степеням $(x - a_i)$ начинается с члена $(x - a_i)$, коэффициент при котором никогда не может быть равным нулю. Но тогда

$$x = a_i + \Phi_i(t_i),$$

где Φ_i означает голоморфную функцию от t_i , разложение которой по степеням t_i начинается с члена первого порядка (причем коэффициент при линейном члене в нуль никогда не обращается). Такой вид имеет x как функция z в окрестности особой точки $x = a_i$. Точно так же, в окрестности $z = \alpha_{n+1}$, $x = \infty$ имеем

$$\frac{1}{x} = \Phi_{n+1}(t_{n+1});$$

Φ_{n+1} означает голоморфную функцию от t_{n+1} , разложение которой по степеням этой переменной начинается с отличного от нуля линейного члена. Предыдущее соотношение можно записать и в виде

$$x = \frac{1}{t_{n+1}} \Psi(t_{n+1}).$$

Здесь Ψ означает голоморфную функцию от t_{n+1} , не обращающуюся в нуль вместе с этой переменной. Что же касается производной dx/dz , то ее можно привести к аналогичному виду.

В окрестности $z = \alpha_i$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{(z - \alpha_i)^2} t_i \Phi'_i(t_i),$$

где Φ'_i — голоморфная функция от t_i , не обращающаяся в нуль при $t_i = 0$. Точно так же в окрестности $z = \alpha_{n+1}$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{(z - \alpha_{n+1})^2} \frac{\Psi'(t_{n+1})}{t_{n+1}},$$

где Ψ' означает голоморфную функцию от t_{n+1} , не обращающуюся в нуль при $t_{n+1} = 0$.

Перейдем теперь к изучению тэта-фуксовых функций.

Всякую функцию, представимую с помощью ряда (5) (раздел I), всегда можно преобразовать к виду

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x), \quad (2)$$

где F — рациональная функция от x .

Обратное неверно. Действительно, в разделе II мы показали, что любой ряд вида (5) (раздел I) в окрестности $z = \alpha_i$ можно представить следующим образом:

$$\frac{1}{(z - \alpha_i)^{2m}} R(t_i);$$

R — голоморфная функция от t_i , обращающаяся в нуль при $t_i = 0$. Это означает, что при $x = \alpha_i$ функция $(x - \alpha_i)^m F(x)$ должна обращаться в нуль, а при неограниченно возрастающем x функция $x^m F(x)$ должна стремиться к нулю. Таковы *необходимые* условия, которым должно удовлетворять выражение (2) для того, чтобы его можно было представить в виде ряда (5) (раздел I). Назовем их условиями A .

Предположим теперь, что функция (2) не имеет полюсов внутри фундаментального круга. Функция $F(x)$ должна иметь форму

$$\frac{\Pi(x)}{(x - \alpha_1)^{\lambda_1} (x - \alpha_2)^{\lambda_2} \dots (x - \alpha_n)^{\lambda_n}},$$

где $\Pi(x)$ — многочлен относительно x . Однако в силу условий A числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ не больше $m - 1$, а степень $\Pi(x)$ — не больше $n(m - 1) - m - 1$. Следовательно, все тэта-фуксовы ряды вида (5) (раздел I) и второго типа представимы в виде линейных комбинаций $n(m - 1) - m$ из них.

Однако мы еще не знаем, всякое ли выражение вида (2), не имеющее полюсов и удовлетворяющее условиям A , можно задать в виде ряда (5) (раздел I) и, следовательно, не можем утверждать, что ряды второго типа, имеющие вид (5), не могут быть линейно выражены через $n(m - 1) - m - 1$ из них.

Для того чтобы убедиться, что дело обстоит именно так, рассмотрим функцию

$$[\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x),$$

где F — некоторая рациональная функция. Чему равен минимум J' числа различных полюсов функции Λ в предположении, что она стремится к 0, когда z стремится к α_i ?

Запишем для F следующее выражение:

$$F(x) = \frac{(x - a_1)^{m-1} (x - a_2)^{m-1} \dots (x - a_n)^{m-1} \Pi(x)}{\Phi(x)},$$

где $\Pi(x)$ и $\Phi(x)$ означают два многочлена от x . Для того чтобы $\Lambda(z)$ стремилась к нулю при z , стремящемся к a_i , необходимо и достаточно, чтобы

$$\Phi(a_1), \Phi(a_2), \dots, \Phi(a_n)$$

не обращались в нуль, а степень числителя была на $m-1$ больше степени знаменателя. Но степень $\Phi(x)$ и есть число J' различных полюсов. Следовательно,

$$J' \geq n(m-1) - m + 1.$$

Я утверждаю, что ряды вида (5) (раздел I), принадлежащие ко второму типу, нельзя линейно выразить через $n(m-1) - m - 1$ из них, ибо в противном случае мы могли бы построить функцию, аналогичную $\Lambda(z)$, обладающую $n(m-1) - m$ различными особыми точками, что, как мы только что видели, невозможно. Отсюда (так же, как и в двух предыдущих разделах) мы заключаем, что всякое выражение вида (2), удовлетворяющее условиям A , можно представить в виде ряда (5) (раздел I).

Формула (10) предыдущего раздела применима и к рассматриваемым нами функциям. Доказывается она точно так же, как и в двух предыдущих разделах, при этом первое доказательство требует незначительных изменений, а второе воспроизводится дословно. Все следствия, полученные нами из формулы (10) в двух предыдущих разделах, в том числе формула (16) из раздела V, верны и в рассматриваемом случае.

Нетрудно видеть, как следовало бы обобщить изложенные принципы для функций второго и шестого семейства и произвольного рода. Это позволяет нам перейти к изучению фуксовых функций, существующих на всей плоскости.

VIII. Третье семейство

Наиболее простыми среди таких функций являются функции третьего семейства. Их мы и рассмотрим прежде всего.

Предположим, что нам заданы n пар окружностей $(c_1$ и $c'_1)$, $(c_2$ и $c'_2)$, $\dots$, $(c_n$ и $c'_n)$.

Будем считать, что ни одна из этих $2n$ окружностей не лежит внутри другой и что они ортогонально пересекаются с фундаментальной окружностью, и, следовательно, симметричны относительно центра последней. Рассмотрим n подстановок $S_1, S_2, \dots, S_n$, обладающих следующим свойством: все подстановки S_i оставляют неизменной фундаментальную окружность и переводят c_i в c'_i . Группа, порожденная подстановками S_i , будет фуксовой группой G . Ее производящий многоугольник R_0 представляет собой часть плоскости, расположенную внутри фундаментального

круга и вне окружностей s и s' . Многоугольник R_0 имеет $2n$ сторон первого рода, образованных дугами окружностей s и s' , лежащих вне фундаментального круга, и $2n$ сторон второго рода, образованных дугами фундаментальной окружности, расположенными вне различных окружностей s и s' . Все вершины многоугольника R_0 — третьей категории. Что же касается многоугольника R'_0 , симметричного многоугольнику R_0 относительно фундаментальной окружности, то он будет расположен внешним образом по отношению и к фундаментальному кругу, и к окружностям s и s' . Группа G и, следовательно, связанные с ней фуксовы функции будут принадлежать к третьему семейству и иметь род n .

Все такие фуксовы функции могут быть рационально выражены через две из них, которые мы назовем x и y . Между функциями x и y существует алгебраическое соотношение рода n

$$\psi(x, y) = 0. \quad (1)$$

Кроме того, если ввести

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}},$$

то функция v будет удовлетворять уравнению (3) (раздел IV), а именно:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(x, y),$$

коэффициент φ рационален относительно x и y .

Группа G зависит лишь от $3n-3$ различных вещественных параметров, однако мы не можем распорядиться ими так, чтобы соотношение $\psi(x, y) = 0$ было произвольным. Действительно, от скольких произвольных параметров будет зависеть алгебраическое соотношение

$$\psi(x, y) = 0 \quad (1)$$

рода n , если мы условимся не считать различными соотношениями получающиеся из данного при подстановке вместо x и y рациональных функций от x' и y' ? Известно, что число интересующих нас параметров равно $3n-3$. Они называются *модулями* соотношения (1) и являются, так сказать, инвариантами этого соотношения и операций, состоящих в подстановке вместо x и y рациональных функций от x' и y' . Итак, желая получить между нашими двумя фуксовыми функциями x и y алгебраическое соотношение заданного вида, мы налагаем заранее $3n-3$ комплексных условий, эквивалентных $6n-6$ вещественным условиям. Эта величина на $3n-3$ больше имеющихся в нашем распоряжении параметров. Таким образом, на левую часть соотношения (3) наложено $3n-3$ условий, и найти ее не составляет никакого труда.

Действительно, предположим, что мы совершили операцию, состоящую в замене z на точку, симметричную z относительно фундаментальной окружности. Эта операция сводится к замене $\sqrt{-1}$ на $-\sqrt{-1}$ и последую-

щей линейной заменой независимой переменной. При этом многоугольник R_0 переходит в R'_0 и наоборот, так что группа G и связанная с ней система фуксовых функций остаются без изменений. Не изменяются, следовательно, и $3n-3$ модулей соотношения (1). Однако при замене $\sqrt{-1}$ на $-\sqrt{-1}$ эти модули переходят в комплексносопряженные величины; линейная же замена переменной модулей не изменяет. Следовательно, $3n-3$ модулей соотношения (1) совпадают со своими комплексно-сопряженными величинами, т. е. вещественны.

Отсюда следует, что функция x и y среди фуксовых функций, отвечающих группе G , можно всегда выбрать так, чтобы все коэффициенты соотношения (1) были вещественны. Тогда и все коэффициенты $\varphi(x, y)$ будут вещественными.

Предположим, кроме того, что x и y выбраны так, что соотношение (1) удовлетворяет условиям, наложенным на соотношение (1) в разделе VI (см. начало этого раздела, стр. 115) (такой выбор x и y всегда возможен).

Тогда функция $\varphi(x, y)$ будет удовлетворять следующим условиям.

1. При x , линейно стремящемся к бесконечности, $\varphi(x, y)$ становится бесконечно малой четвертого порядка.

2. Единственными полюсами функции $\psi(x, y)$ служат особые точки функции y от x , определяемой соотношением (1) (двойные точки алгебраической кривой $\psi(x, y)=0$ в число особых точек не входят). Если $x=a$, $y=b$ — одна из этих особых точек, то

$$\lim (y-b)^2 \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \varphi(x, y) = -\frac{3}{4}$$

при $x=a$, $y=b$.

Заметим, что эти условия совпадают с условиями, найденными в первом примере (см. раздел VI). Для полного задания рациональной функции $\psi(x, y)$ их недостаточно: на $\varphi(x, y)$ необходимо наложить еще n трансцендентных условий. Последним можно придать следующую форму: функцию $\varphi(x, y)$ следует выбирать так, чтобы после обхода вокруг аналитической точки (x, y) по n надлежаще выбранным циклам (отвечающим n определенным образом выбранным периодам абелева интеграла $\int g(x, y) dx$ первого рода) интегралы уравнения (3) возвращались к своим начальным значениям.

Перейдем теперь к изучению тэта-фуксовых рядов

$$\Theta(z) = \sum_i H \left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right) (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m},$$

т. е. рядов вида (5) (раздел I). Выясним прежде всего, каким образом функция, задаваемая таким образом, может не иметь никаких особенностей, кроме существенно особых точек.

В общем случае, как показано в разделе III, ряд Θ обращается в бесконечность:

1) в точках, соответствующих бесконечно удаленной точке ∞ , т. е. в точках

$$z = \frac{-\delta_i}{\gamma_i};$$

2) в полюсах функции $H(z)$ и им соответствующих.

Пусть для определенности функция $H(z)$ не обращается в бесконечность в точках $-\delta_i/\gamma_i$. Прежде всего возникает вопрос, при каком условии $\Theta(z)$ не будет обращаться в бесконечность в точках $-\delta_i/\gamma_i$? Для этого необходимо и достаточно, чтобы степень знаменателя рациональной функции $H(z)$ была на $2m$ больше степени числителя.

Рассмотрим теперь полюс a самой функции $H(z)$. Член $H(z)$ (соответствующий $\alpha_i=1$, $\beta_i=0$, $\delta_i=1$, $\gamma_i=0$, т. е. тождественной подстановке) ряда $\Theta(z)$ обращается в бесконечность при $z=a$. Следовательно, для того чтобы ряд $\Theta(z)$ оставался конечным при $z=a$, должен найтись еще один член ряда, также обращающийся в бесконечность и такой, что сумма этих двух членов (каждый из которых в отдельности при z , стремящемся к a , неограниченно возрастает), напротив, стремится к конечному пределу. Для этого необходимо, чтобы среди полюсов функции $H(z)$ была точка $z=b$, такая, что

$$b = \frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta},$$

где $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ — одна из подстановок группы G . При $z=a$ член

$$H\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)(\gamma z + \delta)^{-2m},$$

очевидно, обращается в бесконечность, но сумма этого члена и члена $H(z)$ при $z=a$ остается конечной. Пусть A и B — вычеты функции $H(z)$ в точках $z=a$ и $z=b$. Тогда

$$H(z) = \frac{A}{z-a} + H'(z),$$

$$H\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)(\gamma z + \delta)^{-2m} = \frac{B}{z-a}(\gamma a + \delta)^{2-2m} + H'_1(z),$$

где $H'(z)$ и $H'_1(z)$ — рациональные функции от z , конечные при $z=a$. Следовательно, должно выполняться соотношение

$$A + B(\gamma A + \delta)^{2-2m} = 0.$$

Таковы два необходимых и достаточных условия для того, чтобы ряд $\Theta(z)$ при $z=a$ и в соответствующих точках принимал конечные значения.

Выясним теперь, как можно построить функцию $\Theta(z)$, не имеющую полюсов. Возьмем рациональную функцию $H(z)$, у которой имеется $2p$

полюсов $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots, a_p, b_p$ (соответствующие вычеты равны $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_p, B_p$).

Предположим, кроме того, что

$$b_1 = \frac{a_1 a_1 + \beta_1}{\gamma_1 a_1 + \delta_1}, \quad b_2 = \frac{a_2 a_2 + \beta_2}{\gamma_2 a_2 + \delta_2}, \quad \dots, \quad b_p = \frac{a_p a_p + \beta_p}{\gamma_p a_p + \delta_p},$$

где

$$\left(z, \frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1}\right), \quad \left(z, \frac{\alpha_2 z + \beta_2}{\gamma_2 z + \delta_2}\right), \quad \dots, \quad \left(z, \frac{\alpha_p z + \beta_p}{\gamma_p z + \delta_p}\right)$$

— r подстановок группы G . Наложим на $2r$ вычетов две системы условий:

Во-первых,

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 + A_2 + B_2 + \dots + A_p + B_p &= 0, \\ A_1 a_1 + B_1 b_1 + A_2 a_2 + B_2 b_2 + \dots + A_p a_p + B_p b_p &= 0, \\ A_1 a_1^2 + B_1 b_1^2 + A_2 a_2^2 + B_2 b_2^2 + \dots + A_p a_p^2 + B_p b_p^2 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc} & \cdot \\ A_1 a_1^{2m-2} + B_1 b_1^{2m-2} + A_2 a_2^{2m-2} + B_2 b_2^{2m-2} + \dots + A_p a_p^{2m-2} + B_p b_p^{2m-2} = 0 \end{array}$$

(для того чтобы степень знаменателя в $H(z)$ была не больше степени числителя). Во-вторых,

$$A_k + B_k (\gamma_k a_k + \delta_k)^{2-2m} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

(для того чтобы a_n и b_k не были полюсами функции $\Theta(z)$).

Эти условия (их $p+2m-1$) совместны, если только

$$p > 2m-1,$$

и, коль скоро они выполнены, ряд $\Theta(z)$, построенный с помощью рациональной функции

$$H(z) = \sum_{k=1}^p \left[\frac{A_k}{z - a_k} + \frac{B_k}{z - b_k} \right],$$

не имеет полюсов. Я утверждаю, что ряд Θ будет рядом второго типа. Следовательно, и здесь, так же как и в трех предыдущих разделах, необходимо различать два типа тэта-фуксовых рядов.

Любой ряд $\Theta(z)$, независимо от его типа, можно записать следующим образом:

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x, y), \quad (2)$$

где $F(x, y)$ — рациональная функция от x и y . Как показано в разделе VI, ряды (2), не имеющие полюсов, можно представить в виде линейных комбинаций $(2m-1)(n-1)$ из них. Отсюда следует, что любой ряд $\Theta(z)$ второго типа линейно выражается через $(2m-1)(n-1)$ рядов второго же типа. Так же, как и в трех предыдущих разделах, нам остается еще пока-

Нетрудно видеть, что в точке $z = \infty$ тэта-фуксова функция

$$\Psi(z) = B_0 \vartheta_0(z) + B_1 \vartheta_1(z) + B_2 \vartheta_2(z) + \dots + B_{2m} \vartheta_{2m}(z)$$

имеет нуль по крайней мере кратности $2m$ и, следовательно, не обращается в бесконечность при $z = -\delta_i/\gamma_i$.

Рассмотрим, далее, следующую функцию:

$$\Phi(z, a) = \sum_i \frac{1}{z - \frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}} (\gamma_i a + \delta_i)^{-2m}.$$

Как функция от z , $\Phi(z, a)$ обращается в бесконечность лишь в точках

$$z = \frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i},$$

т. е. в точках, соответствующих a .

Как функция от a , $\Phi(z, a)$ представляет собой тэта-фуксов ряд, обращающийся в бесконечность в следующих точках:

1) в точках $a = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$, т. е. в точках, соответствующих z ;

2) в точках $a = -\delta_i/\gamma_i$, т. е. в точках, соответствующих $a = \infty$. Эти точки являются полюсами порядка $2m-1$. В точке $a = \infty$ наш ряд имеет нуль первого порядка.

Рассмотрим целую часть рациональной функции

$$\frac{a^{2m}}{z - a}.$$

Имеем

$$-(a^{2m-1} + za^{2m-2} + z^2a^{2m-3} + \dots + z^{2m-2}a + z^{2m-1}).$$

Отсюда заключаем, что тэта-фуксова функция

$$\Omega(z, a) = \Phi(z, a) + z^{2m-1} \vartheta_0(a) + z^{2m-2} \vartheta_1(a) + \dots + z \vartheta_{2m-2}(a) + \vartheta_{2m-1}(a)$$

в точках $a = -\delta_i/\gamma_i$ не обращается в бесконечность. Следовательно, она обращается в бесконечность лишь в точках

$$a = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$$

и имеет в последних вычеты

$$-(\gamma_i z + \delta_i)^{2m-2}.$$

Пусть $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ — некоторая подстановка нашей группы G . Функция

$$(\gamma z + \delta)^{2m-2} \Omega\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, a\right)$$

так же, как и $\Omega(z, a)$, — тэта-фуксова относительно a и, следовательно, обращается в бесконечность лишь в

$$a = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$$

с теми же вычетами. Следовательно, можно записать, что

$$(\gamma z + \delta)^{2m-2} \Omega\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, a\right) - \Omega(z, a) = \Theta(a), \quad (6)$$

где $\Theta(a)$ означает тэта-фуксову функцию от a второго типа, представимую в виде (5) (раздел I). Введем теперь функцию

$$\Lambda(z) = A_1 \Omega(z, z_1) + A_2 \Omega(z, z_2) + \dots + A_q \Omega(z, z_q). \quad (7)$$

Сравнивая равенства (5), (6) и (7), находим

$$(\gamma z + \delta)^{2m-2} \Lambda\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \Lambda(z).$$

Это тождество справедливо для всех подстановок группы G . Отсюда мы заключаем, что $\Lambda(z)$ можно записать в виде

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x, y), \quad (8)$$

где $F(x, y)$ означает рациональную функцию от x и y . Но функция $\Lambda(z)$ имеет q различных полюсов $z_1, z_2, \dots, z_q$, выбранных наугад, и не имеет других полюсов. Поэтому мы могли бы построить функцию вида (8), имеющую q данных полюсов и не имеющую других особенностей, что, как показано в разделе VI, невозможно. Следовательно, сделанное вначале предположение приводит к противоречию.

Отсюда, так же как и в трех предыдущих разделах, мы заключаем, что:

- 1) все ряды вида (5) (раздел I) второго типа нельзя представить в виде линейных комбинаций $q-1$ из них;
- 2) всякое выражение вида (2), не обращающееся в бесконечность, можно представить в виде (5) (раздел I);
- 3) всякое выражение (2) можно представить в виде ряда (5) (раздел I) (если только $m > 1$);
- 4) любую фуксову функцию можно бесконечно многими способами представить в виде отношения двух рядов, аналогичных ряду (5) (раздел I).

Рассмотрим функцию

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x, y).$$

Предположим, что она имеет бесконечно много полюсов $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots$ с вычетами $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$

Пусть, кроме того,

$$\Lambda(z) = B_h z^h + B_{h-1} z^{h-1} + \dots + B_1 z + \Lambda_1(z),$$

где $\Lambda_1(z)$ остается конечной, когда z неограниченно возрастает.

Справедливо тождество

$$\Lambda(z) = B_h z^h + B_{h-1} z^{h-1} + \dots + B_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{z - z_k}. \quad (9)$$

Так же, как и соответствующее тождество из раздела V, его можно доказать двумя способами.

Особенно замечательным является случай $n=1$.

В этом случае подстановки группы G вырождаются в

$$\left(\frac{az + b}{cz + d}, \quad K^p \frac{az + b}{cz + d} \right),$$

где a, b, c, d — константы, K — вещественное положительное число, большее 1, а показатель, p в подстановках может принимать различные целые значения как положительные, так и отрицательные.

В рассматриваемом нами случае фуксовы функции можно построить следующим образом. Пусть $f(\xi)$ — двойкопериодическая функция с периодами $2i\pi$ и $\ln K$. Тогда трансцендентная функция $f\left[\ln\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)\right]$ будет фуксовой.

Например, пусть

$$x = \operatorname{sn}\left(\ln \frac{az + b}{cz + d}\right), \quad y = \operatorname{cn}\left(\ln \frac{az + b}{cz + d}\right) \operatorname{dn}\left(\ln \frac{az + b}{cz + d}\right).$$

Выражения вида

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x, y) \quad (2)$$

можно записать как

$$\frac{f\left(\ln \frac{az + b}{cz + d}\right)}{(az + b)^m (cz + d)^m}, \quad (10)$$

где $f(\xi)$ всегда означает двойкопериодическую функцию.

С другой стороны, ряды $\Theta(z)$ вида (5) (раздел I) можно представить следующим образом:

$$\sum_i \frac{K^{mi} \varphi\left(K^i \frac{az + \beta}{cz + d}\right)}{(cz + d)^{2m}}, \quad (11)$$

где φ — некоторая рациональная функция.

Приравнивая выражения (9) и (10) и полагая

$$\frac{az + b}{cz + d} = e^{\xi},$$

находим

$$f(\xi) = \sum_i K^{mi} e^{m\xi} \varphi(K^i e^{\xi}).$$

Итак, мы получили разложение двоякопериодической функции от ξ в ряд, все члены которого — рациональные функции от e^{ξ} . Если вместо ξ в качестве независимой переменной выбрать $\eta = \xi \sqrt{-1}$, то левая часть равенства станет двоякопериодической функцией от η , а все члены ряда, стоящего в правой части, будут рациональными функциями от $\sin \eta$ и $\cos \eta$. Итак, обходным путем нами установлен результат, который прямо был получен Якоби, сумевшим извлечь из него столько замечательных следствий.

Посмотрим теперь, что происходит в рассматриваемом нами случае с формулой (9).

Имеем

$$\Lambda(z) = (az + b)^{m-1} (cz + d)^{m-1} f(\xi),$$

где $f(\xi)$ по-прежнему означает двоякопериодическую функцию.

С другой стороны, правая часть этого равенства содержит следующие величины.

1. Многочлен степени h относительно z . Однако, как нетрудно видеть, в общем случае, т. е. когда по крайней мере

$$f\left(\ln \frac{a}{c}\right) = \infty,$$

степень h не может превосходить числа $2m-2$. Следовательно, этот многочлен можно считать однородным многочленом степени $2m-2$ относительно $(az+b)$ и $(cz+d)$. Поделив его на $(az+b)^{m-1} (cz+d)^{m-1}$, получим

$$P_{m-1}(e^{\xi}) + P'_{m-1}(e^{-\xi}),$$

где P_{m-1} и P'_{m-1} — многочлены степени $m-1$ относительно e^{ξ} и $e^{-\xi}$.

2. Совокупность членов $\sum \frac{A_k}{z - z_k}$, которые можно сгруппировать следующим образом. Пусть $z_1, z_2, \dots, z_q$ — q различных полюсов функции $\Lambda(z)$. Предположим, что других особых точек у этой функции нет. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_q$ — соответствующие вычеты, а $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q$ — соответствующие значения ξ . Сгруппируем все члены вида $\frac{A_k}{z - z_k}$, отвечающие полюсам, которые не отличаются от $z - z_p$. Их сумма равна

$$A_p \sum_i \frac{ce^{\xi} - a}{(cK^i e^{\xi p} - a)^{2m-1}} \frac{K^{im}}{e^{\xi} - K^i e^{\xi p}} (ce^{\xi p} - a)^{2m}.$$

С другой стороны, поскольку

$$(az + b)^{m-1} (cz + d)^{m-1} = e^{(m-1)\xi} (ce^{\xi} - a)^{2-2m},$$

получаем следующее выражение для двоякопериодической функции $f(\xi)$:

$$f(\xi) = P_{m-1}(e^{\xi}) + P'_{m-1}(e^{-\xi}) + \\ + \sum_{p=1}^q \left[A_p (ce^{\xi p} - a)^{2m} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{ce^{\xi} - a}{cK^i e^{\xi p} - a} \right)^{2m-1} \frac{K^{mi} e^{(1-m)\xi}}{e^{\xi} - K^i e^{\xi p}} \right].$$

IX. Пятое семейство; род 0

Я считаю, что не имеет смысла увеличивать число примеров. Рассмотренных примеров вполне достаточно для того, чтобы понять, как следует применять общие принципы в каждом отдельном случае. Тем не менее, я хотел бы, не останавливаясь на подробностях, сказать несколько слов о замечательных функциях этого семейства.

Рассмотрим многоугольник R_0 , граница которого состоит из $2n$ сторон первого рода и одной стороны второго рода. Обходя периметр R_0 в положительном направлении, обозначим его вершины через $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{2n}$. Предположим, что сторона $\alpha_n \alpha_{n+1}$ — второго рода, а все остальные стороны — первого рода, причем стороны $\alpha_0 \alpha_1$ и $\alpha_0 \alpha_{2n}$, $\alpha_1 \alpha_2$ и $\alpha_{2n} \alpha_{2n-1}$, $\alpha_2 \alpha_3$ и $\alpha_{2n-1} \alpha_{2n-2}$, $\alpha_p \alpha_{p+2}$ и $\alpha_{2n-p} \alpha_{2n-p-1} \dots$ и, наконец, $\alpha_{n-1} \alpha_n$ и $\alpha_{n+2} \alpha_{n+1}$ сопряжены и, следовательно, конгруэнтны. Все вершины, за исключением α_n и α_{n+1} , — первой категории и образуют n замкнутых циклов. Один из циклов состоит из одной лишь вершины α_0 , остальные образованы соответственно вершинами α_1 и α_{2n} , α_2 и α_{2n-1} , α_3 и α_{2n-2} , $\dots$ и, наконец, α_{n-1} и α_{n+2} , так что криволинейные углы $\alpha_0, \alpha_1 + \alpha_{2n}, \alpha_2 + \alpha_{2n-1}, \dots, \alpha_{n-1} + \alpha_{n+2}$ должны быть равны 2π , деленному на некоторое целое число. Что же касается углов α_n и α_{n+1} , то они должны быть прямыми, ибо стороны первого рода $\alpha_{n-1} \alpha_n$ и $\alpha_{n+1} \alpha_{n+2}$ ортогонально пересекаются с фундаментальной окружностью, дугой которой является сторона $\alpha_n \alpha_{n+1}$. Затем мы построим многоугольник R'_0 , симметричный многоугольнику R_0 относительно фундаментальной окружности. Обозначим через α'_i вершину R'_0 , симметричную α_i относительно фундаментальной окружности.

Нетрудно видеть, что многоугольник R_0 принадлежит к пятому семейству и имеет род 0. С его помощью можно задать некоторую фуксову группу и определить бесконечно много фуксовых функций. Все эти функции рационально выражаются через одну из них, которую мы обозначим через

$$x = f(z).$$

Функция $x = f(z)$ определена не полностью, и нам надлежит наложить на нее некоторые дополнительные условия, поскольку функцию, через которую рационально выражаются остальные фуксовы функции, можно выбирать бесконечно многими способами.

Пусть β и γ — две точки, принадлежащие стороне $\alpha_n \alpha_{n+1}$ второго рода. Предположим, что

$$f(\alpha_n) = f(\alpha_{n+1}) = 0, \quad f(\beta) = 1, \quad f(\gamma) = \infty$$

и, кроме того,

$$f(\alpha_i) = a_i, \quad f(\alpha'_i) = a'_i.$$

Поскольку многоугольник $R_0 + R'_0$ симметричен относительно фундаментальной окружности, мы можем с помощью несложных рассуждений, аналогичных приведенным в предыдущем разделе, показать, что числа a_i и a'_i — комплексно сопряженные.

Если ввести

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}},$$

то функция v будет удовлетворять дифференциальному уравнению вида (3bis) (раздел IV), поскольку соответствующая фуксова группа имеет род 0. Нетрудно видеть, что это уравнение можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v \frac{P(x)}{[Q(x)]^2},$$

где $Q(x)$ — произведение $(x - a_0)(x - a'_0)(x - a_1)(x - a'_1) \dots (x - a_{n-1})(x - a'_{n-1})$, а $P(x)$ — многочлен от x степени $4n - 4$ с вещественными коэффициентами.

Х. Выводы

Рассматривая предыдущие примеры, мы познакомились с различными результатами, общими для всех фуксовых функций. Я считаю бесполезным проводить доказательство для наиболее общего случая, поскольку оно не отличалось бы от того, что мы делали в различных частных случаях, и свелось бы к скучному повторению того, что уже известно. Поэтому я ограничусь тем, что сформулирую здесь общие результаты в виде резюме.

Выбрав некоторую рациональную функцию $H(z)$, образуем тэта-фуксов ряд

$$\sum_i H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} = \Theta[z, H(z)]. \quad (1)$$

Его всегда можно представить в виде

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x, y), \quad (2)$$

где $F(x, y)$ — рациональная функция двух фуксовых функций x и y , через которые рационально выражаются все остальные. Между x и y существует алгебраическое соотношение

$$\psi(x, y) = 0. \quad (3)$$

Для того чтобы выражение (2) можно было представить в виде (1), необходимо, чтобы оно обращалось в нуль, когда z совпадает с одной из вершин второй категории многоугольника R_0 .

При этом условии любое выражение (2) можно представить в виде (1) (требуется только, чтобы t было целым числом, большим 1).

Отсюда следует, что всякая фуксова функция бесконечно многими способами представима в виде отношения двух рядов вида (1).

Ряды вида (1) бывают двух типов: с полюсами и без них. Последние можно представить в виде линейной комбинации конечного числа таких же рядов. Следовательно, между тэта-фуксовыми рядами второго типа существует бесконечно много линейных соотношений.

Вот одно из таких соотношений. Оно может служить отправной точкой для отыскания если не всех, то по крайней мере большей части подобных соотношений.

Пусть $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ — любая подстановка группы G . Справедливо тождество

$$\Theta[z, H(z)] = \Theta\left[z, H\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)(\gamma z + \delta)^{-2m}\right](\gamma z + \delta)^{2m}.$$

Рассмотрим теперь следующую функцию:

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x, y),$$

где $F(x, y)$ по-прежнему означает рациональную функцию, а m — целое число, большее 1. Кроме того, мы предполагаем, что эта функция обращается в нуль, когда z совпадает с одной из вершин второй категории многоугольника R_0 .

Пусть q — число различных полюсов функции $\Lambda(z)$; $z_1, z_2, \dots, z_q$ — эти полюсы; $A_1, A_2, \dots, A_q$ — соответствующие вычеты, а $\varphi(z)$ — любая рациональная функция от z , не обращающаяся в бесконечность внутри фундаментального круга.

Тогда соотношение

$$\Lambda(z) \varphi(z) = \sum_{k=1}^q \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_k \varphi\left(\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)}{z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} (\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2m} \quad (4)$$

выполняется тождественно, если фуксовы функции существуют лишь внутри фундаментального круга, и

$$\Lambda(z) = \sum_{k=1}^q \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_k}{z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} (\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2m} + P(z) \quad (4bis)$$

($P(z)$ — многочлен относительно z) — если фуксовы функции существуют на всей плоскости.

Отсюда следует, что любую фуксову функцию можно бесконечно многими способами представить в виде отношения двух рядов вида (4) или (4bis).

XI. Исторические замечания

Если оставить в стороне двоякопериодические функции, то первыми фуксовыми функциями, на которые обратили внимание, были модулярные функции. Они возникли, так сказать, сами собой при изучении эллиптических функций, и их основные свойства, в частности однозначность и существование особой кривой, были замечены давно. Впрочем в последнее время появились работы, в которых фуксовы функции стали предметом специального исследования. Замечательные результаты Эрмита, Дедекинда, Фукса и Клейна известны слишком хорошо, чтобы мне надо было подробно останавливаться на них.

Однако существует и другая категория фуксовых функций, открытая в 1872 г. Это функции, связанные с гипергеометрическим уравнением Гаусса, они являются частным случаем функций, рассмотренных в разделе V, и возникают, когда многоугольник R_0 симметричен и вырождается в квадрат.

В мемуаре, помещенном в т. 75 «Journal de Borchardt», Шварц привел без доказательства утверждение о том, что эти функции однозначны и имеют в качестве существенно особой кривой окружность. Тем самым, как уже говорилось в «Исторических замечаниях» к мемуару о фуксовых группах, он утверждал, что соответствующая группа дискретна. К сожалению, отвлеченный от этой темы другими своими исследованиями, Шварц ограничился тем, что посвятил фуксовым функциям в своей работе лишь несколько строк и не продолжил свои исследования дальше.

Другие результаты Шварца, связанные с совсем иным кругом идей, имеют лишь косвенное отношение к нашей теме. В мемуарах, опубликованных в томах 70 и 71 «Journal de Borchardt» и «Monatsberichte de l'Academie de Berlin», Шварц дал строгое доказательство принципа Дирихле и возможности конформного отображения круга на любую плоскую фигуру и, в частности, на многоугольник, ограниченный дугами окружности. Если бы условия дискретности группы были известны, то результат Шварца позволил бы доказать существование фуксовых групп в частном случае, когда многоугольник R_0 симметричен.

Я мог бы воспользоваться этими результатами, но предпочел выбрать иной путь, поскольку, во-первых, при указанном подходе я не мог бы доказать существование фуксовых функций в том случае, когда многоугольник R_0 не симметричен, и, во-вторых, разложения в ряды, которыми я пользовался, позволили мне не только доказать существование функций, но и дать их аналитическое выражение.

О ГРУППАХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ*

В трех мемуарах: «Теория фуксовых групп» (Acta mathematica, t. 1, p. 1—62), «О фуксовых функциях» (Acta mathematica, t. 1, p. 193—294), «О клейновых функциях» (Acta mathematica, t. 3, p. 49—92) я исследовал дискретные группы, образованные линейными подстановками, и функции, инвариантные относительно подстановок указанных групп. Прежде чем ответить на вопрос, каким образом эти и другие, аналогичные им, функции позволяют получать интегралы линейных уравнений с алгебраическими коэффициентами, необходимо решить две важные задачи.

1. Дано линейное уравнение с алгебраическими коэффициентами. Требуется найти его группу.

2. Дано линейное уравнение второго порядка, зависящее от некоторых произвольных параметров. Требуется выбрать эти параметры так, чтобы группа уравнения была фуксовой [1].

І. Фундаментальные инварианты

Займемся сначала первой из сформулированных только что задач.

Рассмотрим какое-нибудь уравнение с алгебраическими коэффициентами:

$$\frac{d^p v}{dx^p} + \varphi_{p-1}(x, y) \frac{d^{p-1} v}{dx^{p-1}} + \varphi_{p-2}(x, y) \frac{d^{p-2} v}{dx^{p-2}} + \dots \\ \dots + \varphi_1(x, y) \frac{dv}{dx} + \varphi_0(x, y) v = 0. \quad (1)$$

В этом уравнении коэффициенты φ — рациональные функции двух переменных x и y , связанных между собой алгебраическим соотношением

$$\psi(x, y) = 0. \quad (2)$$

Пусть

$$v_1, v_2, \dots, v_p$$

— фундаментальная система решений уравнения (1). Если x описывает некоторый замкнутый контур C , так что y в конце пути возвращается

* Acta mathematica, 1884, 4, 201—311.

к своему начальному значению, то интегралы $v_1, v_2, \dots, v_p$ принимают новые значения $w_1, w_2, \dots, w_p$, которые являются линейными функциями их начальных значений:

$$w_k = \sum \alpha_{ik} v_i.$$

Иначе говоря, интегралы $v_1, v_2, \dots, v_p$ претерпевают **линейную** подстановку [2]

$$S = (v_1, v_2, \dots, v_p; w_1, w_2, \dots, w_p),$$

которую можно задать, указав таблицу ее коэффициентов

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{p1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{p2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1p} & \alpha_{2p} & \dots & \alpha_{pp} \end{vmatrix}.$$

Проделав аналогичные операции для всех возможных контуров C , мы получим множество линейных подстановок, образующих группу G . Эта группа и есть группа уравнения (1).

Коэффициент φ_{p-1} в уравнении (1) можно всегда считать равным нулю, ибо в противном случае его можно было бы обратить в нуль с помощью весьма простого и хорошо известного преобразования. Отсюда мы заключаем, что определитель подстановки S равен единице. Следовательно [3],

$$\sum \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \dots \alpha_{pp} = 1. \quad (3)$$

Для того чтобы полностью определить подстановку S , недостаточно знать уравнение (1) и контур C . Действительно, эта подстановка зависит еще и от выбора фундаментальной системы интегралов $v_1, v_2, \dots, v_p$.

Предположим, что вместо $v_1, v_2, \dots, v_p$ мы выбрали p других фундаментальных интегралов

$$u_1, u_2, \dots, u_p.$$

Тогда

$$u_k = \sum \beta_{ik} v_i,$$

в силу чего подстановка

$$\sigma = (v_1, v_2, \dots, v_p; u_1, u_2, \dots, u_p)$$

линейна. Описав контур C и перейдя к интегралам $u_1, u_2, \dots, u_p$, получим линейную подстановку

$$\sigma^{-1} S \sigma.$$

Совокупность подстановок $\sigma^{-1} S \sigma$ образует группу, которую можно обозначить $\sigma^{-1} G \sigma$. Если вместо интегралов $v_1, v_2, \dots, v_p$ рассматривать интегралы $u_1, u_2, \dots, u_p$, то группу $\sigma^{-1} G \sigma$, так же, как и группу G , можно

считать группой уравнения (1). О группе $\sigma^{-1}G\sigma$ говорят, что она получена из группы G трансформированием линейной подстановкой σ .

Уравнение (1) будет иметь лишь одну группу, если мы не будем рассматривать как различные группу G и те группы, которые получаются из нее трансформированием различными линейными подстановками.

Условившись об этом, найдем инварианты подстановки S , т. е. такие функции от ее коэффициентов, которые остаются инвариантными при замене S на $\sigma^{-1}S\sigma$. Запишем уравнение

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} + t & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{p1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} + t & \dots & \alpha_{p2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1p} & \alpha_{2p} & \dots & \alpha_{pp} + t \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Корни этого уравнения, а следовательно, и его коэффициенты, не изменяются при замене S на $\sigma^{-1}S\sigma$. Следовательно, они являются инвариантами подстановки S .

Число таких инвариантов равно $p-1$. Действительно, уравнение (4) имеет степень p относительно t и, следовательно, $p+1$ коэффициентов. Но коэффициент при t^p и свободном члене равен 1. Следовательно, остается $p-1$ инвариантов. Эти инварианты (коэффициенты уравнения (4)) являются целыми функциями от α .

Предположим, что интегралы $v_1, v_2, \dots, v_p$ определены следующим образом.

В начальной точке контура C (например при $x=0$) интеграл v_1 равен 1, а его $p-1$ первых производных — нулю. Интеграл v_i и все его $p-1$ производных (за исключением $(i-1)$ -й) в начальной точке равны 0; $(i-1)$ -я производная интеграла v_i равна 1. Пусть w_k^1 — то значение, которое принимает интеграл v_k , когда x , описав контур C , возвращается в исходную точку, а w_k^i — соответствующее значение его $(i-1)$ -й производной. Тогда

$$w_k = \sum w_k^i v_i, \quad w_k^i = \alpha_{ik}.$$

Отсюда следует, что инварианты являются целыми рациональными функциями от w_k^i .

В частности, при $p=2$ уравнение (1) имеет вид

$$\frac{d^2v}{dx^2} + v\varphi_0(x, y) = 0,$$

и уравнение (4) можно записать следующим образом:

$$\begin{vmatrix} w_1^1 + t & w_1^2 \\ w_2^1 & w_2^2 + t \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$t^2 + t(w_1^1 + w_2^2) + 1 = 0.$$

Следовательно, в этом случае подстановка S имеет единственный инвариант $w_1^1 + w_2^2$. Если k — множитель подстановки, то инвариант в точности равен $k + 1/k$.

Если бы инварианты всех подстановок S были известны, то группа G была бы полностью определена, поскольку мы не считаем отличными от G группы $\sigma^{-1}G\sigma$, получающиеся из G трансформированием линейными подстановками. Однако нет необходимости знать все инварианты, достаточно знать лишь некоторое число инвариантов, называемых *фундаментальными*. Все остальные инварианты будут функциями от них.

Сколько же существует фундаментальных инвариантов? Предположим, что группа G порождена n образующими подстановками. Каждая из подстановок содержит p^2 коэффициентов, но последние связаны соотношением (3), и независимыми остаются лишь $p^2 - 1$ из них. Для n подстановок получаем $n(p^2 - 1)$ независимых коэффициентов. Поскольку мы не считаем отличными от G те группы, которые получаются при трансформировании G различными подстановками, то из указанного только что числа необходимо вычесть $p^2 - 1$. Итак, для того чтобы полностью задать группу G , требуется $(n - 1)(p^2 - 1)$ условий.

Таким образом, если задать любые $(n - 1)(p^2 - 1)$ инвариантов (лишь бы они были независимыми), то все остальные инварианты будут не более чем функциями от них^[4]. В качестве фундаментальных инвариантов можно, например, взять $(n - 1)(p^2 - 1)$ инвариантов надлежащим образом выбранных подстановок.

Коэффициенты уравнения (1) можно всегда считать рациональными. Действительно, пусть наше предположение неверно и уравнение (2) представляет собой алгебраическое соотношение степени m , так что каждому значению x соответствуют m значений y

$$y_0, y_1, \dots, y_{m-1}.$$

На плоскости x можно всегда провести $m - 1$ контуров $C_1, C_2, \dots, C_{m-1}$, таких, что когда x описывает C_i , значение y_0 переходит в y_i . Пусть

$$v_1^0, v_2^0, \dots, v_p^0$$

— p фундаментальных интегралов уравнения (1), соответствующих значению y_0 функции y . Пусть

$$v_1^i, v_2^i, \dots, v_p^i$$

— то, во что переходят эти интегралы, когда x описывает контур C_i . Тогда mp функций

$$\begin{aligned} &v_1^0, v_2^0, \dots, v_p^0, \\ &v_1^1, v_2^1, \dots, v_p^1, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots, \\ &v_1^{m-1}, v_2^{m-1}, \dots, v_p^{m-1} \end{aligned}$$

будут удовлетворять линейному уравнению (1'), коэффициенты которого рациональны относительно x . Знания группы уравнения (1') достаточно для того, чтобы полностью определить группу уравнения (1).

Итак, будем считать, что уравнение (1) имеет рациональные коэффициенты и $n+1$ особых точек (в их число входит и бесконечно удаленная точка, если она является особой для данного уравнения; ложные особые точки [5] из числа особых точек уравнения (1) исключаются). Его группа порождена n образующими подстановками. Инварианты $n+1$ ее подстановок можно считать известными, поскольку их нетрудно найти с помощью определяющего уравнения, если только интегралы регулярны [6]: мы имеем в виду те подстановки, которые получаются, когда переменная описывает замкнутый контур, охватывающий лишь одну особую точку. Таким образом, нам остается вычислить инварианты лишь $(n-1)$ $p-2$ подстановок.

Пусть a — некоторая особая точка и

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$$

— корни соответствующего ей определяющего уравнения.

В окрестности особой точки a имеется p особенно замечательных интегралов: k -й из них состоит из выражения $(x-a)^{\lambda_k}$, умноженного на некоторую голоморфную функцию.

Пусть

$$v_1, v_2, \dots, v_p$$

— эти p интегралов, которые я буду называть *каноническими* относительно точки a . Когда независимая переменная описывает вокруг точки a бесконечно малую окружность, наши p интегралов претерпевают линейную подстановку

$$\begin{vmatrix} e^{2\pi i \lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{2\pi i \lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{2\pi i \lambda_p} \end{vmatrix}.$$

Назовем эту подстановку *канонической* относительно точки a . Пусть

$$w_1, w_2, \dots, w_p$$

— интегралы, канонические относительно другой особой точки b .

Соединим точки a и b произвольно проведенным путем amb . Когда независимая переменная выходит из точки a и, описав путь amb , попадает в окрестность точки b , канонические интегралы $v_1, v_2, \dots, v_p$ становятся линейными функциями канонических интегралов $w_1, w_2, \dots, w_p$, в силу чего

$$v_k = \sum \beta_{ik} w_i.$$

Линейная подстановка

$$S = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \dots & \beta_{p1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \dots & \beta_{p2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{1p} & \beta_{2p} & \dots & \beta_{pp} \end{vmatrix}$$

называется *вспомогательной подстановкой относительно пути amb* . Если вспомогательная подстановка известна, то известна также и одна подстановка группы уравнения (1), а именно та, которая действует на канонические интегралы $v_1, v_2, \dots, v_p$, когда точка, соответствующая независимой переменной, выходит из a , описывает путь amb , попадает в окрестность точки b , описывает там бесконечно малую окружность вокруг точки b и возвращается, наконец, в окрестность точки a по пути bma .

Пусть Σ — подстановка, каноническая относительно точки b . Когда независимая переменная пробегает указанный только что контур, интегралы v претерпевают подстановку $S^{-1}\Sigma S$.

Предположим, что мы провели n путей, соединив $n+1$ особых точек так, что эти пути позволяют попасть из любой особой точки в любую другую и обратно. Группа уравнения (1) полностью известна, если известны вспомогательные подстановки, соответствующие этим n путям.

Действительно, пусть a — одна из особых точек, а $b_1, b_2, \dots, b_n$ — остальные n . Соединим точку a с каждой из точек b , например, прямой. Пусть $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ — подстановки, канонические относительно точек $a, b_1, b_2, \dots, b_n$; $S_1, S_2, \dots, S_n$ — вспомогательные подстановки относительно путей $ab_1, ab_2, \dots, ab_n$. Группу уравнения (1) порождают $n+1$ подстановок

$$\Sigma, S_1^{-1}\Sigma_1S_1, S_2^{-1}\Sigma_2S_2, \dots, S_n^{-1}\Sigma_nS_n,$$

между которыми имеется соотношение

$$\Sigma S_1^{-1}\Sigma_1S_1S_2^{-1}\Sigma_2S_2 \dots S_n^{-1}\Sigma_nS_n = 1.$$

Выберем две какие-нибудь особые точки a и b , а остальные $n-1$ обозначим через $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$. Соединим a и b $n-1$ различными путями $am_1b, am_2b, \dots, am_{n-1}b$. Пусть $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ означают соответствующие вспомогательные подстановки. Пути, проведенные из a в b , разбивают плоскость на $n-1$ областей. Предположим, что каждая из них содержит одну и только одну особую точку c_i . Оказывается, что группа уравнения (1) этим полностью определена. Действительно, если Σ — подстановка, каноническая относительно точки a , то группу уравнения (1) порождают n подстановок

$$\Sigma, S_1^{-1}S_2, S_2^{-1}S_3, \dots, S_{n-2}^{-1}S_{n-1}, S_{n-1}^{-1}S_1.$$

Пусть точка c_i принадлежит области, ограниченной путями am_ib и $am_{i+1}b$. Проведем контур, расположенный целиком внутри этой области

и содержащий внутри себя точку c_i . При обходе этого контура интегралы, канонические относительно точки a , претерпевают подстановку

$$S_i^{-1} S_{i+1}.$$

Для того чтобы полностью определить группу уравнения (1), очевидно, достаточно знать либо фундаментальные инварианты, либо какие-то определенные вспомогательные подстановки.

II. Вычисление фундаментальных инвариантов

Ясно, что фундаментальные инварианты, полностью определяющие группу линейного уравнения, являются функциями от коэффициентов этого уравнения. Отсюда совершенно естественно возникает следующая задача: *определить фундаментальные инварианты как функции коэффициентов рассматриваемого уравнения*. В действительности мы имеем здесь две задачи: значения фундаментальных инвариантов можно находить численно, исходя из конкретно заданного уравнения с численными коэффициентами, однако с точки зрения теории функций не менее интересно знать, как ведут себя эти инварианты при изменении коэффициентов уравнения. Численные методы ничего не могут сказать нам о природе фундаментальных инвариантов как функций коэффициентов уравнения, в то время как формулы теории функций потребовали бы громоздких выкладок, если бы их требовалось доводить до численных значений.

Что касается численных методов, то их уже предложено великое множество. Я хотел бы обратить особое внимание на метод Фукса (Journal de Crelle, t. 75) и Гамбургера (Journal de Crelle, t. 83).

Метод Фукса заключается в следующем. Так же, как в конце предыдущего раздела, среди $n+1$ особых точек, выделяют какие-нибудь две точки a и b . Затем, проводя из a в b $n-1$ путей am_1b , am_2b , ..., $am_{n-1}b$, разбивают плоскость на $n-1$ областей так, чтобы каждая содержала одну и только одну из $n-1$ оставшихся особых точек. Далее искусный геометр из Гейдельберга разлагает интегралы, канонические относительно точки a , в ряд. Это разложение имеет смысл в некоторой области R_a . Интегралы, канонические относительно точки b , также допускают разложение в ряд, причем это разложение имеет смысл в некоторой области R_b . Области R_a и R_b имеют $n-1$ общих частей $P_1, P_2, \dots, P_n$. Впрочем, путь am_ib всегда можно провести так, чтобы он целиком проходил либо внутри одной из областей R_a или R_b , либо внутри той и другой области и пересекал P_i . Поэтому для того чтобы вычислить коэффициенты вспомогательной подстановки относительно пути am_ib , достаточно сравнить два полученных Фуксом разложения при любом x , принадлежащем P_i (области, где имеют смысл оба разложения). Группа уравнения (1) будет тем самым полностью определена.

Изложенный только что метод можно варьировать до бесконечности. В самом деле, предположим, что мы провели из особой точки a в особую

точку b путь amb . Требуется найти вспомогательную подстановку для этого пути. Вокруг каждой из точек a и b выделим некоторые области R_a и R_b , обладающие следующими свойствами:

1) область R_a содержит единственную особую точку a ; область R_b содержит единственную особую точку b ;

2) R_a и R_b имеют общую часть P ;

3) путь amb проходит целиком внутри по крайней мере одной из областей R_a или R_b и пересекает P . Пусть $f_a(x)$ (и $f_b(x)$) — две функции, такие, что когда x находится внутри области R_a (соответственно R_b), модуль функции f_a (соответственно f_b) не превышает 1. Это означает, что обе функции задают конформное отображение окружности единичного радиуса с центром в 0 на области R_a и R_b соответственно.

Кроме того, будем считать, что

$$f_a(a) = 0, \quad f_b(b) = 0.$$

Интегралы, канонические относительно точки a , допускают разложение по степеням $f_a(x)$. Это разложение (его коэффициенты определяются рекуррентно) справедливо во всей области R_a . Точно так же интегралы, канонические относительно точки b , представимы во всей области R_b в виде рядов по степеням $f_b(x)$. Для того чтобы найти коэффициенты искомой вспомогательной подстановки, достаточно сравнить оба разложения в любой точке области P (в которой имеют смысл оба разложения).

Области R_a и R_b выберем так, чтобы функции f_a и f_b были по возможности более простыми. Например, можно взять прямоугольник, или двугольник, ограниченный дугами пересекающихся окружностей, или же часть плоскости, заключенную между двумя параллельными прямыми.

Перейдем теперь к изложению метода Гамбургера.

Пусть 0 — одна из особых точек, а $a_1, a_2, \dots, a_n$ — n остальных, расположенных в порядке возрастания модуля. Их модули обозначим $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$. Построим две окружности радиусом ρ_i и ρ_{i+1} с центром в начале координат и рассмотрим контур C , лежащий целиком внутри кольцевой области, ограниченной двумя проведенными окружностями. Пусть A — одна из точек контура C , например,

$$A = \sqrt{\rho_i \rho_{i+1}}.$$

Обозначим через $v_1, v_2, \dots, v_p$ фундаментальную систему интегралов в окрестности точки A . Пусть $w_1, w_2, \dots, w_p$ — функции, в которые переходят эти интегралы, когда независимая переменная, описав контур C , возвращается в точку A . Интегралы v допускают разложение по возрастающим степеням

$$\ln x - \ln A,$$

и если

$$\ln \rho_{i+1} - \ln A > 2\pi,$$

то эти разложения будут иметь смысл и при

$$\ln x - \ln A = 2i\pi.$$

Следовательно, подставляя в разложения интегралов v и их производных $2i\pi$ вместо $\ln x - \ln A$, мы получаем значения интегралов w и их производных, которых достаточно для того, чтобы полностью определить подстановку группы уравнения (1), соответствующую контуру C .

Метод Гамбургера легко обобщается на случай, когда

$$\ln \rho_{i+1} - \ln A < 2\pi.$$

Обозначив для краткости

$$\ln \rho_{i+1} - \ln A = \frac{\pi}{2\alpha},$$

разложим интегралы v по степеням

$$\frac{x^{i\alpha} - A^{i\alpha}}{x^{i\alpha} + A^{i\alpha}} = z.$$

Разложение будет еще сходиться при

$$x = Ae^{2i\pi},$$

или

$$z = \frac{e^{-2\pi\alpha} - 1}{e^{-2\pi\alpha} + 1}.$$

Подставляя в разложения интегралов v и их производных вместо z его выражение, получаем значения интегралов w и их производных и, следовательно, подстановку, соответствующую контуру C .

Достаточно указать на одну особенность, лежащую в самой сущности этих методов, чтобы понять, что их можно варьировать до бесконечности. При выборе того или иного метода вычислитель должен руководствоваться скоростью сходимости соответствующих рядов. Но скорость сходимости зависит прежде всего от расположения $n+1$ особых точек. Именно это расположение и определяет выбор метода.

Тем не менее, ни один из предложенных методов ничего не говорит о свойствах фундаментальных инвариантов как функций от коэффициентов и ничего не дает для их изучения с точки зрения теории функций. Изучением фундаментальных инвариантов именно с этой точки зрения мы и займемся в следующем разделе.

III. Свойства фундаментальных инвариантов

Запишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\frac{d^p v}{dx^p} = \sum_{k=0}^{p-2} \sum_{i=1}^n \sum_h \frac{A_{hki}}{(x - a_i)^h} \frac{d^k v}{dx^k}. \quad (1)$$

Для того чтобы записать уравнение (1) в таком виде, мы разложили на простые элементы коэффициенты при различных производных от v , которые, по предположению, являются рациональными функциями от x . Кроме того, мы предположили, что эти рациональные функции не имеют целых частей (такая гипотеза всегда допустима).

Искомые фундаментальные инварианты зависят от a_i и A_{hki} . Предположим сначала, что a_i — константы и единственными переменными служат A_{hki} . Я утверждаю, что *фундаментальные инварианты являются целыми функциями от A_{hki}* .

Справедливость этого утверждения будет очевидной, если доказать следующее.

Запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{dp_v}{dx^p} = \alpha \sum \varphi_k \frac{d^k v}{dx^k} + \beta \sum \psi_k \frac{d^k v}{dx^k}, \quad (1')$$

φ_k и ψ_k здесь означают вполне известные (по предположению) рациональные функции от x ; α и β — параметры, рассматриваемые как переменные.

Для наших целей достаточно доказать (и в этом и состоит мое утверждение), что фундаментальные инварианты являются целыми функциями параметров α и β .

Рассмотрим какую-нибудь точку a плоскости и вокруг нее, как вокруг центра, опишем окружность K , достаточно малую для того, чтобы она не содержала ни одной особой точки. Пусть $v_1, v_2, \dots, v_p$ — p интегралов, удовлетворяющих следующим условиям:

при $x = a$, $v_1 = 1$, его $p - 1$ производные равны 0;
 $v_i = 0$, его $p - 1$ последовательные производные равны 0 за исключением $(i - 1)$ -й производной, равной 1.

Внутри окружности K интегралы $v_1, v_2, \dots, v_p$ допускают разложения по возрастающим степеням $x - a$. Коэффициент при $(x - a)^m$ имеет вид многочлена степени $m - p + 1$ относительно α и β . Таким образом, разложения этих интегралов по степеням $(x - a)$, α и β получены. Требуется еще установить, сходятся ли эти разложения.

Если v считать функцией от x , α и β , то уравнение (1) можно рассматривать как уравнение с частными производными. Теорема Ковалевской (Journal de Crelle, t. 80), будучи примененной к этому уравнению, утверждает, что v можно разложить по степеням $(x - a)$, $(\alpha - \alpha_0)$ и $(\beta - \beta_0)$ при условии, если x лежит внутри окружности K , а модули $\alpha - \alpha_0$ и $\beta - \beta_0$ достаточно малы. Таким образом, v в окрестности любой точки α_0, β_0 есть голоморфная функция от α и β и, следовательно, целая функция относительно α и β . Разложение v по степеням $x - a$, α и β сходится при любых α и β , если точка x лежит внутри окружности K .

Теперь мы должны показать, что если x считать константой, то v также будет целой функцией от α и β при условии, если точка x лежит

внутри окружности K . В этом случае для того, чтобы полностью задать функцию v , недостаточно указать значение x : необходимо еще знать путь amx , по которому переменная x , выйдя из точки a , дошла до этого значения.

Предположим для определенности, что b — некоторая точка внутри окружности K , а K' — окружность с центром в точке b , не содержащая внутри себя ни одной особой точки. Пусть точка x лежит вне K' , но внутри K , а путь amb проходит целиком внутри фигуры, образованной этими двумя окружностями.

Обозначим через $u_1, u_2, \dots, u_p$ фундаментальную систему интегралов, определенных следующим образом: интегралы u_i при $x=b$ должны удовлетворять тем же условиям, которым при $x=a$ удовлетворяют v_i .

Пусть v_i^1 — значение интеграла v_i при $x=b$, а v_i^{k+1} — значение его k -й производной. Тогда

$$v_i = \sum_{k=1}^{k=p} v_i^k u_k.$$

Но v_i^k — целые функции от α и β , поскольку точка b расположена внутри окружности K ; u_i^k — также целые функции от α и β , поскольку точка x лежит внутри окружности K . Следовательно, интегралы v_i в свою очередь являются целыми функциями от α и β .

Рассуждения остались бы совершенно аналогичными и в том случае, если бы вместо двух кругов сходимости K и K' требовалось рассмотреть несколько таких кругов.

Предположим теперь, что путь amx вырождается в замкнутый контур C . Значения интегралов v_i и их производных в этом случае представляют собой не что иное, как введенные в разделе I величины w_i^k . Но фундаментальные инварианты имеют вид многочленов относительно w_i^k , и, следовательно, являются целыми функциями от α и β .

Итак, если a_i — константы, то инварианты оказываются целыми функциями от A_{hki} и, таким образом, допускают разложение по степеням этих величин. Коэффициенты разложения зависят от a_i . Нам остается еще изучить природу этой зависимости. Нетрудно видеть, что эти функции выражаются с помощью последовательных квадратур. Действительно, запишем уравнение (1) в виде (1') и рассмотрим разложения интегралов v_i по степеням α и β :

$$v_i = \sum v_{imn} \alpha^m \beta^n.$$

Я утверждаю, что коэффициент v_{imn} можно получить с помощью простых квадратур.

Предположим, что мое утверждение уже доказано для $v_{i, m-1, n}$ и $v_{i, m, n-1}$. Тогда оно верно и для v_{imn} , ибо имеет место тождество

$$\frac{d^p v_{imn}}{dx^p} = \sum \varphi_k \frac{d^k v_{i, m-1, n}}{dx^k} + \sum \psi_k \frac{d^k v_{i, m, n-1}}{dx^k}$$

и p -ю производную от v_{imn} можно представить в виде простых квадратур. Следовательно, и сама функция v_{imn} также представима в виде квадратур.

Пусть теперь w_{imn}^k — коэффициент при $\alpha^m \beta^n$ в разложении w_i^k . Этот коэффициент по той же причине также представим в виде квадратур. То же справедливо и для коэффициентов, входящих в разложения инвариантов, ибо эти коэффициенты являются многочленами относительно w_{imn}^k .

Изучение разложений функций v_i можно продолжить. Для этого введем величины

$$\Lambda(x, \alpha_1) = \int_0^x \frac{dx}{x - \alpha_1},$$

$$\Lambda(x, \alpha_1, \alpha_2) = \int_0^x \frac{dx \Lambda(x, \alpha_1)}{x - \alpha_2},$$

.....

$$\Lambda(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{q-1}, \alpha_q) = \int_0^x \frac{dx \Lambda(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{q-1})}{x - \alpha_q}.$$

Заметим, что уравнение (1) можно представить в виде системы p уравнений первого порядка. Если интегралы регулярны в окрестности каждой особой точки, то можно ввести p новых переменных $u_1 = v, u_2, \dots, u_p$ и заменить уравнение (1) следующей системой p уравнений:

$$\frac{du_i}{dx} = \sum \varphi_{ik} u_k,$$

где φ_{ik} — рациональные функции вида

$$\varphi_{ik} = \sum \frac{A_{i,k,\lambda}}{x - a_\lambda}, \quad (2)$$

$A_{i,k,\lambda}$ — константы. Пусть, например, $p=2$. Тогда уравнение (1) запишется как

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{P}{Q^2} v,$$

где Q — произведение $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$, а P — многочлен степени $2n-2$ относительно x . Всегда можно найти многочлены A и C степени $n-1$ относительно x , тождественно удовлетворяющие соотношению

$$C + A^2 + A'Q - AQ' = P.$$

Полагая $v=u_1$ и вводя вспомогательную переменную u_2 , получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dx} &= \frac{A}{Q} u_1 + \frac{1}{Q} u_2, \\ \frac{du_2}{dx} &= \frac{C}{Q} u_1 + \frac{Q' - A}{Q} u_2.\end{aligned}$$

Ее коэффициенты имеют вид (2).

Нетрудно видеть, что коэффициент при любом члене в разложении интеграла v_i по степеням $A_{ik\lambda}$ равен сумме таких функций, как Λ , а параметры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ означают не что иное, как особые точки $a_1, a_2, \dots, a_n$, расположенные в том или ином порядке (каждая из них может несколько раз повторяться).

IV. Обратные функции

До сих пор мы изучали фундаментальные инварианты как функции коэффициентов уравнения (1), но можно, наоборот, рассматривать коэффициенты уравнения как функции фундаментальных инвариантов. Такая точка зрения приводит к интересным трансцендентным функциям, играющим в теории линейных уравнений такую же роль, какую модулярные функции играют в теории эллиптических интегралов.

Здесь следует сделать одно замечание. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^p v}{dx^p} = \sum \varphi_k \frac{d^k v}{dx^k}. \quad (1)$$

Особые точки коэффициентов φ_k делятся на два класса [7]. К первому классу относятся особые точки в собственном смысле. Если x описывает замкнутый контур вокруг одной из таких точек, то интегралы претерпевают линейную подстановку. Ко второму классу принадлежат простые полюсы интегралов (иначе говоря, если a — особая точка второго класса, то все интегралы можно представить в виде

$$(x - a)^\lambda \varphi(x),$$

где λ — некоторая константа, одинаковая для всех интегралов, а функция $\varphi(x)$ голоморфна). Отсюда следует, что если x описывает замкнутый контур вокруг точки a , то все интегралы умножаются на одну и ту же величину, а их отношения сохраняют исходные значения. Такие точки называются *ложными особыми точками*. Для того чтобы особые точки коэффициентов φ_k были ложными, необходимо, чтобы выполнялось $(p+2)(p-1)/2$ условий.

Итак, пусть уравнение (1) имеет n особых точек, помимо точки ∞ , а именно $a_1, a_2, \dots, a_n$, и q ложных особых точек $b_1, b_2, \dots, b_q$.

Предположим, что интегралы всюду регулярны. Тогда уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{d^p v}{dx^p} = \sum_{k=0}^{k=p-2} \frac{P_k}{Q^{p-k}} \frac{d^k v}{dx^k},$$

где

$$Q = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)(x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_q),$$

а P_k означает многочлен степени

$$(p - k)(n + q - 1).$$

Таким образом, уравнение (1) содержит

$$\frac{p(p+1)}{2}(n+q) - \frac{p(p-1)}{2}$$

параметров, а именно:

- 1) $n + q$ особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_q$;
- 2) $\frac{(n+q-1)(p+2)(p-1)}{2} + p - 1$ коэффициентов многочлена P_k .

Но мы имеем еще

$$q \frac{(p+2)(p-1)}{2}$$

условий, выражающих тот факт, что b — ложные особые точки. Следовательно, независимых параметров остается лишь

$$n \frac{p(p+1)}{2} + q - \frac{p(p-1)}{2}.$$

Кроме того, мы всегда можем предполагать, что

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1.$$

В противном случае к этим равенствам можно было бы перейти с помощью линейной замены переменной. Таким образом, число параметров необходимо уменьшить еще на 2.

Предположив также, что в рассматриваемом случае нет ложных особых точек, получим окончательно

$$n \frac{p(p+1)}{2} - \frac{p(p-1)}{2} - 2 \tag{2}$$

параметров. Но группа G уравнения (1) порождена n подстановками. Как показано в разделе I, такая группа G (если не считать различными группу G и те группы, которые получаются из нее трансформацией различными линейными подстановками) зависит от

$$(n-1)(p^2-1) \tag{3}$$

фундаментальных инвариантов.

При $p=2$ оба выражения (2) и (3) дают одно и то же число $3n-3$. В этом случае число параметров уравнения равно числу параметров группы. Отсюда следует важный вывод: *в общем случае* можно найти уравнение второго порядка без ложных особых точек, допускающее данную группу. Это утверждение имеет следующий смысл. Для существования

уравнения, допускающего данную группу, нет необходимости требовать, чтобы между фундаментальными инвариантами существовало какое-то соотношение, а если на них налагать какие-либо условия, то это должны быть условия типа неравенств [8]. Впрочем, можно всегда найти бесконечно много уравнений второго порядка с ложными особыми точками, допускающих ту же группу.

Пусть теперь $p > 2$ и, разумеется, $n > 1$. Нетрудно видеть, что выражение (2) будет при этом всегда меньше выражения (3). Отсюда мы заключаем, что в общем случае нельзя найти уравнение более высокого порядка, чем 2, допускающее данную группу и не имеющее ложных особых точек.

Следовательно, желая построить уравнение с данной группой, мы должны снабдить его ложными особыми точками.

Для того чтобы избежать введения ложных особых точек, значительно усложняющих результаты и доказательства, я ограничусь рассмотрением уравнений второго порядка.

Итак, займемся исследованием уравнения второго порядка без ложных особых точек.

Рассмотрим на сфере $n+1$ особых точек

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3, a_4, \dots, a_n, a_{n+1} = \infty$$

и соединим их n разрезами

$$a_1 a_2, \quad a_2 a_3, \quad \dots, \quad a_n a_{n+1}.$$

Возьмем два каких-нибудь интеграла уравнения (1) и образуем их отношение z . Если x движется по сфере, не пересекая разрезов, то z принимает значения из некоторой области R . Эта область аналогична производящим (фундаментальным) многоугольникам фуксовых и клейновых групп, но может частично перекрываться сама с собой. В соответствии с n разрезами

$$a_1 a_2, \quad a_2 a_3, \quad \dots, \quad a_n a_{n+1}$$

она имеет $2n$ сторон

$$\alpha_1 \alpha_2, \quad \alpha_2 \alpha_3, \quad \dots, \quad \alpha_n \alpha_{n+1}$$

и

$$\beta_1 \beta_2, \quad \beta_2 \beta_3, \quad \dots, \quad \beta_n \alpha_{n+1}.$$

Стороны $\beta_i \beta_{i+1}$ и $\alpha_i \alpha_{i+1}$ сопряжены и переходят друг в друга при линейной подстановке S_i . Каждая из вершин α_1 и α_{n+1} в отдельности образует цикл. Остальные $n-1$ циклов образуют вершины α_i и β_i . Сумма углов α_i и β_i равна

$$2\pi(1 - 2\lambda_i),$$

где λ_i — наименьший корень определяющего уравнения, записанного для особой точки a_i [9]. Точно так же углы α_1 и α_{n+1} равны

$$2\pi(1 - 2\lambda_1) \quad \text{и} \quad 2\pi(1 - 2\lambda_{n+1}).$$

Если величины

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}, \quad \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} \quad (4)$$

известны, то подстановки S_i полностью определены, а поскольку они являются образующими подстановками группы G , то фундаментальные инварианты этой группы нетрудно записать в виде функций от величин (4). Итак, коэффициенты уравнения (1) мы рассматриваем как функции величин (4).

Область R заданием величин (4) определяется не полностью. Действительно, форму сторон $\alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3, \dots, \alpha_n\alpha_{n+1}$ можно произвольно варьировать, внося соответствующие изменения в форму сопряженных сторон $\alpha_1\beta_2, \beta_2\beta_3, \dots, \beta_n\alpha_{n+1}$. Получающиеся при этом области R будут *эквивалентны* в смысле, указанном в разделе III мемуара «О клейновых группах» (Acta mathematica, t. 3, p. 63). Кроме того, разрезы

$$a_1a_2, \quad \dots, \quad a_na_{n+1}$$

можно провести так, чтобы стороны

$$\alpha_1\alpha_2, \quad \dots, \quad \alpha_n\alpha_{n+1}$$

имели какую угодно форму.

Отсюда следует, что если бы существовало два уравнения (1), приводящих к одному и тому же набору значений величин (4), то разрезы всегда можно было бы провести так, чтобы область R для обоих уравнений была одной и той же.

Рассмотрим теперь функции от z , обладающие следующими свойствами:

1. Они однозначны при z , принадлежащем области R . Ясно, что если область R перекрывается сама с собой, то двум точкам области z_1 и z_2 может соответствовать одна и та же точка плоскости. В этом случае наши функции принимают в точках z_1 и z_2 различные значения.

2. В двух соответствующих точках, принадлежащих периметру области R , функции принимают одинаковые значения.

3. Они не имеют других особых точек, кроме полюсов (если один из углов α или β равен нулю, то в этих точках функции имеют логарифмическую особенность).

Ясно, что все такие функции рационально выражаются через одну из них (см.: Ш о т т к и. Journal de Crelle, t. 83; мемуар «О фуксовых функциях». — Acta mathematica, t. 1, p. 228) *.

Если x рассматривать как функцию от z , то мы получим одну из тех функций, о которых только что говорили. Ясно, что все остальные функции будут рациональными относительно x .

Предположим теперь, что имеются два уравнения (1), приводящих к одному и тому же набору значений величин (4) и, следовательно, к одной и той же области R . Пусть x и x_1 — соответствующие переменные, которые

* См. настоящий том. (Прим. ред.).

мы будем считать функциями от z . В силу сказанного, переменная x рациональна относительно x_1 , а переменная x_1 рациональна относительно x , в силу чего между этими переменными существует соотношение вида

$$Axx_1 + Bx + Cx_1 + D = 0.$$

Пусть a_i и a_i^1 — значения x и x_1 при $z = \alpha_i$. Точки a_i и a_i^1 будут особыми точками обоих уравнений (1), и по предположению,

$$a_1 = a_1^1 = 0, \quad a_2 = a_2^1 = 1, \quad a_{n+1} = a_{n+1}^1 = \infty,$$

т. е. при $z = \alpha_1, z = \alpha_2, z = \alpha_{n+1}$

$$x = x_1.$$

Отсюда следует, что x тождественно равен x_1 и два уравнения (1), существование которых мы предположили, тождественно совпадают.

Это означает, что если величины (4) заданы, то уравнение (1) полностью определено, а коэффициенты этого уравнения являются однозначными функциями величин (4).

Итак, мы приходим к новому классу однозначных функций многих переменных. Скажем несколько слов о тех подстановках величин (4), относительно которых наши функции остаются инвариантными.

Рассмотрим определенный выше многоугольник R и обозначим через S_k линейную подстановку, переводящую $\beta_k \beta_{k+1}$ в $\alpha_k \alpha_{k+1}$. Для большей симметрии обозначений положим

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \alpha_{i+n+1} = \alpha_i, \quad \beta_{i+n+1} = \beta_i.$$

Подстановка

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_{k+1-i} S_k \\ \beta_i & \alpha_{k+1-i} \\ \lambda_i & \lambda_{k+1-i} \end{vmatrix}, \quad (5)$$

будучи примененной к величинам (4), оставляет рассматриваемые функции инвариантными. С помощью таблицы (5) новые значения величин α , β и λ нетрудно представить в виде функций от старых, поскольку коэффициенты линейной подстановки S_k являются функциями α , β и λ .

V. Формулировка второй задачи

В четырех предыдущих разделах мы показали, как можно *найти группу данного уравнения*, причем решение задачи было дано как с точки зрения численного анализа, так и с точки зрения теории функций.

Обратимся теперь ко второй задаче, которую необходимо решить прежде, чем можно идти дальше.

Дано уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x, y) v, \quad (1)$$

где φ — рациональная функция двух переменных x и y , связанных алгебраическим соотношением

$$\psi(x, y) = 0. \quad (2)$$

Функция φ , по предположению, зависит от некоторого числа параметров. Эти параметры требуется выбрать так, чтобы переменная x была фуксовой функцией отношения двух интегралов уравнения. В этом случае мы будем для краткости называть уравнение (1) *фуксовым*.

В дальнейшем нас будут интересовать лишь фуксовы функции, существующие только внутри фундаментального круга (функции первого, второго и шестого семейств). Функции, существующие на всей плоскости, мы, как правило, рассматривать не будем.

Для того чтобы уравнение (1) было фуксовым, необходимо выполнение некоторых условий. Одни из них являются алгебраическими, другие — трансцендентными.

Начнем с алгебраических условий.

Особые точки уравнения (1) подразделяются на два класса:

1. Точки, в которых y перестает быть голоморфной функцией от x , и точки, в которых x или y перестают быть конечными.

2. Особые точки в собственном смысле слова.

О первых из них можно не беспокоиться, поскольку, положив

$$x = \vartheta(x', y'), \quad y = \vartheta_1(x', y'),$$

где ϑ и ϑ_1 — некоторые рациональные функции, можно так подобрать ϑ и ϑ_1 , что новые переменные x' и y' в окрестности рассматриваемой особой точки будут конечными, а функция y' будет голоморфной относительно x' .

Что же касается особых точек в собственном смысле слова, то каждой из них соответствует определяющее уравнение, *разность корней которого должна быть равна нулю или единице, деленной на целое число*. Таковы алгебраические условия, о необходимости формулировки которых говорилось выше. Если эти условия выполнены, мы будем говорить, что уравнение (1) *нормально*.

Рассмотрим сначала два нормальных уравнения

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x)v, \quad \frac{d^2v}{dx_1^2} = \varphi_1(x_1)v$$

(предполагается, что функции φ и φ_1 рациональны относительно x и x_1). Если от первого из этих уравнений ко второму можно перейти с помощью подстановки

$$x = \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d},$$

то уравнения не считаются различными.

Рассмотрим теперь более общее нормальное уравнение

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v, \quad (1)$$

$$\psi(x, y) = 0 \quad (2)$$

и положим

$$x' = \vartheta(x, y), \quad y' = \vartheta_1(x, y). \quad (3)$$

Если оставить в стороне некоторые исключительные случаи, то x и y можно всегда найти из уравнений (2) и (3) в виде рациональных функций от x' и y' .

Мы будем предполагать, что рассматриваемый нами случай не относится к числу исключительных. Тогда

$$\frac{d^2v}{dx'^2} = \varphi'(x', y')v, \quad (1')$$

$$\psi'(x', y') = 0 \quad (2')$$

(уравнения (1) и (1') различными не считаются).

Мы скажем, что уравнения

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v, \quad (1)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi_1(x, y)v; \quad (1')$$

$$\psi(x, y) = 0, \quad (2)$$

$$\psi_1(x, y) = 0 \quad (2')$$

принадлежат к одному и тому же *типу*, если соотношения (2) и (2') тождественно совпадают, а уравнения (1) и (1') имеют одни и те же особые точки и одинаковые определяющие уравнения относительно каждой из них.

Поскольку уравнение

$$\frac{d^2v}{dx'^2} = \varphi'_1(x', y')v, \quad (1'')$$

$$\psi'_1(x', y') = 0 \quad (2'')$$

в силу принятого выше соглашения мы не считаем отличным от (1'), то я буду говорить, что оба уравнения принадлежат к одному и тому же типу.

Требуется решить следующую задачу:

1) установить, имеется ли среди уравнений данного типа *фуксово уравнение* [10];

2) найти такое уравнение, если оно существует.

Прежде всего нам необходимо произвести классификацию типов нормальных уравнений и разделить их на уравнения *фуксова*, *эллиптического* и *рационального* типов.

Пусть x — фуксова функция от отношения интегралов уравнения (1). Этой функции отвечает производящий многоугольник R_0 , имеющий $2n$ сторон первого рода и $2n$ вершин первого или второго типа. Сумма углов такого многоугольника должна быть меньше

$$\pi(2n - 2).$$

Пусть q — род соотношения (2), p — число особых точек уравнения (1); $a_1, a_2, \dots, a_p$ — эти особые точки, α_i — разность корней определяющего уравнения относительно точки a_i .

Если $p > 0$, то вершины многоугольника R_0 разбиваются на p циклов, при этом

$$n = 2q + p - 1$$

и сумма углов равна

$$2\pi \sum \alpha_i.$$

Следовательно, должно выполняться неравенство

$$\sum \alpha_i < 2q + p - 2. \quad (4)$$

Если же $p = 0$, то все вершины R_0 образуют один-единственный цикл и сумма углов равна 2π . В этом случае

$$n = 2q$$

и справедливо неравенство

$$q > 1. \quad (4')$$

Если неравенства (4) или (4') выполнены, то рассматриваемое уравнение имеет фуксов тип.

Предположим теперь, что x — двоякопериодическая функция интегралов уравнения (1). Тогда

$$\sum \alpha_i = 2q + p - 2, \quad (5)$$

или

$$q = 1, \quad p = 0. \quad (5')$$

Следовательно, рассматриваемое уравнение эллиптического типа.

Перечислим все возможные случаи уравнений эллиптического типа*:

$$q = 1, \quad p = 0,$$

$$q = 0, \quad p = 3, \quad \alpha_1 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{3},$$

* Если $q = 0$, то p не может быть равным ни 0, ни 1. Если же $p = 2$, то уравнение имеет вид

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{Av}{(x-a)^2}.$$

$$q = 0, \quad p = 3, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{4},$$

$$q = 0, \quad p = 3, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{6},$$

$$q = 0, \quad p = 4, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{2}.$$

Пусть, наконец, x — рациональная функция от z . Тогда справедливы неравенства

$$\sum \alpha_i > 2q + p - 2, \quad (6)$$

и предположение о том, что $p = q = 0$, необходимо отбросить.

Следовательно, уравнение в этом случае имеет *рациональный* тип. Перечислим все возможные случаи уравнений рационального типа (впрочем, все они хорошо известны):

$$q = 0, \quad p = 3, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{n},$$

$$q = 0, \quad p = 3, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{3},$$

$$q = 0, \quad p = 3, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{4},$$

$$q = 0, \quad p = 3, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{5}.$$

Проведенная классификация показывает, что уравнения одного и того же типа зависят от определенного числа P произвольных параметров, так что имеется ∞^∞ различных уравнений, образующих данный тип.

Эти P параметров, будучи комплексными, отвечают $2P$ вещественным параметрам. Число же вещественных параметров в точности совпадает с числом трансцендентных условий, которым должно удовлетворять уравнение (1) (принадлежащее, по предположению, к данному типу) для того, чтобы x был фуксовой функцией от z (соответственно, двояко-периодической или рациональной, если уравнение — эллиптического или рационального типа). (См.: О фуксовых функциях. — Acta mathematica, t. 1, p. 234, 257, 262 и 272.)*

Если бы речь шла не о трансцендентных, а об алгебраических условиях, то из сказанного можно было бы заключить, что среди уравнений одного и того же типа всегда имеется фуксово уравнение. Однако в нашем случае такой вывод не обоснован и требует специального доказательства. Именно это доказательство и составляет основную часть рассматриваемой нами задачи. Важность его нетрудно понять из следующего.

* См. настоящий том, стр. 96—97, 116, 120, 128. (Прим. ред.).

Предположим, что уравнение

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v, \quad (1)$$

$$\psi(x, y) = 0 \quad (2)$$

— фуксово. Пусть

$$(x = a_1, y = b_1), \quad (x = a_2, y = b_2), \quad \dots, \quad (x = a_p, y = b_p)$$

— особые точки уравнения (1), $1/k_i$ — разность корней определяющего уравнения относительно точки (a_i, b_i) , k_i — целое положительное число или бесконечность.

Рассмотрим функцию от x и y , не имеющую особых точек, кроме

$$(a_1, b_1), \quad (a_2, b_2), \quad \dots, \quad (a_p, b_p),$$

и возвращающуюся к своему начальному значению после того, как аналитическая точка (x, y) совершит k_i оборотов вокруг особой точки (a_i, b_i) (при $k_i = \infty$ последнее условие излишне). Такая функция однозначна относительно z .

Следовательно, интегралы уравнения

$$\frac{d^q w}{dx^q} = \sum \varphi_k(x, y) \frac{d^k w}{dx^k} \quad (7)$$

также однозначны, если функции φ_k рациональны относительно x и y и не имеют других особых точек, кроме

$$(a_1, b_1), \quad (a_2, b_2), \quad \dots, \quad (a_p, b_p),$$

причем все корни определяющего уравнения, записанного для точки (a_i, b_i) , кратны $1/k_i$ (при $k_i = \infty$ последнее условие излишне).

К аналогичным заключениям мы придем, рассматривая любые фуксовы и многие алгебраические функции.

Итак, если существование фуксова уравнения среди уравнений любого фуксова типа будет доказано, то в качестве следствий получим:

1) переменную и интегралы любого линейного уравнения с алгебраическими коэффициентами можно представить в виде однозначных функций одной и той же вспомогательной переменной;

2) координаты x и y точки любой заданной нам алгебраической кривой являются однозначными функциями одной и той же вспомогательной переменной z .

VI. Отношение подчинения между различными типами

Рассмотрим два нормальных уравнения

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v, \quad (1)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi_1(x, y)v. \quad (1')$$

Коэффициенты φ и φ_1 являются рациональными функциями двух переменных x и y , связанных алгебраическим соотношением

$$\psi(x, y) = 0, \quad (2)$$

по предположению, одним и тем же для обоих уравнений (1) и (1').

Пусть уравнение (1) имеет p особых точек

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_p, b_p),$$

причем разность корней определяющего уравнения относительно точки (a_i, b_i) равна $1/k_i$.

Относительно уравнения (1') предположим, что оно имеет те же особые точки $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_p, b_p)$, что и уравнение (1), и, кроме того, еще q других особых точек

$$(a_{p+1}, b_{p+1}), (a_{p+2}, b_{p+2}), \dots, (a_{p+q}, b_{p+q}).$$

Для последних разность корней определяющего уравнения в точке (a_i, b_i) равна $1/N_i$.

Потребуем, наконец, чтобы число N_1 делилось на k_1 , число N_2 — на $k_2, \dots, N_p$ делилось на k_p . Если k_i бесконечно, то N_i также обращается в бесконечность. Если же $N_i = \infty$, то условие делимости следует считать выполненным при любом k_i .

Если выполнены все перечисленные выше условия, то мы скажем, что тип, к которому принадлежит уравнение (1'), подчинен типу, к которому принадлежит уравнение (1) [11].

Пусть фуксов тип T' подчинен другому фуксову типу T . Предположим, что каждый из них содержит одно фуксово уравнение: первый тип — уравнение E' , второй — уравнение E . Пусть z — отношение интегралов уравнения E' , t — отношение интегралов уравнения E . Нетрудно видеть, что t — однозначная функция от z . Эта функция, очевидно, существует лишь в том случае, если z лежит внутри фундаментального круга. В свою очередь, t не может принимать значений, выходящих за пределы фундаментального круга. Внутри же фундаментального круга t , наоборот, принимает каждое значение бесконечно много раз.

Предположим, кроме того, что $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_p, b_p)$ — особые точки уравнения типа T , а $1/k_i$ — разность корней определяющего уравнения в точке (a_i, b_i) . Пусть F — функция аналитической точки (x, y) , не имеющая других особых точек, кроме $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_p, b_p)$, и та-

кая, что после k_i -кратного обхода вокруг точки (a_i, b_i) она возвращается к своему первоначальному значению. Функцией F может быть, например, интеграл линейного уравнения (7) предыдущего раздела. Относительно t и, следовательно, относительно z функция F однозначна.

Предположим, что нам неизвестно, содержит ли тип T фуксово уравнение (следовательно, мы не можем доказать существование функции t), но известно, что тип T' такое уравнение заведомо содержит и функция z существует. Нетрудно видеть, что F и в этом случае будет однозначной функцией от z .

Итак, для того чтобы доказать, что интегралы линейного уравнения с коэффициентами, рациональными относительно x и y так же, как и сами функции x и y , можно представить в виде однозначных функций одной и той же вспомогательной переменной, нет необходимости доказывать, что любой фуксов тип содержит фуксово уравнение. Достаточно доказать, что среди типов, подчиненных данному фуксову типу, найдется такой, который содержит фуксово уравнение.

Отсюда ясно, почему отношение подчинения типов играет столь важную роль.

Рассмотрим, в частности, уравнение E с рациональными коэффициентами. Пусть

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

— его особые точки, k_i — целое число, такое, что все корни определяющего уравнения в точке a_i кратны $1/k_i$. Если таких целых чисел не существует, то $k_i = \infty$.

Вместо того чтобы рассматривать тип T с особыми точками $a_1, a_2, \dots, a_n$ и разностями корней определяющих уравнений $1/k_1, 1/k_2, \dots, 1/k_n$, можно рассмотреть тип T' , подчиненный T . Пусть, например, у типа T' , помимо особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n$, имеются еще и p других особых точек $b_1, b_2, \dots, b_p$, причем каждое из $p + n$ определяющих уравнений, соответствующих каждой из особых точек, имеет двукратный корень.

Если T' содержит фуксово уравнение E' , то t будет фуксовой функцией отношения z интегралов этого уравнения. Характерное свойство этой фуксовой функции состоит в том, что она не может принимать ни одно из значений $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_p$. Если такая функция существует, то интегралы уравнения E , очевидно, являются однозначными функциями z .

Итак, для доказательства интегрируемости всех линейных уравнений с рациональными коэффициентами в некоторых однозначных функциях достаточно доказать, что всегда можно найти фуксову функцию, не принимающую n данных значений $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Эта задача будет подробно рассмотрена мной в другом мемуаре.

Аналогичные выводы справедливы и в отношении уравнений с алгебраическими коэффициентами, поскольку известно, что интегрирование уравнения с алгебраическими коэффициентами сводится к интегрированию уравнения более высокого порядка с рациональными коэффициентами.

VII. Фундаментальная лемма

Ни один из фуксовых типов не может содержать нескольких фуксовых уравнений.

В самом деле, предположим, что тип T содержит два фуксовых уравнения E и E' . Пусть z — отношение двух интегралов u_1 и u_2 уравнения E , t — отношение двух интегралов u'_1 и u'_2 уравнения E' .

Известно, что z принимает лишь те значения, которые лежат внутри фундаментального круга. Интегралы u_1, u_2 и u'_1, u'_2 всегда можно выбрать так, чтобы: 1) фундаментальная окружность для z так же, как и фундаментальная окружность для t , имела центр в точке 0 и радиус 1; 2) обе переменные z и t одновременно обращались в нуль, например, при $x=a$; 3) при каком-то одном значении x , например, при $x=b$ (отличном от a) аргумент z был равен аргументу t .

Ясно, что z будет однозначной функцией от t и, наоборот, t будет однозначной функцией от z . Из сделанных выше предположений следует, что отношение t/z и как функция от t , и как функция от z не существует вне фундаментального круга, а внутри него голоморфно и не обращается в нуль.

Рассмотрим, например, t/z как функцию от z . Пусть

$$z = \xi + i\eta,$$

$$u = \ln \operatorname{mod} \frac{t}{z},$$

где u — функция от ξ и η , голоморфная внутри фундаментального круга и удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0. \quad (1)$$

В плоскости переменной z рассмотрим окружность C , concentрическую фундаментальной окружности, радиуса $r < 1$.

В точках окружности C модуль t меньше единицы, и, таким образом,

$$u < \ln \operatorname{mod} \frac{1}{r}. \quad (2)$$

Но всякая голоморфная функция, удовлетворяющая уравнению (1), не может принимать внутри любого контура значения, которые были бы больше ее максимального значения, принимаемого на контуре. Следовательно, неравенство (2) справедливо для всех точек, расположенных внутри окружности C .

Но радиус окружности C можно выбрать сколь угодно близким к 1. При стремлении r к 1 правая часть неравенства (2) стремится к 0. Отсюда

следует, что внутри фундаментального круга u не может принимать положительных значений, и

$$\operatorname{mod} \frac{t}{z} \leq 1.$$

Поскольку t ничем не отличается от z , можно записать также, что

$$\operatorname{mod} \frac{z}{t} \leq 1,$$

откуда

$$\operatorname{mod} z = \operatorname{mod} t,$$

или

$$t = ze^{i\vartheta},$$

где ϑ — некоторая константа.

Но по предположению t и z при $x=b$ имеют одинаковые аргументы. Следовательно,

$$\vartheta = 0 \quad \text{и} \quad t = z.$$

Итак, уравнения E и E' не являются различными, что и требовалось доказать [12].

Эта важная лемма была сформулирована мной в сообщении, представленном Парижской академии наук (Comptes rendus, 1881, t. 93, p. 582), и затем Клейном (Mathematische Annalen, Bd. 21, S. 209). Клейн рассмотрел, кроме того, случай, когда функции существуют в области, ограниченной бесконечно многими окружностями (см. мемуар «О клейновых функциях», раздел IX (Acta mathematica, t. 3, p. 83)). Я не буду останавливаться здесь на этом обобщении, поскольку оно не понадобится мне в дальнейшем.

VIII. Общее представление о методе непрерывности

Клейн и я независимо друг от друга пришли к методу, позволяющему доказывать, что во всяком фуксовом типе содержится одно фуксово уравнение. Его можно назвать *методом непрерывности*. Этот метод мы применили к различным задачам (Comptes rendus, t. 92, p. 1200 et 1486; Klein. Mathematische Annalen, Bd. 19, p. 565; Bd. 20, p. 49; Bd. 21, p. 211; Poincaré, Comptes rendus, t. 94, p. 1038).

Основные идеи этого метода заключаются в следующем.

Пусть сначала x — вещественная переменная, а y — вещественная функция этой переменной. Предположим, что любому значению x , конечному или бесконечному, отвечает одно и только одно значение y (это значение является аналитической — голоморфной или мероморфной — функцией от x), причем ни одно значение y не принимает дважды. Очевидно, что тогда все возможные значения от $-\infty$ до $+\infty$ y принимает один и только один раз.

Наоборот, пусть переменная x такова, что может принимать лишь значения, заключенные между двумя конечными пределами a и b . Будем считать, что при всех значениях x , лежащих внутри отрезка ab , y является аналитической функцией от x . Характер функции y в самих точках a и b неизвестен. Кроме того, предполагается, что функция y не может принимать дважды одно и то же значение. При x , стремящемся к a , функция y стремится к некоторому пределу A . При x , стремящемся к b , y стремится к B . Тогда мы можем лишь утверждать, что функция y либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает, и принимает все значения, заключенные между A и B .

Рассмотрим теперь вместо одной n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и n вещественных функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ от этих переменных. Предположим, что y при всех значениях x являются аналитическими функциями и не принимают одно и то же значение дважды. Перечисленных условий достаточно, чтобы утверждать, что функции y могут принимать любые заданные значения. Рассмотрим, в частности, случай, когда $n=2$. Величины x_1 и x_2 будем считать координатами, задающими положение точки на сфере S , а y_1 и y_2 — координатами, определяющими положение точки на сфере S' . Каждой точке сферы S соответствует одна и только одна точка на сфере S' . Каждой точке на сфере S' не может соответствовать более одной точки на сфере S . Следовательно (названные условия достаточны), каждой точке на сфере S' соответствует одна точка на сфере S .

Аналогичное утверждение справедливо и в том случае, если в качестве S и S' взять не две сферы, а две произвольные замкнутые поверхности. Предположим теперь, что S не замкнутая, а открытая поверхность с краем, или границей. Пусть координаты каждой точки m' поверхности S' аналитически зависят от координат соответствующей точки m поверхности S , если m не принадлежит краю S (если же точка принадлежит краю поверхности, то о характере зависимости координат m' от координат m ничего не известно). В этом случае сделанные выше предположения не позволяют сделать вывод о том, что каждой точке поверхности S' соответствует некоторая точка, принадлежащая S .

Аналогичная ситуация возникает и в том случае, когда S и S' — поверхности размерности больше двух в пространстве, размерность которого больше трех (такие поверхности немецкие авторы называют *многообразиями*).

Будем всегда предполагать, что каждой точке m многообразия S соответствует одна и только одна точка m' многообразия S' , так что координаты m' аналитически зависят от координат точки m , если только m не принадлежит краю многообразия S (если таковой имеется). Кроме того, мы считаем, что ни одной точке S' не может соответствовать более одной точки S . Если S — *замкнутое многообразие*, то каждой точке S' заведомо отвечает лишь одна точка S . Наоборот, если S — *открытое многообразие с краем, или границей*, то утверждать ничего нельзя.

Применим теперь развитые выше соображения к рассматриваемой задаче.

Мы скажем, что два типа уравнений

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y) v, \quad (1)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi_1(x, y) v, \quad (1')$$

$$\psi(x, y) = 0, \quad (2)$$

$$\psi_1(x, y) = 0 \quad (2')$$

принадлежит к одному и тому же классу, если оба соотношения (2) и (2') имеют один и тот же род, а оба уравнения (1) и (1') имеют одинаковое число особых точек, так что особые точки этих уравнений находятся во взаимно однозначном соответствии, а определяющие уравнения для особых точек, соответствующих друг другу, совпадают.

Каждому типу одного и того же класса C' поставим в соответствие точку некоторого многообразия S' .

Точно так же мы скажем, что две фуксовы группы (первого, второго или шестого семейства) принадлежат к одному и тому же классу, если их производящие многоугольники имеют одинаковое число сторон, а вершины образуют одинаковое число циклов, так что циклы находятся во взаимно однозначном соответствии и суммы углов двух соответствующих друг другу циклов совпадают.

Каждому классу C' типов отвечает некий класс C групп: если фуксово уравнение принадлежит классу C' , то его группа принадлежит классу C .

Каждой группе класса C соответствует точка некоторого многообразия S .

Но каждой точке многообразия S отвечает одна и только одна точка многообразия S' . Для того чтобы убедиться в этом, достаточно обратиться к теории фуксовых функций, в которой доказывается, что каждой фуксовой функции отвечает лишь одно фуксово уравнение. Кроме того, в силу фундаментальной леммы, ни одной точке S' не может соответствовать более одной точки S . Следовательно, остается еще показать, что каждой точке S' отвечает некоторая точка S .

В соответствии с тем, что уже говорилось раньше, для этого достаточно показать, что S — *замкнутое многообразие без края*. Заранее это не очевидно.

Действительно, среди групп данного класса имеется бесконечно много таких, которые могли бы быть *граничными группами*, т. е. отвечать точкам, принадлежащим *краю* многообразия S . Производящие многоугольники таких групп имеют одну или несколько бесконечно малых сторон. В самом деле, ясно, что можно всегда построить производящий многоугольник, у которого одна из сторон бесконечно мала. Однако для того чтобы S было открытым многообразием, этого недостаточно, поскольку, как показано в «Теории фуксовых групп» (раздел IX), одну и ту же группу могут порождать бесконечно много эквивалентных многоугольников, и среди них

всегда можно найти такой, все стороны которого будут больше любой заданной величины.

Таким образом, прежде чем утверждать, что каждой точке S' отвечает некоторая точка S , необходимо доказать, что S' — замкнутое многообразие (заранее это не очевидно) [13]. Клейн пренебрег доказательством этого факта. Между тем *при попытке доказать этот факт мы наталкиваемся на трудность, преодолеть которую не так просто.*

IX. Вторая лемма

Предположим, что мы непрерывно деформируем наш многоугольник R_0 так, что его элементы непрерывно зависят от некоторого параметра t . Рассмотрим фуксово уравнение, которое можно построить с помощью R_0 , и тип T , к которому оно принадлежит. Фуксово уравнение имеет вид

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v, \quad (1)$$

$$\psi(x, y) = 0 \quad (\text{соотношение рода } p). \quad (2)$$

Его тип T определен, если известны $3p - 3$ модулей соотношения (2) и особые точки уравнения (1). Эти величины я назову *параметрами типа*.

В мемуаре «О фуксовых функциях» (раздел I) показано, что функции Θ , которые можно построить с помощью многоугольника R_0 , непрерывны по t . Отсюда следует, что параметры типа T — также непрерывные функции от t , что особенно важно для применения метода непрерывности. Мы еще вернемся к этому в дальнейшем.

Предположим, что при t , стремящемся к нулю, одна или несколько сторон многоугольника становятся бесконечно малыми (речь идет об их евклидовой длине, а не о величине L). Пусть, например, бесконечно малыми становятся две сопряженные стороны или $2q$ попарно сопряженных сторон. Тогда те стороны R_0 , которые остаются конечными, будут по-прежнему сопряжены друг с другом. Итак, R_0 будет одним из предельных многоугольников, которые мы подробно изучим несколько ниже.

Перейдем к пределу и положим $t=0$. Тогда $2q$ бесконечно малых сторон многоугольника R_0 обратятся в нуль, и многоугольник R_0 превратится в некоторый другой многоугольник R'_0 , имеющий лишь $2n - 2q$ попарно сопряженных сторон. Рассмотрим группу G , порожденную многоугольником R_0 . Каждой паре сопряженных сторон многоугольника R_0 отвечает подстановка группы G , переводящая одну из этих сторон в другую, ей сопряженную. Таким образом, образующими группы G служат ровно n подстановок, соответствующих различным сторонам многоугольника R_0 . Среди этих подстановок выделим те $n - q$ подстановок, которые соответствуют сторонам R_0 , остающимся конечными. Группа, порожденная этими $n - q$ подстановками, обозначается через G' и содержится в группе G .

Пусть G'' — группа, порожденная многоугольником R'_0 . Она изоморфна группе G' , поскольку каждой из *конечных* сторон R_0 соответствует некоторая сторона многоугольника R'_0 . При t , стремящемся к 0, образ многоугольника R_0 при подстановке группы G'' будет стремиться к образу многоугольника R'_0 при соответствующей подстановке группы G' .

Обозначим через A ту часть фундаментального круга, которая заполнена образами многоугольника R_0 при подстановках группы G'' , а через B — ту его часть, которую занимают образы многоугольника R_0 при подстановках группы G , не принадлежащих группе G' .

По предположению, R_0 — многоугольник первого семейства или первого типа второго или шестого семейств. После перехода к пределу многоугольник R_0 будет принадлежать ко второму или шестому семейству, причем либо к первому, либо ко второму типу этих семейств, т. е. либо не будет содержать гиперболических циклов, либо будет допускать их.

В первом случае говорят, что R_0 относится к первому типу, во втором — ко второму.

В первом случае образы многоугольника R_0 при подстановках группы G заполняют весь фундаментальный круг (ср. «Теорию фуксовых групп», раздел VI). Следовательно, если t стремится к 0, то полная площадь B также стремится к нулю. Одновременно с этим наименьшее расстояние от B до начала координат стремится к 1, т. е. к радиусу фундаментальной окружности.

Во втором случае наблюдается обратная картина, и площадь B к нулю не стремится.

Итак, пусть многоугольник R_0 первого типа. В этом случае R_0 порождает фуксово уравнение

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi'(x, y)v, \quad (1')$$

$$\psi'(x, y) = 0, \quad (2')$$

принадлежащее к типу T' , менее сложному, чем T .

Для простоты будем считать, что $q=1$. Тогда у многоугольника R'_0 будет на две стороны меньше, чем у R_0 . Следовательно, либо уравнение (1') будет иметь на одну особую точку меньше, чем уравнение (1), либо соотношение (2') будет иметь род $p-1$ вместо p , а уравнение (1') будет иметь на две особые точки больше, чем уравнение (1) (см. ниже, стр. 194).

Предположим, что нам представился первый случай. Я утверждаю, что тогда модули соотношения (2) будут стремиться к модулям соотношения (2'), а особые точки уравнения (1) — к особым точкам уравнения (1'). Последнее означает, что среди особых точек уравнения (1) найдутся две точки, стремящиеся к одной и той же особой точке уравнения (1').

Прежде всего докажем, что тэта-фуксовы функции, порождаемые многоугольником R_0 , стремятся к тэта-фуксовым функциям, порождаемым многоугольником R'_0 .

Рассмотрим ряды

$$\Theta(z, H) = \sum H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m},$$

$$\Theta'(z, H) = \sum H\left(\frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}\right) (\gamma'_i z + \delta'_i)^{-2m},$$

где H — некоторая рациональная функция, а $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ и $\left(z, \frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}\right)$ соответственно означают подстановки группы G и G' . Я утверждаю, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Theta(z) = \Theta'(z).$$

Можно найти контур C , охватывающий точку z и достаточно малый для того, чтобы он был расположен целиком внутри R_0 и R'_0 и оставался внутри R_0 при достаточно малых значениях t . Неевклидову площадь S , заключенную внутри этого контура, обозначим через σ , а неевклидову длину L наибольшей дуги окружности, которую можно провести внутри C так, чтобы она была ортогональна фундаментальной окружности, обозначим через λ . Пусть r — некоторая величина, A — неевклидова длина L отрезка Oz . Так же, как в разделе I мемуара «О фуксовых функциях» (Acta mathematica, t. 1, p. 206), положим

$$K = \frac{\pi}{4\sigma} (e^{2A} + e^{-2A} + 2)^m e^{2\lambda + 2mr}.$$

Обозначим через S и S'_n суммы членов рядов Θ и Θ' , соответствующих точкам $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ и $\frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}$, расположенным внутри окружности M с центром в начале координат и радиусом R , равным $(n-1)r$. Пусть

$$\Theta = S_n + R_n, \quad \Theta' = S'_n + R'_n.$$

Если h — наибольшее значение, которое может принимать модуль функции H в образах точки z , то

$$\text{mod } R_n < \frac{K h e^{2n(1-m)r}}{1 - e^{2(1-m)r}}, \quad \text{mod } R'_n < \frac{K h e^{2n(1-m)r}}{1 - e^{2(1-m)r}}.$$

Следовательно, при достаточно большом n

$$\text{mod } R_n < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{mod } R'_n < \frac{\varepsilon}{3},$$

где ε — некоторая заданная величина.

Число n , а тем самым и окружность M впредь будем считать фиксированными.

Выбирая τ достаточно малым и изменяя t от 0 до τ , можно добиться, чтобы образы точки z не выходили из окружности M и не входили в нее, а образы точки z при подстановках группы G , не принадлежащих подгруппе G' , располагались вне M .

Тогда при t , изменяющемся от τ до 0, S_n будет непрерывной функцией от t , поскольку S_n представляет собой сумму конечного числа непрерывных функций от t . При $t=0$ S_n совпадает с S'_n . Следовательно, придавая t достаточно малые значения, получаем

$$\text{mod } (S'_n - S_n) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом,

$$\text{mod } (\Theta - \Theta') < \varepsilon$$

при любом сколь угодно малом ε , что и требовалось доказать.

Входящие в уравнение (1) фуксовы функции x и y можно выбирать произвольно. Положим

$$x = \frac{\Theta(z, H)}{\Theta(z, H_1)}, \quad y = \frac{\Theta(z, H_2)}{\Theta(z, H_1)},$$

где H , H_1 и H_2 — три произвольно выбранные рациональные функции. Аналогично, пусть

$$x_1 = \frac{\Theta'(z, H)}{\Theta'(z, H_1)}, \quad y_1 = \frac{\Theta'(z, H_2)}{\Theta'(z, H_1)},$$

тогда

$$x_1 = \lim_{t \rightarrow 0} x, \quad y_1 = \lim_{t \rightarrow 0} y.$$

Отсюда ясно, что в пределе соотношение, связывающее x и y , совпадает с соотношением между x_1 и y_1 и, следовательно, модули соотношения (2) совпадают с модулями соотношения (2').

Точно так же

$$\lim \left[\frac{1}{2} \frac{x'''x'}{(x')^4} - \frac{3}{4} \frac{(x'')^2}{(x')^4} \right] = \frac{1}{2} \frac{x_1'''x_1'}{(x_1')^4} - \frac{3}{4} \frac{(x_1'')^2}{(x_1')^4},$$

где x' , x'' , ... означают первую, вторую, ... производную от x по z .

Поэтому

$$\lim \varphi(x, y) = \varphi'(x, y),$$

и, следовательно, особые точки уравнения (1) стремятся к особым точкам уравнения (1'), что и требовалось доказать.

Все утверждения, сделанные до сих пор, перестают быть верными, если R_0 — многоугольник второго типа.

В случае, если многоугольник R_0 симметричен, полученные результаты можно доказывать совершенно иначе.

Рассмотрим, например, криволинейный четырехугольник $\alpha\beta\gamma\delta$, стороны которого образованы дугами окружностей, ортогональных фундаментальной окружности, а углы равны π , деленному на целое число. Обозначим эти углы через α , β , γ и δ . Построив четырехугольник, симмет-

ричный данному относительно стороны $\beta\gamma$ и объединив оба четырехугольника в одну фигуру, получим некоторый шестиугольник, порождающий соответствующую систему фуксовых функций. Но ту же систему функций можно построить, если воспользоваться конформным отображением четырехугольника $\alpha\beta\gamma\delta$ на круг с центром в 0 и радиусом 1. Если z — внутренняя точка четырехугольника, а x — соответствующая ей точка круга, то x есть фуксова функция от z .

Предположим теперь, что сторона $\gamma\delta$ становится бесконечно малой, а затем стягивается в точку. Четырехугольник $\alpha\beta\gamma\delta$ при этом вырождается в треугольник $\alpha\beta\gamma$. Вершина γ этого треугольника лежит на фундаментальной окружности, а угол $\alpha\gamma\beta$ равен нулю. Рассмотрим снова четырехугольник $\alpha\beta\gamma\delta$ и предположим, что его сторона $\gamma\delta$ уже очень мала, но еще отлична от нуля. Можно провести бесконечно много окружностей $\beta_i\gamma_i$, касающихся окружности $\beta\gamma$ в точке γ_i и пересекающихся с окружностью $\alpha\beta$ в точке β_i под углом β . Проведем одну из них $\beta_1\gamma_1$ так, чтобы треугольник $\alpha\beta_1\gamma_1$ лежал целиком внутри рассматриваемого четырехугольника и был как можно большим. Вторую окружность $\beta_2\gamma_2$ (из числа тех же окружностей) проведем так, чтобы наш четырехугольник оказался целиком внутри треугольника $\alpha\beta_2\gamma_2$, но на этот раз треугольник должен быть как можно меньше.

Пусть z_0 — точка внутри треугольника $\alpha\beta_1\gamma_1$. Отобразим конформно треугольник $\alpha\beta_1\gamma_1$, четырехугольник $\alpha\beta\gamma\delta$ и треугольник $\alpha\beta_2\gamma_2$ на круг с центром в 0 и радиусом 1 так, чтобы точка z_0 перешла в центр круга. Пусть x_1 , x и x_2 — точки круга, в которые переходит точка z треугольника $\alpha\beta_1\gamma_1$, четырехугольника $\alpha\beta\gamma\delta$ и треугольника $\alpha\beta_2\gamma_2$. Тогда

$$\text{mod } x_1 > \text{mod } x > \text{mod } x_2.$$

Если сторона $\gamma\delta$ стягивается в точку, то оба треугольника $\alpha\beta_1\gamma_1$ и $\alpha\beta_2\gamma_2$ совпадают, и, как нетрудно показать,

$$\lim \text{mod } x_1 = \lim \text{mod } x_2,$$

откуда

$$\lim \text{mod } x_1 = \lim \text{mod } x,$$

$$\lim x_1 = \lim x,$$

что и требовалось доказать.

Это доказательство (по существу мы привели лишь его набросок) неприменимо, если многоугольник R_0 не симметричен.

Х. Симметричные типы

Применим метод непрерывности сначала к простому случаю.

Пусть

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x)v$$

— уравнение, у которого функция φ рациональна относительно x , все особые точки вещественны, а определяющее уравнение в каждой из них имеет двукратный корень. Тип T , к которому принадлежит это уравнение, называется *симметричным*, поскольку если он содержит фуксово уравнение, то соответствующий производящий многоугольник симметричен.

Я утверждаю, что всякий симметричный тип содержит фуксово уравнение.

Если число особых точек равно трем, то всегда можно предположить, что ими являются точки 0 , 1 и ∞ (в противном случае следует произвести линейную замену переменной). Но тогда, как известно, среди уравнений типа T существует фуксово уравнение. Это именно то уравнение, которое определяет квадрат модуля эллиптической функции как функцию отношения ее периодов.

Предположим теперь, что уравнения типа T имеют четыре особые точки. В этом случае можно всегда считать (в противном случае достаточно произвести линейную замену переменной), что особые точки совпадают с точками

$$0, 1, a \text{ и } \infty,$$

где a — вещественное положительное число, большее 1 .

Пусть α , β , γ и δ — четыре точки, взятые на фундаментальной окружности (предполагается, что, совершая обход по окружности, мы будем встречать их в следующем порядке: α , β , γ , δ). Проведем четыре окружности, ортогональные фундаментальной окружности и проходящие соответственно через точки α и β , β и γ , γ и δ , δ и α . Мы получим некоторый четырехугольник. Рассмотрим четырехугольник, симметричный с первым, например относительно стороны $\delta\alpha$. Объединение этих двух многоугольников образует многоугольник R_0 , порождающий симметрическую фуксову группу рода 0 , принадлежащую ко второму семейству. Обозначим эту группу G .

Построим соответствующие фуксовы функции и, в частности, функцию

$$x = f(z),$$

через которую остальные функции выражаются линейно. Для того чтобы $f(z)$ была полностью определена, наложим условия

$$f(\alpha) = 0, \quad f(\beta) = 1, \quad f(\delta) = \infty$$

и потребуем, чтобы

$$f(\gamma) = c,$$

где c — вещественное положительное число, большее 1 . Как функция от x , z будет отношением двух интегралов фуксова уравнения

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x) v,$$

где коэффициент φ рационален относительно x , особые точки расположены в 0 , 1 , c и ∞ , и в каждой из них определяющее уравнение имеет двукратный корень.

Итак, чтобы убедиться в том, что тип T содержит фуксово уравнение, достаточно доказать, что точки α , β , γ и δ можно выбрать так, чтобы

$$c = a.$$

Предположим, что точки α , β , γ , δ остаются неподвижными, а γ описывает дугу $\beta\delta$ фундаментальной окружности, перемещаясь от точки β до точки δ .

При этом происходит следующее:

1. Тэта-фуксовы ряды, определенные в мемуаре «О фуксовых функциях» (раздел I), будут непрерывными функциями точки γ , поскольку, как там показано, они сходятся равномерно.

2. Следовательно, непрерывными функциями точки γ будут и сами фуксовы функции, и величина c .

3. В силу фундаментальной леммы, c не может принимать одно и то же значение дважды.

4. Когда точка γ подходит бесконечно близко к точке β , четырехугольник $\alpha\beta\gamma\delta$ вырождается в треугольник $\alpha\beta\delta$, а многоугольник R_0 переходит в четырехугольник R'_0 , образованный этим треугольником и треугольником, симметричным ему относительно окружности $\alpha\delta$. Вторая лемма утверждает, что величина c при этом стремится к 1.

5. По той же причине, когда γ приближается к δ , c стремится к бесконечности.

Итак, когда γ описывает дугу фундаментальной окружности, двигаясь от β к δ , величина c непрерывно возрастает от 1 до ∞ и, следовательно, принимает значение a , заключенное между 1 и бесконечностью, что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что уравнения типа T имеют не четыре, а пять особых точек. С помощью линейной замены переменной всегда можем сделать так, что этими пятью особыми точками будут

$$0, 1, a, b, \infty,$$

причем выполняются неравенства

$$1 < a < b, \quad (1)$$

где a и b — вещественные числа.

Если a и b рассматривать как координаты точки плоскости, то каждому типу T будет соответствовать некоторая точка области, ограниченной двумя прямыми $a=1$, $a=b$ и прямой $b=\infty$. Эта область представляет собой не что иное, как определенное в разделе VIII многообразие S . Из самого метода рассмотрения ясно, что это многообразие открытое.

Выберем на фундаментальной окружности пять точек α , β , γ , δ и ϵ (точки указаны в том порядке, в котором они встречаются при обходе окружности). Тогда

$$\arg \alpha > \arg \beta > \arg \gamma > \arg \delta > \arg \epsilon.$$

Построив пятиугольник $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, а затем — пятиугольник, симметричный ему относительно стороны $\alpha\varepsilon$, получим многоугольник R_0 , порождающий некоторую фуксову группу. Обозначим через $x=f(z)$ ту из фуксовых функций, соответствующих этой группе, через которую остальные выражаются рационально. Кроме того, потребуем, чтобы

$$f(\alpha)=0, \quad f(\beta)=1, \quad f(\varepsilon)=\infty.$$

Величины

$$f(\gamma)=a, \quad f(\delta)=b$$

вещественны, положительны и удовлетворяют неравенствам

$$1 < a < b.$$

Когда $\gamma - \beta$ стремится к 0, a стремится к 1. Когда $\gamma - \delta$ стремится к 0, $a - b$ стремится к 0. Наконец, когда $\delta - \varepsilon$ стремится к 0, b неограниченно возрастает. Кроме того, при фиксированных α, β и ε и изменяющихся γ и δ величины a и b будут непрерывными функциями от γ и δ .

Если аргументы γ и δ рассматривать как координаты точки на плоскости, то они будут удовлетворять неравенствам

$$\arg \beta < \arg \gamma < \arg \delta < \arg \varepsilon,$$

а соответствующая точка будет лежать внутри треугольника, образованного тремя прямыми

$$\arg \beta = \arg \gamma, \quad \arg \gamma = \arg \delta, \quad \arg \delta = \arg \varepsilon.$$

Этот треугольник есть не что иное, как многообразие S , которое так же как и многообразие S' , открыто.

Каждой точке многообразия S соответствует одна и только одна точка многообразия S' , каждой точке многообразия S' соответствует не более одной точки многообразия S . Каждой точке края многообразия S соответствует одна точка края S' . Отсюда с необходимостью следует, что каждой точке многообразия S' соответствует одна и только одна точка многообразия S .

Иначе говоря, пятиугольник $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ можно всегда выбрать так, чтобы a и b имели данные значения, т. е. чтобы всякий фуксов тип с пятью особыми точками содержал фуксово уравнение.

При большем числе особых точек доказательство проводится точно так же. Отсюда мы заключаем: *всякий симметричный фуксов тип содержит фуксово уравнение.*

Таким образом, в частном случае, когда тип симметричен, применение метода непрерывности не вызывает никаких затруднений.

Отсюда можно сделать важный вывод.

Пусть y — функция, зависящая от x , которая перестает быть голоморфной относительно x , когда x принимает n значений $a_1, a_2, \dots, a_n$. Рассмотрим фуксов симметричный тип с n особыми точками $a_1, a_2, \dots, a_n$. Он со-

держит некое фуксово уравнение. Переменная x в этом уравнении есть фуксова функция отношения z его интегралов

$$x = f(z).$$

Функция $f(z)$ не существует вне фундаментального круга. Если $a_n = \infty$, то функция $f(z)$ голоморфна внутри фундаментального круга и не принимает ни одного из значений $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Следовательно, внутри фундаментального круга функция y голоморфна относительно z .

Итак, если функция y зависит от x и имеет лишь конечное число особых точек (все особые точки вещественны), то можно найти переменную z , такую что x и y как функции z не существуют вне фундаментального круга и голоморфны внутри его.

В частности, можно предположить, что y — алгебраическая функция или интеграл линейного уравнения с алгебраическими коэффициентами, все особые точки которого вещественны.

XI. Обобщение предыдущей теоремы

До сих пор мы применяли метод непрерывности лишь к симметричным типам. Однако прежде чем приступать к изучению более сложных типов, следует извлечь из уже полученных результатов возможно бóльшую пользу. Пусть

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x)v$$

— уравнение с рациональным относительно x коэффициентом $\varphi(x)$ и особыми точками $a_1, a_2, \dots, a_n$. Некоторые особые точки могут не быть вещественными. Каждое определяющее уравнение имеет двукратный корень.

Обозначим через T тип, к которому принадлежит это уравнение.

Ниже я докажу, что T содержит фуксово уравнение. Сейчас же меня будет интересовать другое. Я хочу показать, что существует тип, подчиненный типу T и содержащий фуксово уравнение; иначе говоря, существует фуксова функция, которая не может принимать ни одного из значений $a_1, a_2, \dots, a_n$ внутри фундаментального круга и, кроме того, не принимает также некоторые другие значения $b_1, b_2, \dots, b_k$.

Набор чисел a можно считать дополненным любыми величинами. Если среди чисел a имеются комплексные, то всегда можно предполагать, что набор чисел a содержит также и комплексно сопряженные величины (в противном случае, набор можно пополнить комплексно сопряженной величиной).

Предположим, что теорема верна, если набор величин a содержит лишь $q - 1$ пар комплексных чисел, и докажем, что она верна, если этот набор содержит q пар комплексных чисел. Этого достаточно, поскольку в предыдущем разделе я доказал теорему для случая, когда все a вещественны.

Итак, пусть набор величин $a_1, a_2, \dots, a_n$ содержит $n - 2q$ вещественных величин

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-2q} \quad (1)$$

и $2q$ пар комплексно сопряженных величин

$$a'_1, a'_2, \dots, a'_{2q}. \quad (2)$$

Положим

$$\varphi(x) = (x - a'_1)(x - a'_2) \dots (x - a'_{2q}), \quad (3)$$

где $\alpha(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами. Уравнение

$$\varphi'(x) = 0$$

имеет по крайней мере один вещественный корень и, следовательно, не более $q - 1$ пар комплексных корней. Пусть

$$c_1, c_2, \dots, c_{2q-1}$$

— корни этого уравнения. Введем обозначения:

$$n - 2q = p, \quad 2q - 1 = m.$$

Среди величин

$$0, \varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_p); \quad \varphi(c_1), \varphi(c_2), \dots, \varphi(c_m) \quad (4)$$

имеется не более $q - 1$ пар комплексных величин.

Следовательно, можно построить фуксову функцию $F(z)$, не принимающую этих значений, поскольку, по предположению, наша теорема верна для системы, содержащей лишь $q - 1$ пар комплексно-сопряженных величин.

Пусть

$$\varphi(x) = F(z).$$

Прежде всего ясно, что x — однозначная функция от z . Действительно, x перестал бы быть однозначной функцией от z , если бы

$$\varphi'(x) = 0,$$

но тогда

$$x = c_i, \quad F(z) = \varphi(c_i),$$

что невозможно.

Кроме того, x не может принимать ни значений

$$a_1, a_2, \dots, a_p$$

(в противном случае выполнялось бы равенство

$$F(z) = \varphi(a_i),$$

что невозможно), ни значений

$$a'_1, a'_2, \dots, a'_{2q}$$

(ибо тогда мы имели бы

$$F(z) = 0,$$

что также невозможно).

Производная от x по z никогда в нуль не обращается, ибо если бы она была равна нулю, то производная от F по z также была бы равна нулю, чего никогда не бывает.

Функция x — фуксова относительно z . Действительно, пусть

$$F(z) = \varphi(x) = y, \quad v = \sqrt{\frac{dF}{dz}}.$$

Тогда, поскольку F — фуксова функция,

$$\frac{d^2v}{dy^2} = \psi(y)v,$$

где $\psi(y)$ — рациональная функция от y .

Далее, если

$$w = \sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

и, следовательно,

$$v = w \sqrt{\varphi'(x)},$$

то

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \left\{ [\varphi'(x)]^2 \psi[\varphi(x)] + \frac{3}{4} \left[\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} \right]^2 - \frac{1}{2} \frac{\varphi'''(x)}{\varphi'(x)} \right\} w, \quad (5)$$

где коэффициент при w является рациональной функцией от x .

Таким образом, x — однозначная функция от z , т. е. от отношения интегралов уравнения (5).

Следовательно, x — фуксова функция, и мы заключаем, что она не может принимать ни одно из значений (1) и (2) и, кроме того, ни одно из значений, при которых либо $\varphi(x) = \varphi(a_i)$, либо $\varphi(x) = \varphi(c_i)$.

Обозначим эти значения через

$$b_1, b_2, \dots, b_k.$$

Уравнение (5) фуксово и имеет особые точки в

$$a_1, a_2, \dots, a_p, \quad a'_1, a'_2, \dots, a'_{2q}, \quad b_1, b_2, \dots, b_k,$$

причем все определяющие уравнения имеют двукратный корень. Следовательно, уравнение (5) принадлежит к типу, подчиненному T .

Итак, мы всегда можем найти фуксову функцию $x = f(z)$, не принимающую n заданных значений

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

и k других не заданных значений

$$b_1, b_2, \dots, b_k.$$

Этой фуксовой функции отвечает фуксово уравнение, имеющее a и b своими особыми точками. Все определяющие уравнения, записанные для точек a и b , имеют двукратный корень. Указанное фуксово уравнение принадлежит к типу, подчиненному T .

Пусть теперь y — функция от x , не имеющая других особых точек, кроме a . Если $x=f(z)$, то y будет однозначной функцией от z .

Так происходит и в том случае, когда y — интеграл линейного уравнения с алгебраическими коэффициентами.

Отсюда вывод: *всегда можно найти такую переменную z , что переменная x и интегралы линейного уравнения с алгебраическими коэффициентами будут ее однозначными функциями.*

ХII. Предельные многоугольники

Говорят, что фундаментальные многоугольники R_0 и R'_0 двух фуксовых групп G и G' принадлежат к одному и тому же классу, если они удовлетворяют следующим условиям.

1. R_0 и R'_0 имеют одинаковое число сторон.
2. Если две стороны многоугольника R_0 сопряжены, то две стороны многоугольника R'_0 с теми же номерами, что и стороны R_0 , также сопряжены. Отсюда следует, что вершины многоугольников R_0 и R'_0 разделяются на одинаковое число циклов, так что каждому циклу многоугольника R_0 соответствует один цикл многоугольника R'_0 , и наоборот.
3. Циклы, находящиеся во взаимно однозначном соответствии, имеют равные суммы углов.

Многоугольники одного и того же класса зависят от некоторого числа параметров. Предположим для определенности, что они полностью определяются* тремя параметрами x , y и z , но эти параметры не свободны, а связаны соотношением

$$f(x, y, z) = 0. \quad (1)$$

Если x , y и z рассматривать как координаты точки в пространстве, то каждому многоугольнику данного класса будет отвечать некоторая точка поверхности S_1 , определяемой уравнением (1), а всему классу — либо вся поверхность S_1 , либо некоторая ее часть.

Однако в общем случае для того, чтобы многоугольник R_0 был производящим (фундаментальным) многоугольником фуксовой группы, x , y и z должны удовлетворять не только уравнению (1), но еще и некоторым неравенствам (2). Таким образом, данному классу отвечает лишь часть поверхности S_1 , ограниченная некоторыми кривыми, уравнения которых получаются из неравенств (2) при замене знака неравенства на знак равенства.

* Разумеется, два многоугольника по-прежнему не будут считаться различными, если их можно перевести друг в друга линейной подстановкой, не изменяющей фундаментальной окружности.

Рассмотрим пример. Пусть R_0 — многоугольник второго семейства и рода 0. Таков, например, шестиугольник $abcdef$. Стороны ab и cb , cd и ed , ef и af попарно сопряжены, вследствие чего его вершины образуют четыре цикла b, d, f и ace . Шесть его вершин должны удовлетворять следующему соотношению:

$$-(a-b)(c-d)(e-f) = (b-c)(d-e)(f-a).$$

Пусть $\varphi(\mu)$ — ангармоническое отношение μ и трех точек b, d и f , такое, что

$$\varphi(b) = \infty, \quad \varphi(d) = 0, \quad \varphi(f) = 1.$$

Положим

$$\varphi(a) = y, \quad \varphi(c) = x, \quad \varphi(e) = z.$$

Тогда многоугольник R_0 будет полностью определен, если известны x, y и z . Эти три параметра связаны между собой соотношением

$$x(1-z) = z(1-y), \quad (1')$$

представляющим собой не что иное, как уравнение параболоида.

Но x, y и z должны также удовлетворять и неравенствам

$$x < 0 < z < 1 < y, \quad (2')$$

выделяющим лишь некоторую часть параболоида, ограниченную следующими шестью прямыми:

$$x = z = 0, \quad (3)$$

$$x = 0, \quad y = 1, \quad (4)$$

$$y = z = 1, \quad (5)$$

$$z = 1, \quad (6)$$

$$x = y = \infty, \quad (7)$$

$$y = \infty, \quad z = 0. \quad (8)$$

Таковы граничные кривые используемой части поверхности параболоида. Каждой точке этой части его поверхности соответствует один многоугольник рассматриваемого класса, и наоборот.

Предположим теперь, что в рассматриваемом классе для полного задания многоугольника R_0 требуется p параметров $x_1, x_2, \dots, x_p$ и что эти p параметров удовлетворяют с одной стороны уравнению (1), а с другой — некоторым неравенствам (2). Если $x_1, x_2, \dots, x_p$ рассматривать как координаты точки в p -мерном пространстве, то уравнение (1) и неравенства (2) определяют в нем некоторую часть поверхности, или, как говорят немцы, многообразие. Обозначим это многообразие M_1 , его размерность равна $p-1$. В общем случае многообразие M_1 открыто и его край состоит из граничных многообразий размерности $p-2$, поскольку x удовлетво-

ряет не только уравнению, но еще и неравенствам. Граничные многообразия аналогичны граничным кривым, о которых говорилось выше. Их уравнения получают, заменяя по очереди в каждом из неравенств (2) знак неравенства на знак равенства.

Рассмотрим точку многообразия M_1 , расположенную в бесконечно малой окрестности одного из граничных многообразий. Ей отвечает многоугольник, некоторые элементы которого бесконечно малы. По этой причине мы будем называть его *предельным многоугольником*.

Рассмотрим прежде всего класс многоугольников R_0 рода 0, принадлежащих ко второму семейству. Число сторон равно $2n$. Каждая сторона с нечетным номером сопряжена со стороной, номер которой на 1 больше (сторона с номером $2p-1$ сопряжена со стороной, номер которой равен $2p$). Поэтому если обозначить через α_p вершину, разделяющую стороны с номерами p и $p-1$, то каждая вершина с нечетным номером будет образовывать цикл, состоящий лишь из нее самой, а все вершины с четными номерами — один общий цикл. Таким образом, общее число циклов равно $n+1$, причем все вершины лежат на фундаментальной окружности. Для того чтобы однозначно определить такой многоугольник, достаточно указать $2n-3$ его вершин, остальные три, по предположению, известны. Кроме того, эти $2n-3$ параметров удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned} -(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4) \dots (\alpha_{2n-1} - \alpha_{2n}) = \\ = (\alpha_{2n} - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3) \dots (\alpha_{2n-2} - \alpha_{2n-1}) \end{aligned} \quad (1'')$$

и неравенствам

$$\arg \alpha_1 < \arg \alpha_2 < \arg \alpha_3 < \dots < \arg \alpha_{2n} < \arg \alpha_1 + 2\pi. \quad (2'')$$

С другой стороны, рассмотрим фуксовы функции, порожденные многоугольником R_0 , и среди них ту, через которую остальные выражаются рационально. Обозначим ее через $f(z)$. Соответствующее фуксово уравнение будет иметь следующие особые точки (их $n+1$):

$$f(\alpha_1), f(\alpha_3), \dots, f(\alpha_{2n-1})$$

и

$$f(\alpha_2) = f(\alpha_4) = \dots = f(\alpha_{2n}).$$

Я хочу исследовать предельные многоугольники рассматриваемого класса. Для того чтобы найти их, знаки неравенства в (2) следует заменить знаками равенства. Имеем

$$\arg \alpha_i = \arg \alpha_{i+1}, \quad \alpha_i = \alpha_{i+1},$$

т. е. одна из сторон многоугольника R_0 должна быть бесконечно малой. Но если бесконечно малой становится сторона с четным номером, то в силу уравнения (1) какая-то из сторон с нечетным номером также должна быть бесконечно малой, и наоборот. Следовательно, в нуль всегда обращаются по крайней мере две стороны. В соответствии с этим различают три рода предельных многоугольников:

- 1) многоугольники, у которых в нуль обращаются две сопряженные стороны;
- 2) многоугольники, у которых в нуль обращаются две не сопряженные стороны;
- 3) многоугольники, у которых в нуль обращаются одновременно более двух сторон.

Так, в случае параболоида (1') граничные прямые (3), (5) и (7) соответствуют предельным многоугольникам первого рода, прямые (4), (6) и (8) — многоугольникам второго рода и точки

$$x = z = 0, \quad y = 1; \quad x = 0, \quad y = z = 1; \dots,$$

принадлежащие одновременно двум граничным прямым, соответствуют многоугольникам третьего рода.

Граничные многоугольники третьего рода, очевидно, являются частным случаем многоугольников первых двух родов. Оставим на некоторое время многоугольники третьего рода и попытаемся доказать, что многоугольники второго рода можно свести к многоугольникам первого рода.

Действительно, если мы рассмотрим многоугольник второго рода, то одна из его бесконечно малых сторон будет иметь четный номер. Предположим, что стороны занумерованы так, что бесконечно малой является сторона $\alpha_1 \alpha_2$ с номером 2. Другой бесконечно малой стороной пусть будет, например, сторона $\alpha_{2p} \alpha_{2p+1}$. Эти две стороны разделены $p-1$ парами сопряженных сторон $\alpha_2 \alpha_3$ и $\alpha_3 \alpha_4$; $\alpha_4 \alpha_5$ и $\alpha_5 \alpha_6$ и т. д., $\alpha_{2p-2} \alpha_{2p-1}$ и $\alpha_{2p-1} \alpha_{2p}$. Соединив α_{2p-1} с α_1 дугой окружности, ортогональной фундаментальной окружности, мы разобьем многоугольник R_0 на два других многоугольника r_0 и r'_0 . Например, можно считать, что r_0 содержит вершину α_{2p} , а r'_0 — вершину α_2 .

Пусть r''_0 — многоугольник, в который переходит r_0 при подстановке, переводящей $\alpha_{2p-2} \alpha_{2p-1}$ в $\alpha_{2p} \alpha_{2p-1}$, и

$$R'_0 = r_0 + r''_0.$$

Многоугольник R'_0 эквивалентен многоугольнику R_0 и имеет две бесконечно малые стороны, а именно: $\alpha_{2p} \alpha_{2p+1}$ и сторону, в которую переходит $\alpha_1 \alpha_2$. Эти две стороны разделены лишь $p-2$ парами сопряженных сторон. Производя над R'_0 те же операции, что и над R_0 , получаем многоугольник R''_0 , у которого две бесконечно малые стороны разделены лишь $p-3$ парами сопряженных сторон. Продолжая этот процесс, мы в конце концов придем к многоугольнику S_0 , эквивалентному R_0 . Две бесконечно малые стороны многоугольника S_0 являются смежными. Все многоугольники $R_0, R'_0, R''_0, \dots, S_0$ имеют общую часть r_0 . Следовательно, бесконечно малая сторона $\alpha_{2p} \alpha_{2p+1}$ и сопряженная с ней сторона $\alpha_{2p+1} \alpha_{2p+2}$ принадлежат S_0 . Вторую бесконечно малую сторону обозначим через $\beta \alpha_{2p}$. Соединим теперь β с α_{2p+1} дугой окружности, ортогональной фундаментальной

окружности. При этом многоугольник S_0 окажется разделенным на две части: треугольник $\alpha_{2p}\beta\alpha_{2p+1}=s'_0$ и $s_0=S_0-s'_0$.

Пусть γ — образ точки β при подстановке, переводящей $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$ в $\alpha_{2p+2}\alpha_{2p+1}$, а $\alpha_{2p+2}\gamma\alpha_{2p+1}=s''_0$ — треугольник, в который переходит при этой подстановке s'_0 . Многоугольник $S'_0=s_0+s''_0$ будет эквивалентен S_0 . Нетрудно видеть, что у него будет две бесконечно малые стороны: $\beta\alpha_{2p+1}$ и $\gamma\alpha_{2p+1}$, сопряженные друг с другом.

Хотя многоугольники S'_0 и R'_0 эквивалентны, тем не менее они не принадлежат к одному и тому же классу, поскольку разбиение сторон на сопряженные пары у них различно. Однако с помощью соответствующих преобразований многоугольник S'_0 можно перевести в эквивалентный многоугольник S''_0 , имеющий так же, как и S'_0 , бесконечно малые сопряженные стороны $\beta\alpha_{2p+1}$ и $\gamma\alpha_{2p+1}$ и такой, что каждая его сторона с нечетным номером сопряжена со следующей за ней четной стороной.

Таким образом, задача сводится к рассмотрению одних лишь предельных многоугольников первого рода.

Рассмотрим такой многоугольник. Пусть стороны $\alpha_1\alpha_2$ и $\alpha_{2n}\alpha_1$ сопряжены. Среди многоугольников первого рода будем различать два типа:

1) к первому относятся многоугольники, для которых

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_{2n} - \alpha_1} = 1;$$

2) ко второму относятся многоугольники, для которых

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_{2n} - \alpha_1} \neq 1.$$

В первом случае между вершинами многоугольника существуют следующие соотношения:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{2n}, \quad (9)$$

$$-(\alpha_3 - \alpha_4) \dots (\alpha_{2n-1} - \alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_3) \dots (\alpha_{2n-2} - \alpha_{2n-1}). \quad (1a)$$

Таким образом, если перейти к пределу или положить бесконечно малые стороны равными нулю, многоугольник R_0 вырождается в совершенно аналогичный многоугольник R'_0 , число сторон которого вместо $2n$ самое большее равно $2n-2$.

Скажем несколько слов о группах G и G' , порождаемых многоугольниками R_0 и R'_0 . Обозначим через S_i параболическую подстановку, которая переводит $\alpha_{i-1}\alpha_i$ в $\alpha_{i+1}\alpha_i$ (i — нечетное число). Образующими группы G служат n подстановок

$$S_1, S_3, \dots, S_{2n-1}.$$

Их произведение

$$S_1 S_3 S_5 \dots S_{2n-1}$$

является параболической подстановкой и имеет неподвижную точку α_{2n} .

Когда R_0 вырождается в R'_0 , подстановки $S_3, \dots, S_{2n-1}$ переходят в $S'_3, \dots, S'_{2n-1}$ и остаются параболическими, подстановка же S_1 становится формальной и утрачивает какой бы то ни было смысл. Группу G' порождают $n-1$ подстановок

$$S'_3, \dots, S'_{2n-1}.$$

В силу соотношения (1a) их произведение

$$S'_3 \dots S'_{2n-1}$$

представляет собой параболическую подстановку.

Таким образом, вершины четного порядка многоугольника R'_0 образуют параболический цикл (третьего подвида) и, следовательно, R'_0 и его образы при различных подстановках группы G' заполняют весь фундаментальный круг (см. «Теория фуксовых групп», раздел VI).

С помощью второй леммы можно показать, что разность

$$f(\alpha_1) - f(\alpha_2)$$

стремится к нулю, и тип T , к которому принадлежит связанное с R_0 фуксово уравнение, переходит в более простой тип T' , допускающий лишь n особых точек.

Предположим теперь, что две стороны $\alpha_1\alpha_2$ и $\alpha_{2n}\alpha_1$ стремятся к нулю так, что

$$\lim \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_{2n} - \alpha_1} \neq 1.$$

В этом случае перестает выполняться соотношение (1a), и произведение

$$S'_3 S'_5 \dots S'_{2n-1}$$

представляет собой гиперболическую, а не параболическую подстановку, вершины с четными номерами многоугольника образуют гиперболический цикл (четвертого подвида), и, следовательно, образы многоугольника R'_0 заполняют не весь фундаментальный круг, а лишь некоторую его часть, ограниченную бесконечно многими окружностями (см. «Теория фуксовых групп», раздел VI).

Вторая лемма в этом случае неприменима. Именно в этом и проявляется то глубокое различие, которое существует между предельными многоугольниками первого и второго типов.

Можно было бы построить совершенно аналогичную теорию предельных многоугольников третьего рода, которые представляют собой лишь частные случаи предельных многоугольников первого и второго родов.

В качестве второго примера рассмотрим многоугольник рода 0, стороны которого расположены так же, как в предыдущем примере. Пусть на этот раз R_0 принадлежит к первому семейству, и, следовательно, все его вершины лежат внутри фундаментального круга, а все циклы — эллиптические (первой категории).

Обозначим через

$$a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}$$

углы многоугольника R_0 с вершинами в точках

$$\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{2n-1}$$

а через b — сумму остальных его углов. Углы a равны 2π , деленному на некоторое целое число. Мы будем считать их заданными, тогда класс, к которому принадлежит многоугольник R_0 , будет полностью определен. В дальнейшем нам понадобится величина L , вычисленная для сторон этого многоугольника, а не их длина. В предыдущем примере, говоря о том, что некоторая сторона становится бесконечно малой, мы имели в виду ее евклидову длину, здесь же, напротив, речь идет о величине L , которая есть не что иное, как длина, понимаемая в смысле неевклидовой геометрии (см. «Теория фуксовых групп», раздел I; мемуар «О фуксовых функциях», раздел I).

Каким образом данный многоугольник R_0 может стать предельным? Это могло бы произойти в трех случаях:

- 1) если бы одна из его сторон стала бесконечно малой;
- 2) если бы один из его углов обратился в нуль;
- 3) если бы одна из его сторон стала бесконечно большой.

Нетрудно видеть, что два первых случая никогда не встречаются без того, чтобы имел место и третий случай. Обратимся поэтому к третьему случаю.

Предположим, что одна из сторон многоугольника R_0 , например $\alpha_n \alpha_1$, становится бесконечно большой. Тогда то же происходит и с сопряженной ее стороной $\alpha_1 \alpha_2$, но угол α_1 , заключенный между этими двумя сторонами, задан и конечен. Следовательно, бесконечна диагональ $\alpha_{2n} \alpha_2$. Но эта диагональ меньше суммы $2n-2$ остальных сторон. Следовательно, одна из них бесконечна. Пусть это будет, например, сторона $\alpha_{2p-2} \alpha_{2p-1}$. Но тогда сопряженная с ней сторона $\alpha_{2p-1} \alpha_{2p}$ также бесконечна. Соединив вершины α_1 и α_{2p-2} дугой окружности, ортогональной к фундаментальной окружности, мы разделим R_0 на два многоугольника: r_0 , которому принадлежит вершина α_2 , и r'_0 , которому принадлежит вершина α_{2n} . Пусть r''_0 — многоугольник, в который r_0 переходит при подстановке, переводящей $\alpha_1 \alpha_2$ в $\alpha_1 \alpha_{2n}$. Многоугольник $R'_0 = r'_0 + r''_0$, эквивалентный многоугольнику R_0 , имеет четыре бесконечно больших стороны, но эти стороны расположены последовательно, одна за другой. Отсюда следует, что бесконечно большими сторонами многоугольника R_0 всегда можно считать стороны $\alpha_{2n} \alpha_1, \alpha_1 \alpha_2, \alpha_2 \alpha_3, \alpha_3 \alpha_4$. Именно так мы и сделаем.

Можно предположить, что многоугольник R_0 имеет более четырех бесконечно больших сторон, однако такое предположение не является общим, и соответствующий частный случай мы пока оставим в стороне.

Остальные стороны (их $2n-4$), по предположению, конечны. Нетрудно доказать, что диагональ $\alpha_1 \alpha_3$ также конечна. Обозначим через r_0 треугольник $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, через r'_0 — его дополнение до многоугольника R_0 и

через r_0'' — треугольник $\alpha_3\beta\alpha_4$, в который переходит треугольник r_0 под действием подстановки, отображающей $\alpha_3\alpha_2$ в $\alpha_3\alpha_4$. Тогда многоугольник $R'_0 = r'_0 + r_0''$, эквивалентный многоугольнику R_0 , будет иметь самое большее две бесконечно большие стороны $\alpha_1\alpha_{2n}$ и $\beta\alpha_4$, сопряженные друг с другом, в то время как две сопряженные стороны $\alpha_1\alpha_3$ и $\alpha_3\beta$ будут конечны. Две последние стороны имеют конечную неевклидову длину L , но их геометрическая (евклидова) длина бесконечно мала. Предположим, что, перейдя к пределу, мы обратили обычную длину этих сторон в нуль. Тогда три вершины α_1 , α_3 и β многоугольника R'_0 сольются в одну, и R'_0 выродится в многоугольник R''_0 , имеющий не более $2n-2$ сторон, из которых $2n-4$ не отличаются от сторон многоугольника R_0 . Двумя остальными являются стороны $\alpha_{2n}\alpha_1$ и $\alpha_1\alpha_4$, сопряженные друг с другом. Вершина α_1 , расположенная на фундаментальной окружности, образует цикл, состоящий только из нее одной. Этот цикл может быть параболическим или гиперболическим.

Если цикл параболический (так происходит в том случае, когда окружность, проходящая через α_1 , α_{2n} и α_4 , касается фундаментальной окружности), то предельный многоугольник относится к первому типу.

Наоборот, если цикл гиперболический, то предельный многоугольник относится ко второму типу.

Свойства того и другого типа такие же, как и в предыдущем примере. Так, если группа G порождена многоугольником R_0 , то ее образующими будут n эллиптических подстановок

$$S_1, S_3, \dots, S_{2n-1},$$

причем неподвижной точкой подстановки S_i будет α_i . Обозначим через G'' группу, порожденную подстановками

$$S_5, S_7, \dots, S_{2n-1} \quad \text{и} \quad S_1S_3.$$

Если R_0 вырождается в R''_0 , то подстановки $S_5, S_7, \dots, S_{2n-1}$ переходят в эллиптические подстановки $S'_5, S'_7, \dots, S'_{2n-1}$, а S_1S_3 — в некоторую подстановку Σ . Подстановки S_1 и S_3 теряют смысл. Группа G' , порожденная многоугольником R'_0 , имеет образующими подстановки

$$S'_5, S'_7, \dots, S'_{2n-1} \quad \text{и} \quad \Sigma$$

и изоморфна G'' .

Если производящий (фундаментальный) многоугольник — первого типа, то подстановка Σ — параболическая, и многоугольники, в которые группа G' отображает R'_0 , заполняют весь фундаментальный круг. Когда R_0 стремится к R''_0 , образ многоугольника R'_0 при подстановке из G'' стремится к образу многоугольника R''_0 при соответствующей подстановке группы G' , а площадь поверхности, покрываемой многоугольниками, в которые отображают R'_0 подстановки группы G , не принадлежащие G'' , стремится к нулю. С помощью второй теоремы (в тех же обозначениях,

что и выше) можно было бы показать, что разность $f(\alpha_1) - f(\alpha_3)$ при этом также стремится к нулю.

Наоборот, если многоугольник второго типа, то Σ — гиперболическая подстановка, и образы многоугольника R_0'' не заполняют всего фундаментального круга. Прежние рассуждения становятся неприменимыми, и утверждать, что $f(\alpha_1) - f(\alpha_3)$ стремится к нулю, нельзя.

Аналогично можно было бы рассматривать и случай, когда число бесконечно больших сторон превышает 4.

В качестве третьего примера выберем многоугольник R_0 рода p первого семейства с $4p$ сторонами, у которого противоположные стороны сопряжены, вершины образуют один-единственный цикл, а сумма углов равна 2π .

Здесь также многоугольник мог бы стать предельным в трех случаях:

1) если бы одна из его сторон стала нулевой (имеется в виду по-прежнему неевклидова длина L этой стороны);

2) если бы один из углов обратился в нуль;

3) если бы сторона многоугольника стала бесконечно большой.

Так же, как и в предыдущем примере, первые два случая никогда не имеют места без того, чтобы одновременно имел место третий случай. Именно его мы и должны поэтому рассмотреть.

Обозначим, как и прежде, i -ю вершину через α_i и предположим, что бесконечно большими становятся сторона $\alpha_{4p}\alpha_1$ и сопряженная ей сторона $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$. Пусть β_1 — середина стороны $\alpha_{4p}\alpha_1$ (имеется в виду, что неевклидова длина L отрезка $\alpha_{4p}\beta_1$ равна неевклидовой длине L отрезка $\beta_1\alpha_1$), а β_2 — середина стороны $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$. Соединим β_1 и β_2 дугой окружности ортогональной фундаментальной окружности. Дуга $\beta_1\beta_2$ будет некоторой секущей нашего многоугольника и *эта секущая будет конечной*. Многоугольник R_0 она разбивает на две части: r_0 , которая содержит вершину α_1 , и r'_0 , содержащую вершину α_{4p} . Пусть S_p — подстановка, переводящая сторону $\alpha_p\alpha_{p+1}$ в сопряженную ей сторону $\alpha_{3p}\alpha_{3p+1}$. Часть многоугольника, обозначенную нами

$$r_0 = \beta_1\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{2p-1}\alpha_{2p}\beta_2,$$

эта подстановка переводит в

$$r'_0 = \beta'_1\alpha'_1\alpha'_2 \dots \alpha'_{2p-1}\alpha'_{2p}\beta'_2,$$

где

$$\alpha'_p = \alpha_{3p+1}, \quad \alpha'_{p+1} = \alpha_{3p}.$$

Многоугольник $R_0 = r'_0 + r_0$ эквивалентен R_0 и имеет $4p+2$ вершин, расположенных в следующем порядке

$$\beta'_1\alpha'_1\alpha'_2 \dots \alpha'_p\alpha_{3p+2}\alpha_{3p+3} \dots \alpha_{4p}\beta_1\beta_2\alpha_{2p+1}\alpha_{2p+2} \dots \alpha_{3p}\alpha'_{p+2}\alpha'_{p+3} \dots \alpha'_{2p}\beta'_2.$$

Эти вершины (их $4p+2$) образуют два цикла, сумма углов каждого из них равна 2π . Четыре стороны многоугольника R'_0 , а именно: $\beta'_1\alpha'_1$, $\alpha_{4p}\beta_1$,

$\beta_2 \alpha_{2p+1}$ и $\alpha'_{2p} \beta$ бесконечно большие. Неевклидова длина L сторон $\beta_1 \beta_2$ и $\beta'_1 \beta'_2$ конечна, а их геометрическая (евклидова) длина бесконечно мала.

Если перейти к пределу, то их (обычная) длина обратится в нуль, вершины β_1 и β_2 , β'_1 и β'_2 совпадут, и многоугольник R'_0 превратится в другой многоугольник R''_0 , имеющий самое большее $4p$ вершин, из которых две вершины — β_1 и β'_1 — лежат на фундаментальной окружности, а остальные $4p-2$ — вне ее. Каждая из вершин β_1 и β'_1 в отдельности образует цикл, который может быть параболическим или гиперболическим.

Рассмотрим теперь группу G , порожденную многоугольником R_0 , или, что то же, многоугольником R'_0 . Если обозначить через S_i подстановку, отображающую сторону $\alpha_i \alpha_{i+1}$ многоугольника R_0 в сопряженную ей сторону $\alpha_{2p+i} \alpha_{2p+i+1}$, то образующими группы G будут $2p$ подстановок

$$S_1, S_2, \dots, S_{2p},$$

удовлетворяющих соотношению

$$S_1 S_2 \dots S_{2p} = S_{2p} S_{2p-1} \dots S_1.$$

Какие подстановки группы G отображают каждую сторону многоугольника R_0 в сторону, сопряженную с ней? Перечислим их:

$$\begin{array}{lll} S_p & \text{переводит} & \beta_1 \beta_2 \quad \text{в} \quad \beta'_1 \beta'_2, \\ S_{2p} & \text{—} \rangle \text{—} & \alpha_{2p+1} \beta_2 \quad \text{в} \quad \alpha_{4p} \beta_1, \\ S_p^{-1} S_{2p} S_p & \text{—} \rangle \text{—} & \beta'_2 \alpha'_{2p} \quad \text{в} \quad \beta'_1 \alpha'_1 \end{array}$$

и

$$S_p^{-1} S_i \quad \text{—} \rangle \text{—} \quad \alpha'_i \alpha'_{i+1} \quad \text{в} \quad \alpha_{2p+i} \alpha_{2p+i+r}.$$

Когда многоугольник R'_0 вырождается в R''_0 , подстановка S_p теряет смысл, а подстановки S_{2p} , $S_p^{-1} S_{2p} S_p$ и $S_p^{-1} S_i$ переходят в некоторые подстановки Σ , Σ' и S'_i . Последние образуют группу G' — именно ту группу, которую порождает многоугольник R''_0 , в силу чего подстановка Σ отображает $\alpha_{2p+1} \beta$ в $\alpha_{4p} \beta$, а Σ' отображает $\alpha'_{2p} \beta$ в $\alpha'_1 \beta'_1$.

Если множители подстановок Σ и Σ' равны 1, то обе подстановки параболические. Многоугольник R''_0 в этом случае принадлежит к первому типу, а его образы покрывают весь фундаментальный круг. Отсюда (так же, как и в двух предыдущих примерах) мы заключаем, что вторая лемма применима и, следовательно, фуксовы функции, порождаемые многоугольником R'_0 , стремятся к фуксовым функциям, порождаемым R''_0 , когда R'_0 стремится к R''_0 .

Рассмотрим, что при этом происходит, более подробно. Пусть x и y — две фуксовы функции, порожденные многоугольником R'_0 . Между ними существует алгебраическое соотношение

$$\varphi(x, y) = 0$$

рода p , поскольку R'_0 — многоугольник рода p . Если это соотношение рассматривать как уравнение некоторой кривой степени m , то эта кривая будет иметь

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} - p$$

двойных точек. Когда многоугольник R'_0 переходит в многоугольник R''_0 , род кривой уменьшается на 1, поскольку род многоугольника R''_0 равен $p-1$. Это означает, что кривая приобретает новую двойную точку. В действительности этой двойной точке отвечают две различные аналитические точки (поскольку двойную точку можно считать принадлежащей как одной, так и другой проходящей через нее ветви кривой) и, следовательно, две существенно различные точки многоугольника R''_0 . Как известно, эти две точки β_1 и β'_1 лежат на фундаментальной окружности. Отсюда следует, что две фуксовы функции $\lim x$ и $\lim y$ не могут принимать внутри фундаментального круга те два значения, которые отвечают новой двойной точке.

Случай, когда один из множителей Σ и Σ' равен 1, а другой отличен от 1, так что одна из этих подстановок параболическая, а другая гиперболическая, невозможен. Действительно,

$$\text{mult } S_{2p} = \text{mult } S_p^{-1} S_{2p} S_p,$$

откуда

$$\lim \text{mult } S_{2p} = \lim \text{mult } S_p^{-1} S_{2p} S_p$$

и

$$\text{mult } \Sigma = \text{mult } \Sigma'.$$

Наоборот, случай, когда оба множителя отличны от 1 и обе подстановки гиперболические, вполне возможен. При этом R'_0 принадлежит ко второму типу, вторая лемма становится неприменимой, и фуксовы функции, порожденные многоугольником R'_0 , не стремятся к фуксовым функциям, порожденным многоугольником R''_0 .

Если бы число бесконечно больших сторон многоугольника R_0 было больше 2, рассмотрение проводилось бы точно так же.

Я полагаю, что приведенные примеры достаточно ясно показывают, как следует изучать вопрос о предельных многоугольниках в каждом отдельном случае.

Во втором примере мы скажем, что предельный многоугольник R_0 относится:

1) к первому типу, если он имеет ровно четыре бесконечно большие стороны, причем эти стороны идут последовательно одна за другой;

2) ко второму типу, если он имеет ровно четыре бесконечно большие стороны, но эти стороны в многоугольнике идут не подряд (ранее мы показали, что многоугольники второго типа всегда можно преобразовать в многоугольники первого типа);

3) к третьему типу, если число бесконечно больших сторон превышает 4; нетрудно показать, что произвольный многоугольник этого типа всегда можно свести к многоугольнику, у которого бесконечно большие стороны расположены последовательно.

В третьем примере мы скажем, что многоугольник R_0 относится:

1) к первому типу, если у него имеется ровно две бесконечно большие стороны;

2) к третьему типу, если число бесконечно больших сторон больше двух.

XIII. Приведенные многоугольники

Мы доказали, что различные многоугольники одного и того же класса находятся во взаимно однозначном соответствии с точками некоторого многообразия M_1 . Однако одной и той же фуксовой группе отвечает бесконечно много производящих (фундаментальных) многоугольников и, следовательно, бесконечно много точек многообразия M_1 . В самом деле, метод, изложенный в разделе IX «Теории фуксовых групп», позволяет преобразовать многоугольник R_0 в другой многоугольник R'_0 , эквивалентный R_0 и порождающий ту же фуксову группу. Существует бесконечно много преобразований, которые переводят один многоугольник в другой, ему эквивалентный, и, следовательно, одну точку многообразия M_1 в другую точку того же многообразия. Эти подстановки образуют группу, которую мы обозначим Γ . Группа Γ , очевидно, дискретна. Многообразие M_1 делится на бесконечно много областей $D_0, D_1, \dots, D_i, \dots$, обладающих следующим свойством: каждой подстановке группы Γ отвечает одна из областей D_i — именно та, в которую переходит под действием этой подстановки область D_0 . Разбиение многообразия M_1 с помощью группы Γ полностью аналогично разбиению фундаментального круга на множество многоугольников $R_0, R_1, \dots$ с помощью какой-нибудь фуксовой группы. Поясним сказанное простым сравнением.

Пусть точка x, y на плоскости xu соответствует комплексному числу $z=x+iy$. Рассмотрим прямолинейный параллелограмм R_0 с вершинами в точках $0, z_1, z_2$ и z_1+z_2 . Разбив плоскость на множество параллелограммов, равных R_0 , получим группу подстановок $(z_1, z+\alpha z_1+\beta z_2)$, где α и β — любые целые числа. С этой группой связаны двоякопериодические функции с периодами z_1 и z_2 . Но параллелограмм R_0 можно заменить другим параллелограммом с вершинами в точках

$$0, \quad \alpha z_1 + \beta z_2, \quad \gamma z_1 + \delta z_2, \quad (\alpha + \beta) z_1 + (\beta + \delta) z_2,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — целые числа, такие, что $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Вторым параллелограмм эквивалентен первому, обозначим его R'_0 . Определяя параллелограмм R_0 , мы задаем отношение $\frac{z_2}{z_1} = \omega$. Различным параллелограммам отвечают различные точки плоскости ω или, точнее, полуплоскости, расположенной над вещественной осью — я назову ее *положительной*

полуплоскостью. Параллелограмму R'_0 соответствует точка $\frac{\delta\omega + \gamma}{\beta\omega + \alpha}$, так что положительная полуплоскость ω оказывается разделенной на бесконечно много областей, преобразующихся друг в друга при действии на ω подстановки $\left(\omega, \frac{\delta\omega + \gamma}{\beta\omega + \alpha}\right)$. Всякой двоякопериодической функции в каждой из таких областей отвечает одна и только одна точка. Но среди параллелограммов, эквивалентных R_0 , имеется наиболее простой, а именно тот, который отвечает приведенной положительно определенной целочисленной квадратичной форме

$$\text{mod}^2(\xi z_1 + \eta z_2).$$

Этот параллелограмм мы также будем называть приведенным. Приведенный параллелограмм можно определить следующим образом:

- 1) он должен быть таким, чтобы мнимая часть ω была как можно большей;
- 2) среди параллелограммов, отвечающих максимуму мнимой части ω (таких параллелограммов бесконечно много), он должен быть таким, чтобы вещественная часть ω была как можно меньшей.

Нетрудно видеть, что отношение периодов ω должно удовлетворять неравенствам

$$-\frac{1}{2} < \text{Re } \omega < \frac{1}{2}, \quad \text{mod } \omega > 1.$$

Таким образом, точки ω , отвечающие приведенным параллелограммам, принадлежат некоторой области D_0 , определяемой этими неравенствами и ограниченной двумя прямыми и окружностью. Область D_0 и ее образы при различных подстановках группы $\left(\omega, \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right)$ заполняют всю положительную полуплоскость ω .

В рассматриваемой нами задаче можно поступить точно так же, поскольку она вполне аналогична: необходимо лишь заменить параллелограммы производящими многоугольниками фуксовой группы, двоякопериодические функции — фуксовыми функциями, а положительную полуплоскость ω — многообразием M_1 .

Среди многоугольников, эквивалентных R_0 , имеется один, который можно считать наиболее простым. Назовем его *приведенным многоугольником*. Мы определим приведенный многоугольник следующим образом. Пусть φ — некоторая функция координат точки многообразия M_1 . Предположим, что φ принимает только значения от 0 до 1, причем достигает нулевого значения лишь на краю многообразия M_1 , т. е. в точках, отвечающих предельным многоугольникам. В остальном функция φ произвольна. Различным многоугольникам, эквивалентным R_0 , соответствуют различные точки многообразия M_1 и, следовательно, различные значения φ . Многоугольник, названный нами *приведенным*, отвечает наибольшему значению φ .

Точки многообразия M_1 , соответствующие приведенным многоугольникам, заполняют некоторую область, которую мы обозначим D_0 . Эта область и ее образы при различных подстановках группы Γ заполняют все многообразие M_1 . Область D_0 ограничена многообразиями $m_1, m_2, \dots, m_q$ размерности $p-1$ в предположении, что M_1 имеет размерность p . Каковы уравнения этих граничных многообразий? Пусть α — точка многообразия M_1 , а αS — ее образ при соответствующим образом выбранной подстановке S из группы Γ . Искомые уравнения будут иметь следующий вид:

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha S), \quad (1)$$

где φ означает функцию, определенную выше. Если точка α принадлежит одному из граничных многообразий $m_1, m_2, \dots, m_q$, например многообразию, определяемому уравнением (1), то она отвечает какому-то приведенному многоугольнику. Точка αS также отвечает приведенному многоугольнику, эквивалентному первому, и принадлежит некоторому граничному многообразию. Точно так же некоторые классы квадратичных форм содержат по две приведенные формы, и каждой точке, лежащей на стороне фундаментального многоугольника фуксовой группы, отвечает эквивалентная точка, лежащая на сопряженной стороне. Следовательно, многообразия $m_1, m_2, \dots, m_q$ так же, как и стороны многоугольника R_0 , разбиваются на пары сопряженных многообразий. Граница многообразий m состоит из $(p-2)$ -мерных многообразий m' . В свою очередь граница многообразий m' образована многообразиями m'' размерности $p-3$ и т. д. Многообразия $m', m'', \dots$ так же, как и вершины многоугольника R_0 , делятся на циклы. Эти циклы могут состоять из одного, двух или нескольких многообразий. Если какой-нибудь из циклов содержит более двух граничных многообразий, то имеется более двух приведенных многоугольников, эквивалентных данному.

Итак, в общем случае данному многоугольнику эквивалентен лишь один приведенный многоугольник, но в исключительных случаях приведенных многоугольников может быть два или несколько. Именно так обстоит дело с положительно определенными квадратичными формами. То же самое можно сказать иначе. В общем случае среди значений функции φ , отвечающих множеству эквивалентных многоугольников, имеется наибольшее, однако в исключительных случаях среди этих значений может оказаться несколько равных значений, которые будут больше всех остальных.

Обратимся теперь к весьма важному вопросу: когда предельный многоугольник является приведенным? Для того чтобы ответить на него, рассмотрим последовательно три примера, уже приводившихся в предыдущем разделе.

Пусть R_0 — многоугольник из первого примера. Предположим, что две его сопряженные стороны $\alpha_2 \alpha_1$ и $\alpha_1 \alpha_2$ бесконечно малы. К такому виду можно привести любой предельный многоугольник, если не считать

исключительных случаев, когда предельные многоугольники принадлежат к третьему типу. Наше предположение означает, что мы пренебрегаем величинами порядка $\alpha_1\alpha_2$ и $\alpha_{2n}\alpha_1$ по сравнению с конечными величинами.

Соединим вершину α_{2n-1} с вершиной α_2 (соединить две вершины означает провести через них дугу окружности, ортогональной к фундаментальной окружности; в дальнейшем это выражение следует понимать в указанном смысле). Тогда многоугольник R_0 разделится на два других многоугольника, $r_0 = \alpha_{2n-1}\alpha_{2n}\alpha_1\alpha_2$ и $r'_0 = R_0 - r_0$.

Подействуем на r_0 линейной подстановкой, которая переводит $\alpha_{2n-1}\alpha_2$ в $\alpha_{2n-2}\alpha_{2n-1}$. Мы получим четырехугольник

$$r''_0 = \alpha_{2n-2}\alpha_{2n-1}\alpha_{1,1}\alpha_{2,1}.$$

Если обозначить

$$R_{0,1} = r'_0 + r''_0,$$

то многоугольник $R_{0,1}$, эквивалентный R_0 , будет иметь вершины в точках $\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2n-3}, \alpha_{2n-2}, \alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}$. Ясно, что $R_{0,1}$ имеет вершины, расположенные в бесконечно малой окрестности каждой из точек

$$\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2n-2},$$

и три вершины, расположенные в бесконечно малой окрестности точки α_{2n-2} . Длина его бесконечно малых сторон определяется из соотношения

$$\alpha_{1,1} - \alpha_{2,1} = (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{(\alpha_{2n-2} - \alpha_{2n-1})^2}{(\alpha_{2n-1} - \alpha_{2n})^2}. \quad (2)$$

Соединив вершины $\alpha_{2,1}$ и α_{2n-3} , мы разобьем многоугольник $R_{0,1}$ на два других многоугольника, $r_{0,1} = \alpha_{1,1}\alpha_{2,1}\alpha_{2n-2}\alpha_{2n-3}$ и $r'_{0,1} = R_{0,1} - r_{0,1}$. Пусть $r''_{0,1} = \alpha_{1,2}\alpha_{2,2}\alpha_{2n-4}\alpha_{2n-3}$ — многоугольник, в который $r_{0,1}$ переходит под действием линейной подстановки, переводящей $\alpha_{2n-3}\alpha_{2n-2}$ в $\alpha_{2n-3}\alpha_{2n-4}$. Наконец, пусть $R_{0,2} = r'_{0,1} + r''_{0,1}$. Нетрудно видеть, что многоугольник $R_{0,2}$, эквивалентный $R_{0,1}$, имеет по одной вершине в бесконечно малой окрестности каждой из точек

$$\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2n-2}$$

и три вершины $\alpha_{2n-4}, \alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}$ — в бесконечно малой окрестности точки α_{2n-4} . Кроме того,

$$\alpha_{1,2} - \alpha_{2,2} = (\alpha_1 - \alpha_2) \left[\frac{(\alpha_{2n-2} - \alpha_{2n-1})(\alpha_{2n-4} - \alpha_{2n-3})}{(\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1})(\alpha_{2n-2} - \alpha_{2n-3})} \right]^2. \quad (2')$$

Произведем над $R_{0,2}$ те же операции, что и над многоугольниками R_0 и $R_{0,1}$, т. е. соединим $\alpha_{2,2}$ и α_{2n-5} и обозначим через $r''_{0,2}$ образ многоугольника $r_{0,2}$ при линейной подстановке, переводящей $\alpha_{2n-4}\alpha_{2n-5}$ в $\alpha_{2n-6}\alpha_{2n-5}$:

$$r_{0,2} = \alpha_{2n-4}\alpha_{2n-5}\alpha_{1,2}\alpha_{2,2}, \quad r'_{0,2} = R_{0,2} - r_{0,2},$$

$$R_{0,3} = r'_{0,2} + r''_{0,2}.$$

Затем повторим эти операции над $R_{0,3}$ так же, как мы только что проделывали их над $R_{0,2}$, и т. д.

Нетрудно видеть, что многоугольник $R_{0,i}$ имеет по одной вершине в каждой из бесконечно малых окрестностей точек

$$\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2n-2}$$

и три вершины в бесконечно малой окрестности точки α_{2n-2i} .

Рассмотрим, в частности, $R_{0,n-1}$. Три его вершины расположены бесконечно близко от α_2 и, следовательно, от α_{2n} . Этими вершинами являются α_2 , $\alpha_{1,n-1}$ и $\alpha_{2,n-1}$ (последняя не должна совпадать с α_{2n-1}). Отсюда следует, что $R_{0,n-1}$ бесконечно мало отличается от R_0 . Оба многоугольника $R_{0,n-1}$ и R_0 эквивалентны, в силу чего преобразование T , переводящее R_0 в $R_{0,n-1}$, принадлежит группе Γ .

Пусть

$$H = \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_5) \dots (\alpha_{2n-2} - \alpha_{2n-1})}{(\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_5 - \alpha_6) \dots (\alpha_{2n-1} - \alpha_{2n})}.$$

Следующее соотношение играет для многоугольника $R_{0,n-1}$ такую же роль, какую соотношения (2) и (2') играют для многоугольников $R_{0,1}$ и $R_{0,2}$:

$$\alpha_{1,n-1} - \alpha_{2,n-1} = (\alpha_1 - \alpha_2) H^2$$

и точно так же

$$\alpha_2 - \alpha_{1,n-1} = (\alpha_{2n} - \alpha_1) H^2.$$

Установив это, обратимся к функции φ и предположим, что она регулярна (последнее не является каким-либо ограничением, поскольку φ почти произвольна). Многоугольнику с бесконечно малыми сторонами, по предположению, отвечает бесконечно малое значение φ . Предположим, что φ — бесконечно малая первого порядка относительно $\alpha_1 - \alpha_2$. Пренебрегая бесконечно малыми второго порядка, можно сказать, что три величины φ , $\alpha_1 - \alpha_2$ и $\alpha_1 - \alpha_{2n}$ пропорциональны. Следовательно, для многоугольника R_0

$$\varphi = (\alpha_1 - \alpha_2) F,$$

где F зависит лишь от расположения точек

$$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{2n-2},$$

но не от длин бесконечно малых сторон $\alpha_1 \alpha_2$ и $\alpha_1 \alpha_{2n}$.

Обозначим через φ' и F' значения φ и F , отвечающие многоугольнику $R_{0,n-1}$. Тогда $F' = F$ (с точностью до бесконечно малых первого порядка); $\varphi' = \varphi H^2$ (с точностью до бесконечно малых второго порядка).

Следовательно, если $H^2 > 1$, то подстановка T переводит R_0 в эквивалентный многоугольник, отвечающий большему значению φ . Это означает, что многоугольник R_0 неприведенный.

Если же, наоборот, $H^2 < 1$, то подстановка, обратная к T , переводит R_0 в эквивалентный многоугольник, также отвечающий большему значению φ , и многоугольник R_0 снова не будет приведенным.

Остается случай, когда $H^2 = 1$. Но величина H существенно отрицательна; следовательно, $H = -1$. Это равенство есть не что иное, как соотношение (1а) предыдущего раздела, и означает, что R_0 — многоугольник первого типа.

Таким образом, *предельный многоугольник может быть приведенным лишь в том случае, если он принадлежит к первому типу.*

К аналогичному результату мы придем и во втором и в третьем примере.

Рассмотрим сначала второй пример. Пусть для определенности

$$a_1 = a_3 = \dots = a_{2n-1}.$$

Определение приведенного многоугольника во втором и третьем примере сформулируем следующим образом. Приведенным называется тот из многоугольников, эквивалентных данному, у которого наибольшая из сторон минимальна. Если же этому условию удовлетворяют несколько многоугольников, то приведенным называется тот из них, у которого минимальна вторая (в порядке убывания длины) сторона и т. д. (При рассмотрении второго и третьего примеров, так же, как и в предыдущем разделе, мы говорим, что сторона мала или велика, имея в виду ее неевклидову длину L , а не геометрическую длину.)

Сформулируем без доказательства одно утверждение, которое понадобится нам в дальнейшем.

Пусть треугольник ABC деформируется так, что три его вершины стремятся соответственно к точкам A' , B' и C' , первая из которых расположена на фундаментальной окружности, а две остальные — внутри нее. Стороны AB и BC нашего треугольника неограниченно возрастают, в то время как сторона BC остается конечной, но разность сторон AB и AC стремится к некоторому конечному пределу λ :

$$\lim (AB - AC) = \lambda.$$

Этот предел зависит лишь от расположения точек A , B и C , но не от того, как A , B и C стремятся к A' , B' и C' . Через точки B' и C' можно провести две окружности, касающиеся изнутри фундаментальной окружности. Пусть M и N — точки касания. Соединим M и N дугой окружности, ортогональной фундаментальной окружности. Эта дуга пересекает $B'C'$ в точке P , такой что неевклидова длина L отрезка PB' равна неевклидовой длине L отрезка PC' . Предположим, что точка B' расположена слева от MN , а точка C' — справа. Предел λ будет положительным, если A' лежит на прямой MN , отрицательным, если A' лежит слева от MN , и равным нулю, если A' совпадает с M и N .

Рассмотрим многоугольник R_0 , стороны которого $\alpha_{2n}\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_4$ так же, как и в предыдущем разделе, неограниченно возрастают. При этом две его вершины α_{2n} и α_4 стремятся к точкам B' и C' , располо-

женным внутри фундаментального круга, а вершина α_1 стремится к точке A' , лежащей на самой фундаментальной окружности. Вершины α_2 и α_3 также стремятся к A' , ибо стороны $\alpha_1\alpha_2$ и $\alpha_2\alpha_3$, имея бесконечно большую неевклидову длину L , бесконечно малы, если говорить об их геометрической длине.

Найдем на фундаментальной окружности уже упоминавшиеся ранее точки M и N и соединим их. Предположим, что точки A' и B' по-прежнему лежат слева от MN . Тогда в силу только что сформулированной леммы

$$\lim \alpha_{2n} = B', \quad \lim \alpha_4 = C', \quad \lim \alpha_1 = \lim \alpha_2 = \lim \alpha_3 = A',$$

$$\alpha_2\alpha_4 > \alpha_2\alpha_{2n}, \quad \alpha_3\alpha_4 > \alpha_3\alpha_{2n}.$$

В треугольниках $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ и $\alpha_2\alpha_1\alpha_{2n}$

$$\alpha_2\alpha_3 = \alpha_3\alpha_4, \quad \alpha_1\alpha_2 = \alpha_1\alpha_{2n},$$

$$\angle \alpha_2\alpha_1\alpha_{2n} = \angle \alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

и

$$\alpha_2\alpha_4 > \alpha_2\alpha_{2n},$$

откуда

$$\alpha_3\alpha_4 > \alpha_1\alpha_2.$$

Следовательно, сторона $\alpha_3\alpha_4 = \alpha_2\alpha_3$ многоугольника R_0 является наибольшей, поскольку все остальные стороны $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_4\alpha_{2n}$ конечны.

Я утверждаю, что можно найти многоугольник, эквивалентный R_0 , у которого наибольшая сторона будет меньше $\alpha_3\alpha_4$.

Соединим α_3 с α_{2n} и разделим тем самым многоугольник R_0 на два многоугольника

$$r_0 = \alpha_{2n}\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \quad r'_0 = \alpha_3\alpha_4\alpha_5 \dots \alpha_{2n}.$$

Поддействовав на r'_0 подстановкой, которая переводит $\alpha_3\alpha_4$ в $\alpha_3\alpha_2$, получим

$$r''_0 = \alpha'_3\alpha'_4\alpha'_5 \dots \alpha'_{2n},$$

где

$$\alpha'_3 = \alpha_3, \quad \alpha'_4 = \alpha_2.$$

Многоугольник $R'_0 = r_0 + r''_0$ эквивалентен R_0 . Он имеет $2n-4$ сторон, равных $2n-4$ конечным сторонам многоугольника R_0 , две бесконечные стороны

$$\alpha_1\alpha_2 = \alpha_1\alpha_{2n},$$

общие с многоугольником R_0 , и две бесконечные стороны

$$\alpha_3\alpha_{2n} = \alpha_3\alpha'_{2n},$$

не принадлежащие R_0 . Если $\alpha_3\alpha_{2n} > \alpha_1\alpha_2$, то $\alpha_3\alpha_{2n}$ — наибольшая из сторон R_0 и

$$\alpha_3\alpha_{2n} < \alpha_3\alpha_4,$$

что и требовалось доказать.

Если же $\alpha_3 \alpha_{2n} < \alpha_1 \alpha_2$, то наибольшей стороной R_0 является $\alpha_1 \alpha_2$, и

$$\alpha_1 \alpha_2 < \alpha_3 \alpha_4,$$

что и требовалось доказать.

Итак, если точка A' лежит слева от MN , то многоугольник R_0 не относится к числу приведенных. Но поскольку правое ничем не отличается от левого, то R_0 не будет приведенным и в том случае, если A' находится справа от MN . Следовательно, точка A' должна совпадать либо с M , либо с N . Но тогда окружность $A'B'C'$ касается фундаментальной окружности. Это свидетельствует о том, что предельный многоугольник принадлежит к первому типу.

Итак, всякий предельный многоугольник можно свести к многоугольнику первого типа.

Перейдем к третьему примеру, когда многоугольник R_0 имеет $4p$ сторон и его противоположные стороны сопряжены. Соединив противоположные вершины R_0 , получим $4p$ диагоналей.

Я утверждаю, что если многоугольник R_0 приведенный, то наибольшая из его сторон меньше наименьшей из его диагоналей. Обозначим эту диагональ через δ . Предположим, что наибольшая из сторон многоугольника R_0 больше δ . Проведем диагональ δ и разделим R_0 на два многоугольника r_0 и r'_0 . Обозначим через r''_0 многоугольник, в который r'_0 переходит при подстановке, которая переводит наибольшую сторону многоугольника R_0 в сопряженную с ней сторону. Многоугольник $R''_0 = r_0 + r'_0$ эквивалентен R_0 , его противоположные стороны сопряжены. Кроме того, сторонами R'_0 служат все стороны R_0 , кроме наибольшей, которая заменена диагональю δ (по предположению, наименьшей из диагоналей). Следовательно, наибольшая сторона многоугольника R'_0 меньше наибольшей стороны многоугольника R_0 , и R_0 не является приведенным.

Предположим далее (так же, как в предыдущем разделе), что две стороны $\alpha_{4p} \alpha_1$ и $\alpha_{2p} \alpha_{2p+1}$ многоугольника R_0 неограниченно возрастают. Очевидно, что диагонали $\alpha_{4p} \alpha_{2p}$ и $\alpha_1 \alpha_{2p+1}$ также неограниченно возрастают, все же остальные стороны остаются конечными. Будем считать, что вершины α_{4p} и α_{2p+1} стремятся к двум точкам B' и C' , расположенным внутри фундаментального круга, а вершины $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2p}$ — к одной и той же точке A' , лежащей на самой фундаментальной окружности. С этой же точкой A' стремятся совпасть и вершины β_1 и β_2 многоугольника R'_0 . Тогда справедливо следующее тождество:

$$\lim (\alpha_1 \alpha_{4p} - \alpha_1 \alpha_{2p+1}) = \lim (\alpha_{2p} \alpha_{4p} - \alpha_{2p} \alpha_{2p+1}).$$

Но, с другой стороны, если многоугольник R_0 приведенный, то

$$\alpha_1 \alpha_{4p} \leq \alpha_1 \alpha_{2p+1}, \quad \alpha_{2p} \alpha_{4p} \leq \alpha_{2p} \alpha_{2p+1} \quad [^{14}],$$

поскольку его стороны меньше диагоналей. Следовательно,

$$\lim (\alpha_1 \alpha_{4p} - \alpha_1 \alpha_{2p+1}) = 0,$$

из чего так же, как в предыдущем примере, мы заключаем, что окружность $A'B'C'$ касается фундаментальной окружности и многоугольник R_0 — первого типа.

Таким образом, любой предельный приведенный многоугольник принадлежит к первому роду.

Все сказанное применимо только к многоугольникам первого типа.

Перейдем сначала к многоугольникам второго рода, которые, как было показано раньше, можно свести к предельным многоугольникам первого рода.

Итак, пусть P_0 — многоугольник второго рода, эквивалентный некоторому другому многоугольнику R_0 первого рода. Если R_0 не принадлежит к первому типу, мы скажем, что многоугольник P_0 не приведенный.

В самом деле, рассмотрим введенную выше функцию φ . Для определенности будем считать, что во втором и третьем примере в качестве φ выбрана величина, обратная неевклидовой длине L наибольшей стороны многоугольника R_0 .

Функция φ , соответствующая многоугольникам P_0 и R_0 , будет бесконечно малой. Пусть a и b — точки многообразия M_1 , отвечающие P_0 и R_0 . Каждая из точек a и b находится бесконечно близко от границы многообразия M_1 . Пусть c и d — точки границы, наиболее близкие к a и b . Координаты точки a зависят от координат точки b , поскольку соответствующие многоугольники R_0 и P_0 связаны друг с другом вполне определенным образом. Если же a и b расположены бесконечно близко от границы (что мы и предполагаем), то положение точки c зависит от положения точки d , в силу чего координаты одной из этих точек будут непрерывными функциями координат другой точки. Если точки c и d остаются неподвижными (*с точностью до бесконечно малых смещений*), а точка a приблизится к c так, что бесконечно малое расстояние ac сократится, например, вдвое, то бесконечно малое расстояние bd также сократится вдвое.

Обозначив через φ_1 и φ_2 значения функции φ , отвечающие точкам a и b , получим с точностью до бесконечно малых второго порядка

$$\varphi_1 = \overline{ac} f_1(c), \quad \varphi_2 = \overline{bd} f_2(d),$$

где f_1 и f_2 в общем случае конечные функции, зависящие лишь от c и d .

Следовательно, если точки c и d неподвижны или смещаются бесконечно мало, а расстояние ac уменьшается в несколько раз, то две бесконечно малые функции φ_1 и φ_2 уменьшаются в то же число раз.

Итак, мы установили, что многоугольник R_0 , не принадлежащий к первому типу, не является приведенным, и можно найти эквивалентный ему многоугольник R'_0 , отвечающий большему значению φ . Пусть P'_0 — многоугольник второго рода, получающийся из R'_0 так же, как P_0 из R_0 . Пусть a' , b' , c' , d' — точки многоугольников R'_0 и P'_0 , аналогичные точкам a , b , c , d многоугольников R_0 и P_0 , а φ'_1 и φ'_2 — значения φ , отвечающие R'_0 и P'_0 . Нетрудно видеть, что точки c' и d' бесконечно мало отличаются от

c и d , вследствие чего с точностью до бесконечно малых имеют место соотношения

$$\frac{ac}{a'c'} = \frac{bd}{b'd'},$$

$$\begin{aligned}\varphi'_1 &= a'c'f_1(c') = a'c'f_1(c), \\ \varphi'_2 &= b'd'f_2(d') = b'd'f_2(d),\end{aligned}$$

и, таким образом,

$$\frac{\varphi_1}{\varphi'_1} = \frac{\varphi_2}{\varphi'_2}.$$

Но

$$\varphi'_1 > \varphi_1,$$

откуда

$$\varphi'_2 > \varphi_2.$$

Следовательно, многоугольник R_0 не является приведенным.

Итак, *предельный многоугольник второго рода может быть приведенным лишь в том случае, если он эквивалентен многоугольнику первого рода и первого типа.*

Рассмотрение многоугольников третьего рода как частного случая многоугольников первого и второго рода можно было бы проводить на основе тех же принципов. Мы ограничимся лишь одним из примеров, на котором продемонстрируем основные идеи. Это позволит читателю лучше понять, каким образом преодолеваются различные трудности, чем подробный анализ общего случая.

Предположим, что шесть сторон $\alpha_{2n}\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_4\alpha_5$ и $\alpha_5\alpha_6$ многоугольника R_0 из второго примера неограниченно возрастают.

Покажем, что если многоугольник R_0 приведенный, то он принадлежит к первому типу, т. е. пять его вершин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ сливаются в одну точку, расположенную на фундаментальной окружности, так что окружность $\alpha_{2n}\alpha_1\alpha_6$ касается фундаментальной.

При этом мы будем опираться на два следующих принципа:

1. Если многоугольник R_0 приведенный, то стороны, выходящие из его нечетной вершины, меньше диагонали, соединяющей эту вершину с любой четной вершиной. В самом деле, пусть C означает сторону $\alpha_1\alpha_2$, а D — диагональ, соединяющую вершину α_1 с какой-нибудь четной вершиной. Нетрудно построить многоугольник R'_0 , эквивалентный R_0 , имеющий такие же (по величине) стороны, как и R_0 , за исключением стороны C , замененной на D . Если бы выполнялось неравенство $C > D$, то наибольшая сторона многоугольника R_0 была бы больше наибольшей из сторон многоугольника R'_0 , и R_0 не был бы приведенным.

2. Предположим, что три вершины треугольника ABC стремятся к трем точкам $A'B'C'$, первая из которых расположена внутри фундамен-

тального круга, а две остальные лежат на фундаментальной окружности. Если точки B' и C' не совпадают, то стороны треугольника ABC неограниченно возрастают, а угол BAC стремится к конечному пределу, так же, как и разность

$$AB + AC - BC$$

и, следовательно, сторона BC будет больше каждой из двух остальных сторон.

Предположим далее, что две вершины α_{2n} и α_0 приведенного многоугольника R_0 стремятся к двум фиксированным точкам плоскости B' и C' , а пять вершин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$, отстоящих от α_0 на бесконечно большое расстояние, стремятся к некоторым, вполне определенным точкам фундаментальной окружности.

Если бы

$$\lim \alpha_4 \neq \lim \alpha_5,$$

то в силу второго принципа мы получили бы неравенство

$$\alpha_5 \alpha_4 > \alpha_5 \alpha_{2n},$$

противоречащее первому принципу. Точно так же, если бы

$$\lim \alpha_4 \neq \lim \alpha_3, \quad \lim \alpha_3 \neq \lim \alpha_2 \quad \text{или} \quad \lim \alpha_2 \neq \lim \alpha_1,$$

то вопреки первому принципу мы имели бы

$$\alpha_3 \alpha_4 > \alpha_3 \alpha_{2n}, \quad \alpha_2 \alpha_3 > \alpha_3 \alpha_{2n} \quad \text{или} \quad \alpha_2 \alpha_1 > \alpha_1 \alpha_6.$$

Следовательно, пять вершин $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$ стремятся к одной и той же точке A' фундаментальной окружности.

Соединим определенные ранее точки M и N . Если бы A' находилась слева от дуги MN (т. е. лежала бы по ту же сторону от нее, что и B'), то

$$\alpha_5 \alpha_{2n} < \alpha_5 \alpha_6,$$

а если бы A' лежала справа от MN , то

$$\alpha_1 \alpha_6 < \alpha_1 \alpha_{2n}.$$

Оба неравенства противоречат первому принципу. Таким образом, A' совпадает либо с M , либо с N , т. е. окружность $A'B'C'$ касается фундаментальной окружности. Но это и означает, что многоугольник R_0 — первого типа, что и требовалось доказать.

XIV. Метод непрерывности

Доказанные нами леммы позволяют использовать метод непрерывности для получения результатов, удовлетворяющих самым высоким требованиям строгости.

Рассмотрим множество типов T , принадлежащих к одному и тому же классу и определяемых некоторым числом параметров. Если общее уравнение типа T можно представить в виде

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v, \quad (1)$$

$$\psi(x, y) = 0, \quad (2)$$

то этими параметрами служат модули соотношения (2) и особые точки уравнения (1) (всего q параметров). Эти параметры определяют точку в некотором q -мерном многообразии M . Я утверждаю, что оно замкнуто и не имеет края. В самом деле, как показал Риман, граница q -мерного многообразия может состоять лишь из многообразий размерности $q-1$. Например, кусок из поверхности вырезают, рассекая ее вдоль некоторой кривой. Выкалывания точки для этого недостаточно.

Варьируя параметры типа, мы могли бы выйти на край многообразия, лишь достигнув некоторых его особых точек, соответствующих вырождению типа T в более простой тип T' (см. раздел IX, стр. 174). Это может произойти в двух случаях:

1) если совпадут две особые точки уравнения (1) (для чего требуется наложить одно *комплексное* или два *вещественных* условия);

2) если род соотношения (2) понизится на 1, т. е. если кривая, определяемая этим соотношением, приобретет новую двойную точку (для чего также необходимо наложить два вещественных условия).

Таким образом, и в том и в другом случае необходимо наложить два условия. Следовательно, удовлетворяющие этим условиям особые точки образуют многообразие размерности $q-2$ и не могут служить границей q -мерного многообразия M .

Обозначим через $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ многообразия размерности $q-1$, которые мы только что определили.

Рассмотрим область D_0 , введенную в разделе XIII. Каждой точке области D_0 отвечает какой-то многоугольник и, следовательно, некоторое фуксово уравнение. Параметры типа, к которому оно принадлежит, задают вполне определенную точку многообразия M . Следовательно, каждой точке области D_0 отвечает одна и только одна точка многообразия M . С другой стороны, каждой точке μ многообразия M , которой отвечает фуксов тип, содержащий фуксово уравнение, соответствует одна и только одна точка δ области D_0 .

Исключение составляет лишь тот случай, когда точка δ принадлежит одному из многообразий $m_1, m_2, \dots$, отделяющих D_0 от остальной части многообразия M . В самом деле, в последнем случае существует несколько эквивалентных приведенных многоугольников (два или больше), и каждой точке μ отвечает несколько точек δ . Всей области D_0 соответствует либо часть многообразия M , либо все многообразие M .

Я утверждаю, что первый случай невозможен. В самом деле, в противном случае многообразие M можно было бы разделить на две части: ту, которая сопоставлена области D_0 , и ту, которая не находится в соответствии с D_0 . Эти части должно было бы разделять некоторое граничное многообразие, имеющее, по теореме Римана, размерность $q-1$.

Каким образом может оказаться в этом гипотетическом граничном многообразии точка μ из M , соответствующая точке δ , если последняя пробегает область D_0 ?

Может ли это произойти оттого, что обратится в нуль функциональный определитель из координат точки μ по координатам δ ? Нет, такой функциональный определитель в нуль никогда не обращается, поскольку лемма из раздела VII утверждает, что любой точке μ соответствует не более одной точки δ .

Может ли это произойти оттого, что точка δ попадает в одно из многообразий $m_1, m_2, \dots$, отделяющих область D_0 от остальной части многообразия M ? Пусть, например, точка δ пересекает многообразие m_1 , отделяющее область D_0 от некоторой другой области D_1 . Тогда точка μ также пересечет некоторое многообразие μ_1 , соответствующее многообразию m_1 . Но если точка δ входит в область D_1 , составляющую часть многообразия M_1 , то ей по-прежнему отвечает какой-то многоугольник R_0 , и, следовательно, какое-то фуксово уравнение и некоторая точка многообразия M .

Таким образом, многообразие μ_1 не отделяет фуксовы типы, к которым принадлежат фуксовы уравнения, от фуксовых типов, к которым не принадлежат фуксовы уравнения.

Может ли это, наконец, произойти оттого, что точка δ принадлежит границе самого многообразия M_1 ? Если бы это было так, то соответствующий многоугольник R_0 был бы *предельным многоугольником*. Но поскольку точка δ принадлежит области D_0 , то многоугольник R_0 приведенный и, следовательно, *либо принадлежит к первому типу, либо эквивалентен многоугольнику первого типа*.

Однако из второй леммы мы знаем, что когда многоугольник R_0 вырождается в предельный многоугольник первого типа, то соответствующий фуксов тип T вырождается в более простой тип T' , т. е. либо две особые точки уравнения (1) сливаются в одну, либо род соотношения (2) понижается на единицу. Следовательно, если точка δ , оставаясь внутри области D_0 , стремится к одной из границ многообразия M_1 , то соответствующая ей точка μ стремится к одному из многообразий $\sigma_1, \sigma_2, \dots$. Но эти многообразия имеют размерность $q-2$ и, следовательно, не могут разделять многообразие M на две части.

Итак, многообразие M нельзя разделить на две части, одна из которых соответствовала бы D_0 , а другая не соответствовала.

Следовательно, *в каждом фуксовом типе содержится одно фуксово уравнение*, что и требовалось доказать.

XV. Конкретное приложение

Применим сформулированные выше принципы к решению конкретной задачи. Выберем для этого наиболее простой из всех возможных случаев — пример 1 из раздела XII — и предположим, что многоугольник R_0 имеет только шесть сторон. Наше предположение отвечает параболоиду (1') из раздела XII. Этот пример позволит лучше понять то, что уже говорилось выше.

В рассматриваемом случае многообразие M_1 , как известно, имеет вид параболоида (1'). Выясним, что представляет собой многообразие M .

Фуксово уравнение, порождаемое многоугольником R_0 , имеет четыре особые точки, а каждое из четырех определяющих уравнений имеет двукратный корень.

Пусть этими четырьмя особыми точками будут α , β , γ и δ . Предположим, что $\psi(\mu)$ — ангармоническое отношение μ и трех точек α , β и γ , такое, что

$$\psi(\beta) = 0, \quad \psi(\gamma) = 1, \quad \psi(\delta) = \infty.$$

Положим

$$\psi(\alpha) = X.$$

Тип, к которому принадлежит рассматриваемое нами фуксово уравнение, считается полностью заданным, если известна величина X . Следовательно, многообразие M имеет вид сферы или плоскости комплексной переменной X .

Переставляя всеми возможными способами четыре особые точки, получаем для X следующие шесть значений:

$$X, \quad 1 - X, \quad \frac{1}{X}, \quad \frac{1}{1 - X}, \quad 1 - \frac{1}{X}, \quad \frac{X}{X - 1}. \quad (1)$$

Плоскость X можно разбить на шесть областей

$$\rho_0 + \rho'_0, \rho_1 + \rho'_1, \rho_2 + \rho'_2, \rho_3 + \rho'_3, \rho_4 + \rho'_4, \rho_5 + \rho'_5.$$

Такое разбиение представлено на рис. 11. Две окружности и прямые задаются уравнениями

$$\begin{aligned} \operatorname{mod} X = 1, \quad \operatorname{mod} (1 - X) = 1, \quad \operatorname{Re} X = \frac{1}{2}, \\ \operatorname{Im} X = 0. \end{aligned}$$

Если X лежит внутри ρ_0 , а X_0 — величина, комплексно сопряженная относительно X , то, как нетрудно видеть, точки

$$1 - X, \quad \frac{1}{1 - X}, \quad \frac{X}{X - 1}, \quad 1 - \frac{1}{X}, \quad \frac{1}{X}, \quad 1 - X_0, \quad X_0, \quad \frac{1}{X_0}, \quad 1 - \frac{1}{X_0}, \quad \frac{X_0}{X_0 - 1}, \quad \frac{1}{1 - X_0}$$

лежат соответственно в областях

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho'_0, \rho'_1, \rho'_2, \rho'_3, \rho'_4, \rho'_5.$$

Далее, следуя тому, что говорилось в разделе XII, параболоид (1') необходимо разбить на бесконечное множество областей $D_0, D_1, \dots$ так, чтобы D_0 содержала те точки параболоида, которые отвечают приведенным многоугольникам R_0 , и каждой точке многообразия M отвечала одна и только одна точка в каждой из этих областей. Но это еще не все. Многообразию M следует разделить на две области ρ и ρ' , а область D_0 — на двенадцать подобластей, соответствующих двенадцати областям многообразия M . Аналогичное разбиение следует сделать также в каждой из областей $D_1, D_2, \dots$.

На рис. 12 показан параболоид (1'), спроектированный на плоскость xy . Прямая BCF определяется уравнением $y=1$, а прямая BAE — уравнением $x=0$. Прямая $x=0, y=1$ проектируется в точку B . Незаштрихованная часть рисунка соответствует области D_0 . Ее проекция ограничена прямыми CG и AF и параболой AB и BC . Прямые AC, CE, AF, BG и две кривые делят ее на двенадцать частей. Уравнения прямых имеют вид:

$$\begin{aligned} CG: x + y = 0; \quad BG: x + y = 1; \quad AG: x + y = 2; \\ AC: x - y = -1; \quad AF: y = 2; \quad CE: x = -1. \end{aligned}$$

Параболы AB и BC касаются прямых AC и BG . Наконец, две другие кривые, проведенные на рисунке, представляют собой дуги конических се-

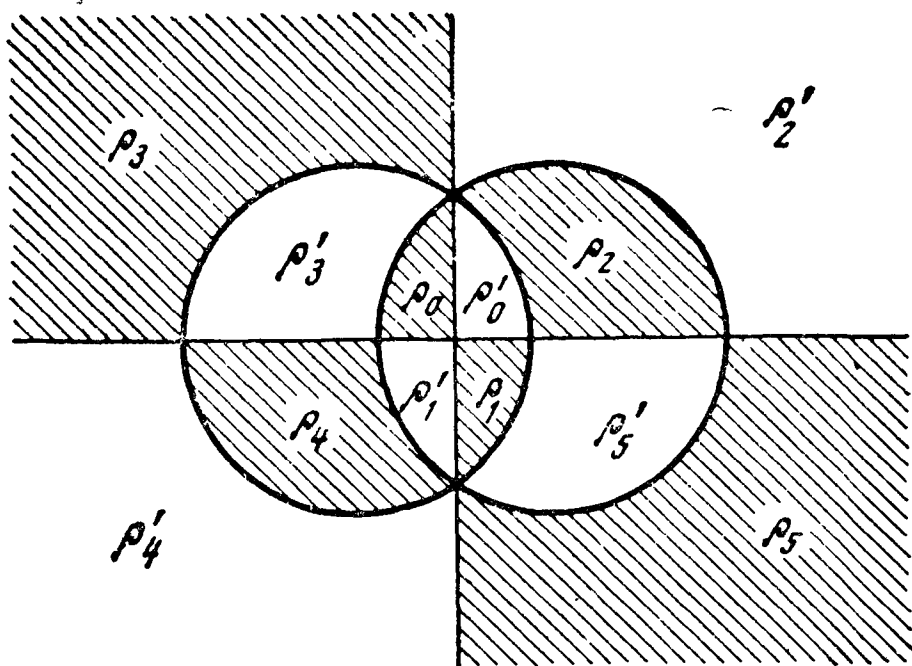


Рис. 11

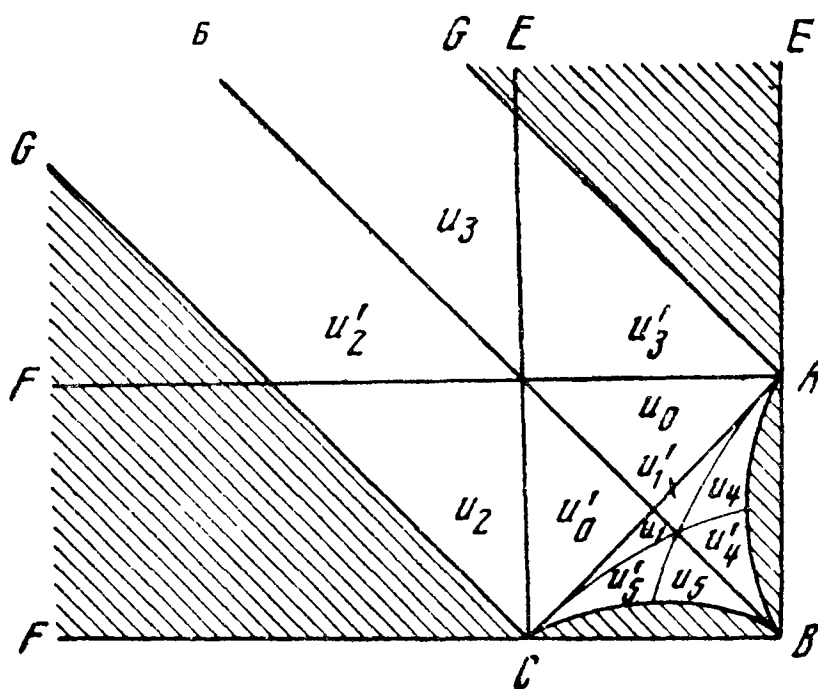


Рис. 12

чений. Мы видим, что область D_0 разделена на двенадцать подобластей u_i и u'_i , отвечающих двенадцати областям ρ_i и ρ'_i .

Для того чтобы доказать, что точка μ многообразия M , соответствующая точке δ многообразия M_1 , пробегает область ρ_i или ρ'_i всякий раз, когда δ пробегает область u_i или u'_i , необходимо сделать следующее.

Пусть R'_0 — многоугольник, симметричный многоугольнику R_0 относительно его диагонали be . Обозначим через a', b', c', d', e', f' вершины

R'_0 . Для того чтобы порядок следования вершин при обходе периметра R'_0 не нарушался и был таким же, как при обходе периметра R_0 , a' должна быть симметрична вершине c , а c' — вершине a ; d' должна быть симметрична f , а f' — вершине d . Что же касается вершин b' и e' , то они не должны отличаться от вершин b и e . Нетрудно видеть, что при таком расположении вершин новыми значениями x , y и z будут

$$1 - y, 1 - x, 1 - z.$$

Пусть теперь X' означает то значение X , которое отвечает многоугольнику R'_0 . Ясно, что

$$X' = 1 - X_0.$$

В частности, если R_0 симметричен относительно be и не отличается от R'_0 , то

$$x + y = 1, \quad z = \frac{1}{2},$$

$$X = 1 - X_0.$$

Следовательно, если δ описывает прямую BG , то μ описывает прямую

$$\operatorname{Re} X = \frac{1}{2}.$$

Кроме того, при замене R_0 многоугольником, симметричным R_0 относительно диагонали cf , величины x , y и z , очевидно, перейдут в $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$, а величина X перейдет в $\frac{1}{X_0}$. Отсюда следует, что в случае симметричного относительно cf многоугольника R_0 точка μ описывает окружность

$$\operatorname{mod} X = 1,$$

если точка δ описывает прямую CE .

Многоугольник R_0 эквивалентен многоугольнику R'_0 , который получается из R_0 , если соединить вершины b и f и подействовать на треугольник baf подстановкой, переводящей ba в bc . Проведем эти операции, мы получим многоугольник $bfedcf'$, где f' — образ точки f при рассматриваемой подстановке. Построим многоугольник, симметричный R'_0 относительно диагонали bd . Можно считать, что этот многоугольник получен из некоторого многоугольника R''_0 так же, как R'_0 из R_0 . Нетрудно видеть, что переход от R_0 к R'_0 означает замену x , y и z на $\frac{z^2}{x}$, $1 + \frac{z(z-1)}{x}$ и z , а также X на X_0 .

Следовательно, если точка δ описывает прямую AC , то точка μ описывает прямую

$$X = X_0, \quad \operatorname{Im} X = 0.$$

Рассмотрим следующую задачу. Пусть фуксов тип задан. Требуется найти фуксову группу, порожденную фуксовым уравнением, которое входит в этот тип. Она весьма сложна, и несколько слов о ней будет сказано в дальнейшем. Однако в тех частных случаях, когда

$$X = \frac{1}{2}, \quad X = -1, \quad X = 2, \quad X = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad X = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2},$$

ее в соответствии с тем, что только что говорилось, можно решить с помощью простых соображений симметрии. Параметры, определяющие производящий (фундаментальный) многоугольник фуксовой группы, оказываются равными

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{3}{2}, \quad z = \frac{1}{1};$$

$$x = -1, \quad y = 3, \quad z = \frac{1}{3};$$

$$x = -2, \quad y = 2, \quad z = \frac{2}{3};$$

$$x = -1, \quad y = 2, \quad z = \frac{1}{2};$$

$$x = -\frac{1}{4}, \quad y = \frac{3}{4}, \quad z = \frac{1}{2}.$$

Обозначим через S_1 , S_2 и S_3 только что упоминавшиеся операции (в скобках указаны величины, в которые переходят под действием этих операций x , y , z и X):

$$S_1: (x, y, z; 1 - y, 1 - x, 1 - z) \quad (X, 1 - X_0);$$

$$S_2: \left(x, y, z; \frac{1}{x}, \frac{1}{z}, \frac{1}{y}\right) \quad \left(X, \frac{1}{X_0}\right);$$

$$S_3: \left(x, y, z; \frac{z^2}{x}, 1 + \frac{z(z-1)}{x}, z\right) \quad (X, X_0).$$

Нас будут интересовать следующие группы:

1. Группа Γ_1 , порожденная подстановками S_1 , S_2 и S_3 . Действуя на треугольник u_0 всеми подстановками этой группы, мы получаем бесконечное множество аналогичных треугольников, покрывающих все многообразие M_1 .

2. Группа Γ_2 , образованная всеми комбинациями, состоящими из четного числа подстановок S_1 , S_2 и S_3 . Эта группа замечательна тем, что изоморфна группе

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

где α , β , γ , δ — целые числа, для которых $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

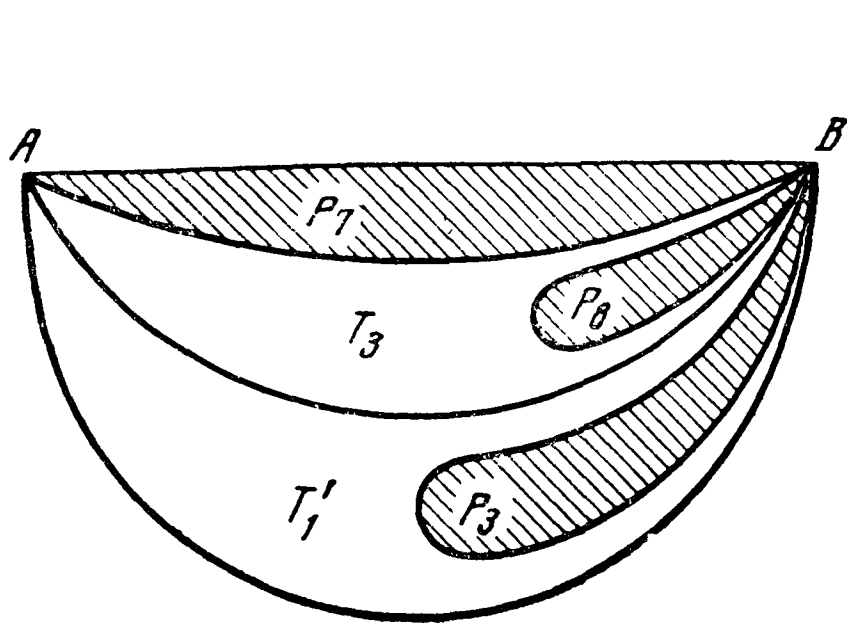


Рис. 14

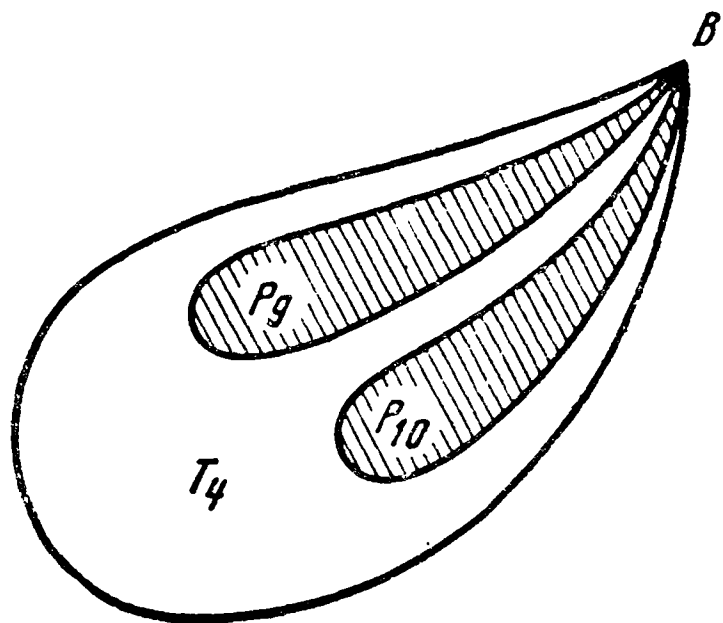


Рис. 15

аналогично строению области AKB ; области P_0 и P_1 устроены так же, как область $ABLC$ (если не считать той части фигуры, которая уходит в бесконечность); области P_5 и P_7 — так же, как P_2 , и, наконец, P_4 , P_8 , P_9 и P_{10} повторяют строение P_3 .

Точки прямых BE и FL отвечают многоугольникам первого рода, а точки A и C на этих прямых — единственные точки, отвечающие многоугольникам первого типа. Кроме того, это единственные точки, принадлежащие области D_0 . Точки прямой BL соответствуют многоугольникам второго рода. Единственной точкой прямой BL , принадлежащей D_0 , является K . В самом деле, подстановка S_3 переводит K в точку

$$x = y = \infty, \quad z = \frac{1}{2},$$

которая отвечает многоугольнику первого типа.

XVI. Теория подгрупп

Мы доказали, что среди уравнений любого фуксова типа имеется фуксово уравнение. Теперь, считая фуксов тип заданным, мы должны найти содержащееся в нем фуксово уравнение, или, что то же, соответствующую фуксову группу.

Однако прежде чем мы приступим к этой задаче, необходимо сказать несколько слов о подгруппах данной фуксовой группы.

Эти подгруппы бывают двух типов.

1. Подгруппы конечного индекса, т. е. такие, что все подстановки полной группы можно получить, умножая все подстановки подгруппы на конечное число подстановок.

2. Подгруппы бесконечного индекса.

Существует и другая точка зрения, также различающая подгруппы двух разновидностей.

1. Инвариантные или, как говорят немцы, характеристические подгруппы, коммутирующие со всеми подстановками полной группы.

2. Неинвариантные подгруппы. (См.: K l e i n. Mathematische Annalen, Bd. 17; Walther D y s k. Über reguläre Riemann'sche Fläche. Gruppentheoretische Studien. — Mathematische Annalen, Bd. 17, 20.)

Подгруппы конечного индекса представляют собой не что иное, как фуксовы группы. Пусть G — полная группа, g — содержащаяся в ней подгруппа, R_0 — производящий (фундаментальный) многоугольник группы G ; $R_1, R_2, \dots$ — его образы при подстановках группы G ; P_0 — производящий многоугольник подгруппы g . Нетрудно видеть, что P_0 образован объединением некоторого числа многоугольников $R_0, R_1, R_2, \dots, R_n$.

Выберем из

$$R_0, R_1, R_2, \dots$$

$n+1$ многоугольников. Пусть это будут, например, многоугольники $R_0, R_1, R_2, \dots, R_n$. Предположим, что они образуют некое односвязное множество, которое мы обозначим P_0 . При этом несколько сторон многоугольников R остаются свободными, именно они и служат сторонами P_0 . Необходимо еще выяснить, как они разбиваются на сопряженные пары. Пусть a_0b_0 — сторона многоугольника R_0 , $a'_0b'_0$ — сопряженная ей сторона; $a_1b_1, a'_1b'_1$ — гомологичные стороны многоугольника R_1 ; $a_2b_2, a'_2b'_2$ — гомологичные стороны многоугольника R_2 и т. д. Среди $n+1$ сторон $a_i b_i$ имеется некоторое число p сторон, которые остаются свободными; среди $n+1$ сторон $a'_i b'_i$ также имеется p (т. е. в точности столько же) свободных сторон. Следовательно, можно предположить, что каждой свободной стороне $a_i b_i$ отвечает одна из свободных сторон $a'_i b'_i$, причем это соответствие произвольно. Итак, все стороны многоугольника P_0 разбиваются на пары сопряженных сторон.

Для того чтобы P_0 мог порождать дискретную группу, необходимо удовлетворить еще одному условию, а именно: сгруппировать его вершины, разделив их на циклы. Сумма углов каждого цикла должна составлять $1/n$ от 2π , где n — целое число. Если это условие выполнено, то P_0 порождает фуксову группу, которая входит в качестве подгруппы в G . Кроме того, при таком подходе мы получаем все подгруппы конечного индекса группы G .

Пусть

$$X = F_1(z), \quad Y = F_2(z), \quad F_3(z), \dots \quad (1)$$

— фуксовы функции, порожденные группой G , а

$$x = f_1(z), \quad y = f_2(z), \quad f_3(z) \quad (2)$$

— фуксовы функции, порожденные подгруппой g . Класс фуксовых функций (2) содержит класс фуксовых функций (1) как частный случай.

Предположим сначала, что и G и g имеют род 0. Тогда все функции (1) рационально выражаются через X , все функции (2) — рационально вы-

ражаются через x . Отсюда следует, что X есть рациональная функция от x . Если значения X в различных вершинах R_0 известны, то нетрудно найти коэффициенты этой рациональной функции.

Если G — группа рода 0, а g — ее подгруппа рода p , то все функции (1) рациональны относительно X , а функция X рациональна относительно x и y .

Наконец, может случиться так, что ни G , ни g не будут группами рода 0. В этом случае X и Y будут рациональными функциями от x и y , однако обратное неверно.

Следует заметить, что развиваемая нами теория полностью аналогична теории преобразований эллиптических функций. В самом деле, чем занимается теория таких преобразований? Она изучает связь между эллиптическими функциями, порожденными группой

$$(z, m\omega_1 + n\omega_2) \quad (\omega_1, \omega_2 — \text{заданные периоды;} \\ m, n — \text{любые целые числа}), \quad (3)$$

и эллиптическими функциями, порожденными группой

$$(z, m\Omega_1 + n\Omega_2), \quad (4)$$

если новые периоды Ω_1, Ω_2 выбраны так, что вторая группа оказывается подгруппой первой. Заметим также, что, применив те же принципы к фуксовым функциям, порожденным уравнением гипергеометрического ряда, мы без труда придем к результатам, полученным Гурса в его замечательной диссертации (Annales scientifiques de l'École normale, 1881).

В частном случае, когда g — инвариантная подгруппа, разбиение P_0 на многоугольники R (число которых равно $n+1$) правильно, даже если мы согнем P_0 так, чтобы, склеив сопряженные стороны, превратить его в замкнутую поверхность. Кроме того, между X, Y, x и y имеет место соотношение особого рода. Например, если обе группы G и g рода 0, то группа алгебраического уравнения, связывающего X и x , однократно транзитивна.

Рассмотрим пример, который понадобится нам в дальнейшем.

Пусть R_0 — многоугольник

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} \beta_n \beta_{n-1} \dots \beta_3 \beta_2,$$

симметричный относительно своей диагонали $\alpha_1 \alpha_{n+1}$. Обозначим через β_i вершину, симметричную α_i . Предположим, кроме того, что симметричные стороны сопряжены, все вершины лежат на фундаментальной окружности, а все углы равны нулю.

Пусть $X = F(z)$ — одна из фуксовых функций, порождаемых R_0 , через которую остальные функции выражаются рационально. Функцию $F(z)$ можно выбрать так, что она будет вещественна на всем периметре многоугольника R_0 и на диагонали $\alpha_1 \alpha_{n+1}$ (см.: О фуксовых функциях. — Acta mathematica, t. 1, p. 232 и 272)*.

* См. настоящий том, стр. 95, 128. (Прим. ред.)

Функция $F(z)$ осуществляет конформное отображение многоугольника

$$r_0 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} \alpha_1$$

на полуплоскость. Пусть R_i — образ многоугольника R_0 при подстановке, переводящей $\beta_i \beta_{i+1}$ в $\alpha_i \alpha_{i+1}$. Многоугольник R_i симметричен с R_0 относительно $\alpha_i \alpha_{i+1}$. Рассмотрим далее многоугольник $P_0 = R_0 + R_1$ и будем считать сопряженными его стороны, симметричные относительно $\alpha_i \alpha_{i+1}$. Все циклы этого многоугольника параболические, он порождает некоторую систему фуксовых функций. Выберем среди них функцию, которая вещественна на всем периметре R_0 и R_1 и обладает тем свойством, что все остальные функции системы выражаются через нее рационально.

Обозначим ее через $x = f(z)$. Эта функция также задает конформное отображение на полуплоскость, но не многоугольника r_0 , как в предыдущем случае, а всего многоугольника R_0 .

Для того чтобы функция x была полностью определена, положим

$$f(\alpha_1) = 0, \quad f(\alpha_{n+1}) = \infty,$$

тогда

$$x = \pm \sqrt{\frac{X - F(\alpha_1)}{X - F(\alpha_{n+1})}}.$$

Выбор знака перед корнем произволен.

Сделаем еще один шаг. Пусть P_1 — многоугольник, симметричный многоугольнику P_0 относительно стороны, обозначенной C . Положим $Q_0 = P_0 + P_1$ и будем считать сопряженными две стороны многоугольника Q_0 , симметричные относительно C . Пусть y — фуксова функция, порожденная многоугольником Q_0 , через которую все остальные выражаются рационально. Предположим, что y вещественна на периметре Q_0 и, следовательно, на стороне C .

Полагая

$$y = \varphi(z), \quad \varphi(\alpha_i) = 0, \quad \varphi(\alpha_{i+1}) = \infty,$$

находим

$$y = \sqrt{\frac{x - f(\alpha_i)}{x - f(\alpha_{i+1})}} = \left(\frac{\sqrt{\frac{X - F(\alpha_1)}{X - F(\alpha_{n+1})}} - \sqrt{\frac{F(\alpha_i) - F(\alpha_1)}{F(\alpha_i) - F(\alpha_{n+1})}}}{\sqrt{\frac{X - F(\alpha_1)}{X - F(\alpha_{n+1})}} - \sqrt{\frac{F(\alpha_{i+1}) - F(\alpha_1)}{F(\alpha_{i+1}) - F(\alpha_{n+1})}}} \right)^{1/2}.$$

На этом примере хорошо видна природа соотношений между фуксовыми функциями, порожденными фуксовой группой G , и фуксовыми функциями, порожденными одной из ее подгрупп.

Скажем теперь несколько слов об инвариантных подгруппах как конечного, так и бесконечного индекса. К необходимости их рассмотрения приводит, в частности, следующая задача.

Пусть

$$\frac{d^p w}{dx^p} + \varphi_{p-1} \frac{d^{p-1} w}{dx^{p-1}} + \dots + \varphi_0 w = 0 \quad (5)$$

— линейное уравнение, коэффициенты φ которого рациональны относительно x .

Предположим, что

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

— особые точки этого уравнения, причем корни определяющего уравнения, записанного относительно a_i , кратны $1/K_i$, где K_i — некоторое целое число. Если не существует ни одного целого числа, такого, что корни определяющего уравнения кратны $1/K_i$, то $K_i = \infty$.

В силу разделов XIII—XIV, можно найти фуксово уравнение

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \psi(x) v, \quad (6)$$

имеющее особые точки в

$$a_1, a_2, \dots, a_n,$$

причем разность корней определяющего уравнения, записанного для точки a_i , будет равна $1/K_i$. Это фуксово уравнение принадлежит некоторому фуксову типу T .

Пусть z — отношение двух интегралов уравнения, x — фуксова функция от z . Обозначим через G группу этой функции. Интегралы

$$w_1, w_2, \dots, w_p$$

уравнения (5) как функции z однозначны. Пусть S — подстановка группы G . При действии S на z интегралы w перейдут в

$$w_1^1, w_2^1, w_3^1, \dots, w_p^1.$$

Ясно, что w_i^1 линейно зависят от w_i . Обозначив через Σ линейную подстановку, позволяющую переходить от w_i к w_i^1 , запишем для краткости, что

$$w_i^1(z, S) = [w(z)] \Sigma. \quad (7)$$

Это равенство означает, что при действии на z подстановки S интегралы w претерпевают подстановку Σ .

Подстановки Σ образуют группу Γ , изоморфную G , но изоморфизм групп Γ и G может быть голоэдрическим и мериэдрическим. Если изоморфизм мериэдрический, то тождественной подстановке в группе Γ отвечает бесконечно много подстановок

$$S_1, S_2, \dots, S_p, \dots \quad (8)$$

группы G . Подстановки (8) образуют в G подгруппу g . Я утверждаю, что эта подгруппа инвариантна. В самом деле, пусть s — подстановка группы G , не принадлежащая g , σ — соответствующая s подстановка группы Γ

и S_1 — подстановка подгруппы g . Я утверждаю, что $s^{-1}Ss$ также принадлежит подгруппе g . Действительно,

$$\begin{aligned} w(zS_1) &= w(z), \\ w(zs^{-1}S_1) &= w(zs^{-1}), \\ w(zs) &= [w(z)]\sigma, \\ w(zs^{-1}S_1s) &= [w_1(zs^{-1}S_1)]\sigma = [w(zs^{-1})]\sigma, \\ w(z) &= w(zs^{-1}s) = [w(zs^{-1})]\sigma \end{aligned}$$

и, наконец,

$$w(zs^{-1}S_1s) = w(z),$$

что и требовалось доказать.

Итак, мы приходим к необходимости рассматривать инвариантные подгруппы g конечного и бесконечного индекса и функции w от z , не изменяющиеся при подстановках таких подгрупп. Предположим, что уравнение (5) интегрируется в алгебраических функциях, тогда подстановки Σ образуют группу конечного порядка и, следовательно, g — подгруппа конечного индекса. Таким образом, задача интегрирования линейных уравнений в алгебраических функциях сводится к изучению инвариантных подгрупп конечного индекса и преобразований фуксовых функций. Всем этим мы займемся несколько позже.

Нечто аналогичное производящему (фундаментальному) многоугольнику фуксовой группы можно построить и в том случае, когда g — подгруппа бесконечного индекса.

В самом деле, пусть

$$I, s_1, s_2, s_3, \dots, s_p, \dots \quad (9)$$

— бесконечная последовательность подстановок группы G , выбранных так, что если

$$I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_p, \dots \quad (10)$$

— соответствующие подстановки группы Γ , то среди (10) каждая из подстановок группы Γ встречается один и только один раз.

Пусть

$$R_0, R_1, R_2, R_3, \dots, R_p, \dots$$

— многоугольники, аналогичные R_0 , которые отвечают подстановкам (9). Множество этих многоугольников образует область Q_0 , которая в некотором смысле является производящим, или фундаментальным, многоугольником группы g .

В частности, если уравнение (5) второго порядка и t — отношение его интегралов, то t — однозначная функция от z , не изменяющаяся при подстановках группы g . Предположим, что уравнение (5) принадлежит к типу T и x — клейнова функция от t , существующая лишь внутри некоторой области D с неаналитической границей (такие области были изучены нами

в «Мемуаре о клейновых группах»). В этом случае подгруппа g вырождается в тождественную подстановку, а функция t принимает любое значение, заключенное внутри D , один и только один раз. Следовательно, соотношение между t и z задает конформное отображение области D на круг.

Мы подходим к наиболее важному пункту. Предположим, что фуксово уравнение (5) принадлежит к типу T' и что тип T подчинен T' . Тогда x — фуксова функция от t . Оказывается, что в этом случае t — однозначная функция от z , не изменяющаяся при подстановках группы g и принимающая те и только те значения, которые заключены внутри фундаментального круга. Кроме того, внутри Q_0 она принимает каждое из этих значений только один раз, но внутри фундаментального круга может принимать их бесконечно много раз.

Нам остается изучить, что происходит в том случае, когда коэффициенты φ уравнения (5) вместо того, чтобы быть рациональными по x , рациональны по x и y , причем эти две переменные связаны между собой соотношением

$$\vartheta(x, y) = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \psi(x) v, \quad (6)$$

где ψ — рациональная функция от x . Особыми точками уравнения (6) служат не только особые точки уравнения (5), но и особые точки уравнения (11), т. е. те значения x , при которых $d\vartheta/dy = 0$. Если b — одна из особых точек уравнения (6), в окрестности которой λ значений y испытывают хорошо известную подстановку, то разность корней определяющего уравнения должна быть равной $1/K$, где K — величина, кратная λ . Во избежание недоразумений заметим следующее. Каждому значению x отвечает несколько точек римановой поверхности (11). Если одна из этих точек является особой для уравнения (5), то остальные точки в общем случае особыми для уравнения (5) не будут, однако все эти аналитические точки будут особыми точками уравнения (6). Какому месту римановой поверхности принадлежит та или иная аналитическая точка, для нас безразлично, поскольку функция $\psi(x)$ рациональна по x и не зависит от y .

После этого замечания вернемся к уравнению (6). Пусть G — группа уравнения (6), z — отношение его интегралов. Переменная x будет фуксовой функцией от z , переменная y — однозначной функцией от z , но она не будет оставаться неизменной при всех подстановках группы G . Обозначим через g' группу, образованную теми подстановками группы G , которые не изменяют y . Утверждается, что g' — подгруппа конечного индекса группы G , хотя и не является, вообще говоря, ее инвариантной подгруппой (по крайней мере, если группа алгебраического уравнения (11) однократно транзитивна).

Наоборот, если мы предположим, что уравнение (11) имеет относительно y степень m , и рассмотрим одновременно все m найденных из этого уравне-

ния значений y , то группа g'' , образованная подстановками группы G , не изменяющими *ни одного* из указанных m значений, будет инвариантной подгруппой группы G .

Обозначим, наконец, через g группу, образованную теми подстановками группы G , которые не изменяют интегралов уравнения (5). В G и g' группа g входит как подгруппа конечного индекса. Если g рассматривать как подгруппу в G , то она неинвариантна, но она инвариантна как подгруппа в g' .

Группу g' можно считать порожденной многоугольником P'_0 , который образован объединением m многоугольников — образов многоугольника R_0 . Группа g порождена областью Q_0 , представляющей собой объединение бесконечно многих многоугольников — образов многоугольника P'_0 . Что же касается группы g'' , то она порождена многоугольником P''_0 , состоящим из ω образов многоугольника R_0 , где ω — порядок группы алгебраического уравнения (11). Если последняя группа однократно транзитивна, то $\omega = m$ и группы g' и g'' совпадают.

XVII. Третья задача. Симметричные типы

В разделе X мы видели, с какой легкостью доказывается, что каждый симметричный фуксов тип содержит одно фуксово уравнение. Теперь мы хотим показать, как можно вычислить коэффициенты этого уравнения с любой, сколь угодно высокой точностью.

Рассмотрим симметричный тип T :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \psi(x)v, \quad (1)$$

где $\psi(x)$ — рациональная функция от x , все особые точки этого уравнения вещественны, а все соответствующие им определяющие уравнения имеют двукратный корень. Пусть

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

— эти вещественные особые точки. Предположение о вещественности особых точек можно заменить предположением о том, что особые точки лежат на окружности с центром в 0 и радиусом 1, поскольку, как нетрудно видеть, от одного случая к другому можно перейти с помощью линейной замены переменной x . Остающиеся свободными коэффициенты уравнения (1) требуется выбрать так, чтобы это уравнение было фуксовым. Предположим, что задача решена. Пусть z — отношение интегралов уравнения. Переменная x будет фуксовой функцией относительно z ; фундаментальный многоугольник R_0 этой функции будет симметричным, а все его вершины расположатся на фундаментальной окружности. Разобьем R_0 одной из его диагоналей на два симметричных многоугольника r_0 и r'_0 . Предположим, что

центр фундаментальной окружности лежит внутри r_0 , и обозначим через b некоторую вещественную точку, также лежащую внутри r_0 . Функция

$$x = f(z)$$

будет одной из фуксовых функций, через которую все остальные выражаются рационально. Окончательно функция x определяется следующими условиями:

$$\begin{aligned} \operatorname{mod} x &= 1, & \text{когда точка } z \text{ лежит на периметре } r_0; \\ x &= 0 & \text{при } z = 0; \\ \arg x &= 0 & \text{при } z = b. \end{aligned}$$

Функция $x = f(z)$ задает конформное отображение многоугольника r_0 на круг с центром в 0 и радиусом 1.

Пусть $R_1, R_2, \dots$ — различные образы многоугольника R_0 при преобразованиях порожденной им группы. Эти многоугольники покрывают весь фундаментальный круг, и каждый из них подразделяется на две симметричные части r_1 и r'_1 , r_2 и r'_2 и т. д. Рассмотрим некоторое число многоугольников r_i и r'_i , объединение которых P_0 односвязно. Пусть

$$y = \vartheta(z)$$

— функция, задающая конформное отображение P_0 на круг с центром в 0 и радиусом 1. Функция $y = \vartheta(z)$ будет полностью определена, если предположить, что

$$\vartheta(0) = 0, \quad \arg \vartheta(b) = 0.$$

Оказывается, что $\vartheta(z)$ — фуксова функция, группа g которой является подгруппой группы G функции $f(z)$. Отсюда следует, что x есть некоторая рациональная функция $\varphi(y)$ от y . Если особые точки a и относительное расположение различных многоугольников r_i и r'_k , образующих в совокупности P_0 , известны, то нетрудно найти коэффициенты функции $\varphi(y)$ (к этому мы еще вернемся несколько дальше). Но особые точки a нам заданы, а относительное расположение многоугольников r_i и r'_k можно выбирать совершенно произвольно. Следовательно, коэффициенты рациональной функции $\varphi(y)$ можно считать известными.

Если число многоугольников r_i и r'_k достаточно велико, то их можно выбрать так, что окружность с центром в 0 и радиусом ρ будет лежать целиком внутри P_0 при любом ρ (разумеется, имеет смысл говорить лишь о радиусе $\rho < 1$). Это означает, что будет справедливо неравенство

$$\operatorname{mod} z < \operatorname{mod} y < \frac{\operatorname{mod} z}{\rho}.$$

Следовательно, выбирая радиус ρ достаточно близким к 1, а тем самым, P_0 — достаточно большим, разность между $\operatorname{mod} z$ и $\operatorname{mod} y$ можно сделать сколь угодно малой. Иначе говоря, при ρ , стремящемся к 1,

$$\lim \operatorname{mod} y = \operatorname{mod} z.$$

Но это еще не все. Пусть

$$z = \xi + i\eta, \quad u = \ln \operatorname{mod} \frac{y}{z}, \quad v = \arg \frac{y}{z}.$$

Предположим, что z — точка, для которой

$$\operatorname{mod} z < \rho_1 < \rho < 1,$$

где ρ_1 — надлежащим образом выбранное положительное число. Внутри круга радиуса ρ справедливо неравенство

$$0 < u < \ln \frac{1}{\rho}.$$

Следовательно, внутри круга радиуса ρ_1 имеет место неравенство

$$\left| \frac{du}{d\xi} \right| < \frac{4 \ln \left(\frac{1}{\rho} \right)}{\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho} \right)^2} > \left| \frac{du}{d\eta} \right|.$$

Но

$$\frac{du}{d\xi} = -\frac{dv}{d\eta}, \quad \frac{du}{d\eta} = \frac{dv}{d\xi}.$$

Отсюда мы заключаем, что $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ равномерно стремятся к 0, когда ρ стремится к 1. Поскольку $v=0$ при $z=b$, имеем

$$v = \int_b^z \left\{ \frac{\partial v}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial v}{\partial \eta} d\eta \right\},$$

откуда

$$\lim v = 0 \quad \text{при} \quad \lim \rho = 1$$

и

$$\lim (u + iv) = 0,$$

$$\lim \frac{y}{z} = 1, \quad \lim y = z.$$

Мы хотим показать, что при любом значении z предел рациональной функции $\varphi(z)$ (представляющей собой не что иное, как $\varphi(y)$, в которую вместо y подставлен z) совпадает с фуксовой функцией $f(z)$. Итак,

$$y = \vartheta(z).$$

Пусть, кроме того,

$$z = \vartheta(z_1).$$

Я утверждаю, что

$$\lim z_1 = z.$$

Действительно, если z лежит внутри окружности с центром в 0 и радиусом 1, то

$$\operatorname{mod} \frac{dy}{dz} > 1 - \frac{\ln \left(\frac{1}{\rho} \right) \sqrt{32}}{\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho} \right)^2}.$$

Правую часть этого неравенства обозначим для краткости K .
Далее,

$$\operatorname{mod} z < \operatorname{mod} y$$

и, следовательно,

$$\operatorname{mod} z_1 < \operatorname{mod} z < \rho_1,$$

откуда

$$|z_1 - z| < |y - z| \frac{1}{K}.$$

Но

$$\lim |y - z| = 0,$$

следовательно,

$$\lim |z - z_1| = 0.$$

Кроме того,

$$\varphi(z) = f(z_1).$$

Но $f(z)$ — непрерывная функция и, поскольку разность $z - z_1$ стремится к нулю,

$$\lim f(z_1) = f(z),$$

или

$$\lim \varphi(z) = f(z),$$

что и требовалось доказать.

Точно так же доказывается, что предел n -й производной функции $\varphi(z)$ равен n -й производной функции $f(z)$.

Воспользуемся полученными результатами для вычисления свободных коэффициентов уравнения (1). Пусть p — число таких коэффициентов, которые мы для краткости обозначим s . Пусть v_1 и v_2 — интегралы уравнения (1), определяемые следующими условиями:

$$\text{при } x = 0 \quad v_1 = 0, \quad \frac{dv_1}{dx} = 1,$$

$$\text{при } x = 0 \quad v_2 = 1, \quad \frac{dv_2}{dx} = 0.$$

Их отношение v_1/v_2 будет полностью известной функцией от x . Вычислим коэффициенты при

$$x^2, x^3, x^4, \dots, x^{p+3}$$

в разложении этой функции. Эти коэффициенты (их $p+2$) рационально выражаются через коэффициенты c и особые точки a . Но

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\alpha z}{z + \gamma}, \quad (2)$$

где α и γ — две пока еще не известные константы. Тождество (2) задает соотношение между $x = f(z)$ и z . С помощью этого соотношения мы можем найти $p+2$ первых коэффициентов разложения $f(z)$ по степеням z в виде рациональных функций от α , γ , c и a , и наоборот, величины c , α и γ можно представить в виде рациональных функций от a и $p+2$ первых коэффициентов разложения $f(z)$. Но особые точки a заданы. Коэффициенты же разложения $f(z)$ можно также считать известными, поскольку они являются пределами коэффициентов разложения $\varphi(z)$. Следовательно, коэффициенты c можно вычислить сколь угодно точно.

Можно попытаться найти группу уравнения (1) непосредственно, не вычисляя его коэффициентов. Для этого нужно поступить следующим образом.

Пусть x описывает вокруг особой точки a_i в положительном направлении замкнутый контур. При этом z переходит в $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$, и подстановка

$$S_i = \left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right)$$

— параболическая. Одновременно y переходит в y_i . Если начальным значением z был 0, то его конечным значением будет $\beta_i/\gamma_i = \lambda_i$. Если начальное значение переменной y равно 0, то ее конечное значение обозначим μ_i . Знания величины λ_i достаточно для того, чтобы полностью найти подстановку S_i . Но коль скоро рациональная функция $\varphi(y)$ известна, нахождение μ_i сводится к простой алгебраической задаче. Кроме того,

$$\lambda_i = \lim \mu_i.$$

Так мы находим все подстановки S_i и, тем самым, группу G . С другой стороны, между λ_i существует алгебраическое соотношение, которое находится без труда.

Сделаем еще один шаг в решении задачи и покажем, как можно эффективно вычислить коэффициенты рациональной функции $\varphi(y)$. Наши выкладки, естественно, будут зависеть от выбора многоугольников r_0 и r'_0 , образующих в совокупности P_0 , однако сам выбор почти полностью лишен какого бы то ни было произвола. Для определенности нам придется рассмотреть несколько конкретных примеров такого выбора. Разумеется, рассмотренные нами частные случаи выбора r_0 и r'_0 — не более чем примеры, и мы вовсе не хотим сказать, что сделанный нами выбор лучше и проще других. Опыт и практика приведут, вероятно, к совсем иному выбору этих многоугольников.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — вершины многоугольника r_0 , поставленные в соответствие особым точкам $a_1, a_2, \dots, a_n$. Рассмотрим многоугольник P_0^1 ,

образованный r_0 и многоугольником, симметричным r_0 относительно одной из сторон последнего, например относительно $\alpha_1 \alpha_n$. Обозначим через y_1 функцию y , порожденную многоугольником P_0^1 , а через z_1 — функцию, связанную с y_1 надлежащим образом подобранным линейным соотношением, коэффициенты которого мы определим позднее. Тогда

$$z_1 = \sqrt{\frac{x - a_1}{x - a_n}}, \quad y_1 = \frac{A_1 z_1 + B_1}{C_1 z_1 + D_1}.$$

Рассмотрим, далее, многоугольник P_0^2 , образованный P_0^1 и многоугольником, симметричным P_0^1 относительно одной из сторон последнего, которую мы обозначим C . Пусть y_2 и z_2 — функции многоугольника P_0^2 , аналогичные функциям z_1 и y_1 многоугольника P_0^1 , a и b — значения, которые z_1 принимает на концах C . Тогда

$$z_2 = \sqrt{\frac{z_1 - c}{z_1 - d}}, \quad y_2 = \frac{A_2 z_2 + B_2}{C_2 z_2 + D_2}.$$

Производя над P_0^2 те же действия, что и над P_0^1 , и повторяя весь процесс неограниченное число раз, мы последовательно вычислим значения

$$z_1, z_2, \dots, z_i, \dots$$

Для того чтобы перейти от z_i к y_i , необходимо знать коэффициенты линейного соотношения

$$y_i = \frac{A_i z_i + B_i}{C_i z_i + D_i}.$$

Эти коэффициенты мы определим так, чтобы функции y_i обращались в нуль вместе с x , имели модуль, равный 1, одновременно с x и принимали вещественные значения при некоторых вещественных значениях x .

Некоторый произвол имеется и в способе построения многоугольников $P_0^1, P_0^2, \dots$. При построении P_0^i из многоугольника P_0^{i-1} к последнему присоединяют многоугольник, симметричный относительно одной из его сторон C . Как же выбрать эту сторону C ? Оказывается, в качестве C удобно выбрать ту из сторон многоугольника P_0^{i-1} , которая лежит против его наибольшей стороны (имеется в виду евклидова длина).

Повторяем еще раз, что мы хотим ограничиться здесь рассмотрением примера и не утверждаем, будто указанному способу построения многоугольников P_0 следует отдавать предпочтение перед всеми остальными. Наоборот, мы считаем, что намного удобнее был бы такой метод построения, при котором группа фуксовой функции $\vartheta(z)$ была инвариантной подгруппой группы G .

При таком подходе вычисление коэффициентов с уравнения (1) не занимало бы много времени даже при весьма высоких требованиях к точности. Однако во многих приложениях можно ограничиться грубым приближением. Действительно, если коэффициенты s не имеют точных значений,

удовлетворяющих фуксову уравнению, а лишь достаточно близки к таким значениям, то переменная x не будет фуксовой функцией отношения z интегралов, но еще будет клейновой функцией. Почти во всех случаях этого достаточно.

Вот как можно применить только что полученные результаты к изучению несимметричных типов. Пусть

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \psi(x, y)v, \quad (3)$$

$$\vartheta(x, y) = 0 \quad (4)$$

— уравнение, принадлежащее к фуксову типу T . Тип T содержит фуксово уравнение. Если t — отношение интегралов этого фуксова уравнения, то переменные x и y будут фуксовыми функциями от t . Однако пока нас не интересует вычисление коэффициентов этого фуксова уравнения. Мы хотим лишь найти фуксово уравнение, которое принадлежит типу T' , подчиненному T . Пусть

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad (5)$$

— особые точки уравнения (3) и соотношения (4). Как показано в разделе XI, всегда существует фуксово уравнение

$$\frac{d^2v}{dx^2} = F(x)v \quad (6)$$

с рациональным коэффициентом $F(x)$, имеющее особые точки не только в n заданных точках (5), но и в k других, не заданных точках $b_1, b_2, \dots, b_k$. При этом все определяющие уравнения имеют двукратный корень.

Однако, возвращаясь к разделу XI, мы видим, что уравнение (6) получено с помощью другого фуксова уравнения, имеющего лишь вещественные особые точки и, следовательно, принадлежащего к симметричному типу. Кроме того, мы только что показали, что коэффициенты фуксова уравнения, принадлежащего данному симметричному типу, можно считать известными. Следовательно, коэффициенты уравнения (6) также можно считать известными.

Пусть, далее, z — отношение интегралов уравнения (6). Тогда x — фуксова функция от z , имеющая своей группой G . Кроме того, функция y однозначна по z . Если g' — группа подстановок из G , не изменяющих y (см. предыдущий раздел), то y будет фуксовой функцией от z , имеющей своей группой g' . Итак, группа g' порождает фуксово уравнение

$$\frac{d^2v}{dx^2} = F(x)v \quad (6)$$

и соотношение

$$\vartheta(x, y) = 0. \quad (4)$$

Новое фуксово уравнение (мы считаем его отличным от уравнения (6), не сопровождаемого соотношением (4)) принадлежит к типу T' , подчиненному T , и имеет известные коэффициенты. Таким образом, поставленная нами задача решена.

XVIII. Третья задача; общий случай

Рассмотрим уравнения (3), (4) и (6) предыдущего раздела. Пусть R_0 — производящий многоугольник группы G , P_0 — производящий многоугольник группы g' . Группа g образована подстановками группы g' , не изменяющими интегралов уравнения (3), и является инвариантной подгруппой группы g' . Она полностью определена. Группу g порождает область Q_0 , играющая роль производящего многоугольника, но с бесконечно большим числом сторон. Эти стороны попарно сопряжены, причем одна из сопряженных сторон служит образом другой при одной из подстановок группы g . Две точки, лежащие на сопряженных сторонах, называются *соответствующими*, если одна из них служит образом другой при такой подстановке.

Коэффициенты уравнения (3), оставшиеся свободными, требуется выбрать так, чтобы уравнение (3) было фуксовым. Пусть t — отношение интегралов уравнения (3) (по предположению, уравнение (3) фуксово), а z — отношение интегралов уравнения (6). *Требуется найти t как функцию от z .*

Для того чтобы функция t была полностью определена, предположим, что она обращается в нуль одновременно с z . Тогда t будет однозначной функцией от z , не изменяющейся при подстановках группы g и такой, что

$$\text{mod } t < 1.$$

Иначе говоря, функция t может принимать любые значения, модуль которых меньше 1.

Я утверждаю, что тогда имеет место тождество

$$\ln \text{mod } \frac{1}{t} = \sum_i \ln \text{mod } \frac{\gamma_i z + \delta_i}{\alpha_i z + \beta_i}. \quad (7)$$

В этом тождестве $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ означает подстановки группы g , а суммирование $\sum$ распространяется на все подстановки этой группы. Условившись об этом, рассмотрим бесконечную последовательность окружностей

$$C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$$

с центром в 0 и радиусами $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$, возрастающими с увеличением n . При n , стремящемся к бесконечности, радиусы стремятся к 1.

Среди членов ряда (7) имеется некоторое число таких, которые обращаются в бесконечность внутри окружности C_n . Обозначим их сумму ϑ_n . Требуется доказать, что

$$\lim \vartheta_n = \ln \operatorname{mod} \frac{1}{t} \quad \text{при} \quad n = \infty.$$

Заметим, также, что $\ln \operatorname{mod} \frac{1}{t}$, общий член ряда (7) $\ln \operatorname{mod} \frac{\gamma_i z + \delta_i}{\alpha_i z + \beta_i}$ и, следовательно, ϑ_n существенно вещественны и положительны.

Пусть

$$z = \xi + i\eta,$$

а u_n — вещественная функция от ξ и η , удовлетворяющая внутри C_n уравнению

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial \eta^2} = 0, \quad (8)$$

обращающаяся в нуль на самой окружности C_n , и такая, что разность

$$\ln \operatorname{mod} \frac{1}{t} - u_n$$

голоморфна внутри все той же окружности C_n . Тогда имеют место неравенства

$$0 < u_n < \ln \operatorname{mod} \frac{1}{t}$$

и, кроме того,

$$u_n < u_{n+1}.$$

Следовательно, функция u_n с увеличением n возрастает и ограничена сверху $\ln \operatorname{mod} \frac{1}{t}$. Это говорит о том, что при $n = \infty$ функция u_n стремится к некоторому конечному пределу, который мы обозначим u .

В одном из последних выпусков «Bulletins de la Société mathématique de France» (Paris, Gauthier-Villars, 1883) я опубликовал небольшую работу, озаглавленную «Об одной теореме общей теории функций», в которой показал, что если y — любая неоднозначная функция от x , то всегда найдется переменная z , такая, что x и y будут однозначными функциями от z . Стоит лишь повторить здесь всю цепочку рассуждений, проведенных мной в указанной работе, как станет ясно, что u есть аналитическая функция от ξ и η и что всегда можно найти вторую функцию v от ξ и η так, чтобы $u + iv$ была аналитической функцией, голоморфной по z . Кроме того,

$$\ln \operatorname{mod} \frac{1}{t} \geq u.$$

Требуется показать, что в этой оценке всегда следует брать знак равенства, а не знак $>$. Для этого рассмотрим функцию u более подробно.

Я утверждаю, что функция u не изменяется при подстановках группы g . В самом деле, пусть

$$S = \left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right)$$

— одна из таких подстановок и пусть

$$u'_n(z) = u_n\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right).$$

Функцию u'_n можно определить иначе. Пусть C'_n — образ окружности C_n при подстановке, обратной S . Функция u'_n так же, как и функция u_n , удовлетворяет уравнению (8), обращается в нуль на окружности C_n , и разность

$$\ln \left| \frac{1}{t} \right| - u'_n$$

голоморфна внутри C_n .

Мы получаем бесконечную последовательность окружностей

$$C'_1, C'_2, \dots, C'_n, \dots$$

и функций

$$u'_1, u'_2, \dots, u'_n, \dots,$$

построенных с помощью этих окружностей так же, как функция u , построена с помощью окружности C_i . Кроме того, справедливо равенство

$$\lim u'_n(z) = u\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) \quad \text{при } n = \infty.$$

При любом сколь угодно большом n можно найти окружность C_p , лежащую целиком внутри C_n , и окружность C_q , лежащую целиком вне C_n .

Следовательно,

$$u_n(z) < u'_p(z) < u_q(z).$$

Но при $n = \infty$

$$p = q = \infty.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \lim u_n &= \lim u_q = u, \\ \lim u'_p(z) &= u(z) \end{aligned}$$

и, наконец,

$$u(z) = u\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что

$$v\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = v(z) + \text{const.}$$

Рассмотрим функцию

$$V = \ln \operatorname{mod} \frac{1}{t} - u$$

на плоскости t и положим

$$t = \xi_1 + i\eta_1.$$

Функция V однозначна по t . В самом деле, если t , описав замкнутый контур, возвращается к своему начальному значению, то z либо также возвращается к своему начальному значению, либо испытывает одну из подстановок группы g . И в том, и в другом случае функция u , а следовательно и V , не изменяется. Кроме того, функция V удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta_1^2} = 0. \quad (8')$$

Рассмотрим на плоскости t окружность

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = \rho^2,$$

где ρ — некоторая константа, меньшая 1.

Функция V внутри этой окружности голоморфна*. Кроме того, на самой окружности значения V заключены между 0 и $\ln \frac{1}{\rho}$. Следовательно, в силу хорошо известного свойства уравнения (8'), внутри той же окружности

$$0 \leq V \leq \ln \frac{1}{\rho}.$$

Но поскольку ρ можно выбрать сколь угодно близким к 1, то

$$V = 0,$$

или

$$\ln \operatorname{mod} \frac{1}{t} = u,$$

что и требовалось доказать.

С другой стороны, нетрудно доказать следующие неравенства:

$$\ln \operatorname{mod} \frac{1}{t} > \vartheta_n > u_n.$$

* В самом деле, сомнения вызывают лишь несколько изолированных точек, соответствующих тем вершинам многоугольника R_0 , которые лежат на фундаментальной окружности. Однако, если функция V голоморфна внутри окружности всюду за исключением некоторых изолированных точек, относительно которых ничего не известно, удовлетворяет уравнению (8') и, наконец, однозначна и ограничена сверху и снизу, то функция V голоморфна и в этих изолированных точках.

Но при $n = \infty$

$$\lim u_n = \ln \operatorname{mod} \frac{1}{t},$$

следовательно,

$$\lim \vartheta_n = \ln \operatorname{mod} \frac{1}{t},$$

что доказывает справедливость тождества

$$\ln \operatorname{mod} \frac{1}{t} = \sum \ln \operatorname{mod} \frac{\gamma_i z + \delta_i}{\alpha_i z + \beta_i}, \quad (7)$$

определяющего t как функцию от z .

Итак, предположив существование фуксова уравнения (8) и, следовательно, функции t , мы доказали, что ряд (7) сходится и сумма его равна $\ln \operatorname{mod} \frac{1}{t}$. Наоборот, предположив сходимость ряда (7), можно было бы доказать, что его сумма определяет логарифм модуля отношения интегралов фуксова уравнения, принадлежащего типу T . Однако такое доказательство было бы чрезвычайно длинным и, к тому же, бесполезным.

Тем не менее, я хотел бы сказать несколько слов о случае, когда такой подход все же полезен. Пусть T'' — тип, которому подчинен тип T . Тогда тип T' , подчиненный T , будет подчинен и типу T'' . По предположению известно, что тип T'' содержит фуксово уравнение. Пусть (3') — это уравнение. Обозначим через t_1 отношение его интегралов. Если g_1 — группа подстановок из G , не изменяющих t_1 , а g — ее подгруппа, то из сказанного ранее следует, что

$$\ln \operatorname{mod} \frac{1}{t_1} = \sum \ln \operatorname{mod} \frac{c_i z + d_i}{a_i z + b_i}, \quad (7')$$

где $\left(z, \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right)$ — общая подстановка группы g_1 . Но ряд (7) получается из ряда (7') при вычеркивании некоторых членов. Следовательно, ряд (7) сходится и тип T содержит фуксово уравнение.

Итак, всякий фуксов тип, подчиненный другому типу, который содержит фуксово уравнение, также содержит фуксово уравнение. В подавляющем большинстве случаев этот принцип делает излишним применение метода непрерывности.

XIX. Некоторые соображения о сходимости предыдущего ряда

Вот как можно было бы провести прямое доказательство сходимости ряда (7) предыдущего раздела.

В разделе I мемуара «О фуксовых функциях» мы доказали сходимость ряда

$$\sum \operatorname{mod} (\gamma_i z + \delta_i)^{-4},$$

где $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ — общая подстановка фуксовой группы G . Наоборот, считая фуксову группу заданной, мы всегда получим ряд

$$\sum \bmod (\gamma_i z + \delta_i)^{-2}, \quad (9)$$

который не будет сходиться. Однако его можно сделать сходящимся, в случае необходимости, не для всей фуксовой группы, а для содержащейся в ней подгруппы конечного индекса, например для группы g в рассматриваемом нами случае.

Я утверждаю, что если ряд (9) сходится, то ряд (7) также сходится. Действительно, пусть

$$\rho_i = \bmod \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i},$$

тогда

$$\bmod (\gamma_i z + \delta_i)^{-2} = \frac{1 - \rho_i^2}{1 - \bmod^2 z}$$

и

$$\frac{\bmod (\gamma_i z + \delta_i)^{-2}}{\ln \frac{1}{\rho_i}} = \frac{\rho_i - 1}{\ln \rho_i} \frac{\rho_i + 1}{1 - \bmod^2 z}.$$

Когда i возрастает до бесконечности, ρ_i стремится к 1 и

$$\lim \frac{\bmod (\gamma_i z + \delta_i)^{-2}}{\ln \frac{1}{\rho_i}} = \frac{2}{1 - \bmod^2 z}.$$

Таким образом, отношение члена ряда (3) к соответствующему члену ряда (7) стремится к конечному пределу, когда номер члена неограниченно возрастает.

Следовательно, оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Пусть, далее, z — некоторая точка внутри Q_0 . Рассмотрим круг C , который содержит внутри себя z и имеет неевклидову площадь S , равную

$$\frac{\pi}{4} (e^{2R} + e^{-2R} - 2). \quad (10)$$

Пусть $F(R)$ — неевклидова площадь той части круга C , которая лежит внутри Q_0 . Пусть $f(R)$ — наименьшее значение, которое принимает $F(R)$, когда круг C изменяется так, что его неевклидова площадь S сохраняется, а точка z остается все время внутри C . Тогда $f(R)$ будет непрерывной функцией от R , монотонно возрастающей до бесконечности с увеличением R .

Пусть N — число точек $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$, лежащих внутри круга с центром

в 0, неевклидова площадь S которого определяется выражением (10). Тогда

$$N < \frac{\pi}{4f(R)} (e^{2R} + e^{-2R} - 2).$$

Пусть $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$ — последовательность значений R ; R_n положительны и монотонно возрастают до бесконечности с увеличением n . Обозначим через K_n круг с центром в 0, для которого R равно R_n . Пусть U_n — сумма всех членов ряда (9), соответствующих точкам $\frac{\sigma_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$, лежащим вне K_{n-1} , но внутри K_n .

Ряд (9) можно заменить рядом

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots, \quad (11)$$

тогда

$$U_n < K \frac{e^{2R_n} + e^{-2R_n} + 2}{f(R_n)(e^{2R_{n-1}} + e^{-2R_{n-1}} + 2)} < K' \frac{e^{2(R_n - R_{n-1})}}{f(R_n)},$$

где K и K' — две надлежаще выбранные константы.

Итак, ряды (7), (9) и (11) сходятся, если R_n можно выбрать так, что ряд

$$\sum \frac{e^{2(R_n - R_{n-1})}}{f(R_n)} \quad (12)$$

будет сходиться. Последнее же имеет место, если сходится интеграл

$$\int_a^\infty \frac{dR}{f(R)}. \quad (13)$$

Таково достаточное условие сходимости ряда (7). Требуется доказать, что интеграл (13) конечен. Это можно сделать, исследуя форму области Q_0 .

Во всех случаях, когда удастся доказать конечность интеграла (13), применение метода непрерывности становится излишним.

XX. Выводы

В этом мемуаре, показав, как следует вычислять параметры группы данного линейного уравнения, я изложил некоторые свойства этих параметров, рассматриваемых как функции коэффициентов уравнения, и, наоборот, коэффициентов уравнения как функций параметров группы.

Затем я приступил к решению другой задачи.

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x, y) v, \quad (1)$$

$$\vartheta(x, y) = 0, \quad (2)$$

где φ и ϑ — рациональные функции от x и y . Предположим, что соотно-

шение (2) задано, а также заданы особые точки уравнения (1) и определяющее уравнение относительно каждой из этих точек; остальные коэффициенты уравнения (1) произвольны. Пусть, кроме того, разность корней определяющего уравнения равна нулю или $1/n$, где n — целое число. Обозначим через z отношение интегралов уравнения (1) и будем рассматривать x как функцию от z .

Я доказал, что существует *один и только один* способ распорядиться свободными коэффициентами так, чтобы x был фуксовой функцией от z , существующей лишь внутри фундаментального круга, и предложил метод вычисления этих коэффициентов.

При бесконечно многих способах выбора свободных коэффициентов x будет клейновой функцией от z , существующей не на всей плоскости. Наконец, *при одном и только одном* выборе коэффициентов x будет фуксовой или клейновой функцией, существующей на всей плоскости [15]. Последнее утверждение не было доказано. Для его доказательства пришлось бы воспользоваться методом непрерывности.

Рассмотрим теперь произвольное линейное уравнение

$$\frac{d^m v}{dx^m} = \sum \varphi_p \frac{d^p v}{dx^p}, \quad \vartheta(x, y) = 0,$$

у которого φ и ϑ рациональны по x и y . Пусть $v_1, v_2, \dots, v_n$ — интегралы этого уравнения. Можно найти переменную z такую, что она будет отношением интегралов уравнения второго порядка с коэффициентами, рациональными по x и y , а $v_1, v_2, \dots, v_n$, так же, как x и y , будут однозначными функциями от z . При этом может случиться так, что x как функция от z будет либо рациональной, либо двоякопериодической, либо фуксовой функцией, существующей лишь внутри некоторого круга, либо клейновой функцией, существующей не на всей плоскости, либо, наконец, фуксовой или клейновой функцией, существующей на всей плоскости. Этот последний случай мы оставляем без рассмотрения.

Итак, если оставить в стороне последний случай, то переменную z можно выбирать бесконечно многими способами, удовлетворяя при этом всем сформулированным выше условиям. Обозначим через $z_1, z_2, \dots, z_n$ различные переменные z . Существует одна и только одна переменная z_1 , которая будет самой простой из всех z . В общем случае x будет фуксовой функцией от z (существующей лишь внутри некоторого круга), однако в некоторых частных случаях x может быть рациональной или двоякопериодической функцией. Во всех случаях z_1 будет однозначной функцией остальных переменных $z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$, что объясняет, почему x, y и v , однозначные относительно z_1 , однозначны относительно $z_2, z_3, \dots, z_n$.

Следовательно, интегралы линейного уравнения с алгебраическими коэффициентами можно представить в виде однозначных функций переменной z .

Остается еще изучить свойства этих однозначных функций и разложить их в ряды. Именно этим я и займусь в следующем мемуаре, последнем в этой серии.

ФУКСОВЫ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЕ

$$\Delta u = e^u *$$

I. Введение

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x, y) v, \quad (1)$$

где $\varphi(x, y)$ — рациональная функция двух переменных x и y , связанных между собой алгебраическим соотношением

$$f(x, y) = 0. \quad (2)$$

Уравнение (1) имеет несколько особых точек, в которых рациональная функция φ обращается в бесконечность. Относительно каждой из особых точек можно записать определяющее уравнение.

Для того чтобы переменная x была фуксовой функцией отношения интегралов уравнения, прежде всего необходимо, чтобы разность корней каждого из определяющих уравнений была величиной, обратной целому числу. Однако это условие недостаточно.

Говорят, что два уравнения вида (1) принадлежат к одному и тому же типу, если:

- 1) соотношение (2) одинаково для обоих уравнений;
- 2) оба уравнения имеют одни и те же особые точки;
- 3) определяющие уравнения, записанные для каждой особой точки, совпадают.

Возникает вопрос: всегда ли произвольно взятый тип (удовлетворяющий единственному требованию: разность корней каждого определяющего уравнения должна быть обратной целому числу) содержит фуксово уравнение, т. е. уравнение, в котором переменная x является фуксовой функцией отношения его интегралов [1].

Этот вопрос, имеющий фундаментальное значение в теории фуксовых функций, чрезвычайно сложен. Сравнительно просто показать, что любой тип содержит не более одного фуксова уравнения; показать же, что число фуксовых уравнений всегда равно 1, намного труднее.

В основе первого доказательства этого факта лежит так называемый *метод непрерывности*. К нему независимо друг от друга пришли Клейн и я.

* Journal de mathématiques, 1898, sér. 5, 4, 137—230.

В моем мемуаре «О группах линейных уравнений»*, помещенном в томе IV журнала «Acta mathematica», я указал на сходство и различие результатов Клейна и моих и одновременно подробно изложил метод непрерывности, что избавляет меня от необходимости возвращаться к этому еще раз. Я считаю, что этому методу удалось придать совершенно строгий вид, однако он по-прежнему остается чрезвычайно сложным и носит косвенный характер.

Несколько позже Геттингенское королевское научное общество обратило внимание геометров на другой подход к задаче, предложив в качестве темы для конкурса интегрирование уравнения

$$\Delta u = e^u.$$

И действительно, интегрирование этого уравнения приводит непосредственно к решению интересующей нас проблемы.

Задача, поставленная Геттингенским обществом, была решена Пикаром в мемуаре, опубликованном в «Journal de mathématiques de M. Jordan» (1890), к которому позднее добавилась заметка в «Comptes rendus», том 116.

Решение, данное Пикаром, состоит в том, что интегрирование уравнения сначала проводится внутри достаточно малого контура, а затем результат с помощью альтернирующего метода Шварца распространяется на любой контур.

Однако можно вернуться к исходной задаче и, отказавшись от предложенного Пикаром пути в обход, попытаться найти прямое решение ее. Именно это я и намереваюсь сделать в настоящей работе.

В этом мемуаре я ограничусь рассмотрением фуксовых функций первого, второго и шестого семейства, т. е. функций, существующих лишь внутри фундаментального круга. Многоугольник R_0 , порождающий такую фуксову функцию, также лежит целиком внутри фундаментального круга, а его вершины образуют несколько циклов.

Из этих циклов мы выделим следующие:

- 1) циклы первого типа, сумма углов которых равна 2π ;
- 2) циклы второго типа, сумма углов которых равна $2\pi/n$, где n — целое число, большее 1;
- 3) циклы третьего типа, у которых все углы нулевые.

Особенно подробно мы рассмотрим *фуксовы функции первого типа* (им отвечают циклы первого типа), а затем распространим полученные результаты на другие фуксовы функции.

II. Функция u

Мы будем придерживаться следующих обозначений.

Пусть Z и Z' — две комплексные переменные, связанные алгебраическим соотношением

$$f(Z, Z') = 0, \tag{2}$$

* См. настоящий том. (Прим. ред.).

соответствующим соотношению (2) предыдущего раздела. Пусть

$$Z = X + iY, \quad Z' = X' + iY'.$$

Рассмотрим величины

$$Z_0 = X - iY, \quad Z'_0 = X' - iY',$$

комплексно сопряженные с Z и Z' . Ясно, что они связаны между собой соотношением

$$f_0(Z_0, Z'_0) = 0, \quad (2bis)$$

где f_0 — многочлен, коэффициенты которого комплексно сопряжены с коэффициентами f .

Предположим теперь, что Z и Z' — фуксовы функции

$$Z = \varphi(z), \quad Z' = \varphi'(z)$$

комплексной переменной

$$z = x + iy.$$

Тогда Z_0 и Z'_0 будут фуксовыми функциями

$$Z_0 = \varphi_0(z_0), \quad Z'_0 = \varphi'_0(z_0)$$

комплексно сопряженной переменной

$$z_0 = x - iy.$$

Уравнение фундаментальной окружности будет иметь вид

$$x^2 + y^2 = 1,$$

или

$$zz_0 = 1.$$

Условившись об этом, предположим, что переменная Z описывает в своей плоскости бесконечно малую дугу dS , а переменная z описывает соответствующую бесконечно малую дугу в своей плоскости. Пусть ds — длина дуги, описанной z , *длина, понимаемая в смысле неевклидовой геометрии*, т. е. та величина, связанная с этой дугой, которую в мемуарах, опубликованных в первом томе «Acta mathematica»*, мы обозначали L . Тогда

$$dS = \sqrt{dZdZ_0}; \quad ds = \frac{\sqrt{dzdz_0}}{1 - zz_0}.$$

Пусть

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right)$$

* См. стр. 15 и 70. (Прим. ред.).

— подстановка фуксовой группы. Если переменная z описывает дугу, неевклидова длина L которой равна ds , то переменная $\frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}$ описывает дугу, неевклидова длина которой также равна ds , а переменная

$$\varphi\left(\frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

равная Z , — дугу длиной dS .

Следовательно, отношение

$$\frac{dS}{ds}$$

не изменяется при подстановках фуксовой группы и является однозначной функцией от Z, Z', Z_0, Z'_0 .

Но тогда, положив

$$e^u = \left(\frac{ds}{dS}\right)^2 = \frac{dz}{dZ} \frac{dz_0}{dZ_0} (1 - zz_0)^{-2},$$

получим

$$u = -\ln \frac{dZ}{dz} - \ln \frac{dZ_0}{dz_0} - 2 \ln (1 - zz_0).$$

Заметив, что Z зависит лишь от z , а Z_0 — лишь от z_0 , найдем

$$\frac{d^2u}{dZ dZ_0} = -2 \frac{dz}{dZ} \frac{dz_0}{dZ_0} \frac{d^2 \ln (1 - zz_0)}{dz dz_0} = 2 \frac{dz}{dZ} \frac{dz_0}{dZ_0} (1 - zz_0)^{-2},$$

или, наконец,

$$\frac{d^2u}{dZ dZ_0} = 2e^u.$$

Переходя от переменных Z и Z_0 к переменным X и Y , получаем

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 4 \frac{d^2u}{dZ dZ_0},$$

или

$$\Delta u = 8e^u [^2]. \quad (3)$$

Для того чтобы функция u обратилась в бесконечность, необходимо, чтобы один из множителей

$$\frac{dz}{dZ}, \quad \frac{dz_0}{dZ_0}, \quad 1 - zz_0$$

был равен нулю или обратился в бесконечность.

Множитель $1 - zz_0$ никогда не может быть бесконечным. Если фуксова функция принадлежит к первому семейству, т. е. если вершины многоугольника R_0 не образуют циклов третьего типа, то множитель $1 - zz_0$ не может обращаться и в нуль, поскольку ни одна точка многоугольника R_0 не лежит на фундаментальной окружности.

Наоборот, если вершины многоугольника R_0 образуют циклы третьего типа, то множитель $1 - zz_0$ может обращаться в нуль лишь в вершине, принадлежащей одному из таких циклов.

Следовательно, вне вершин, образующих циклы третьего типа, функция u может обращаться в бесконечность лишь в том случае, когда один из множителей

$$\frac{dz}{dZ}, \quad \frac{dz_0}{dZ_0}$$

равен нулю или бесконечности. Поскольку эти множители комплексно сопряжены, они обращаются в нуль или в бесконечность одновременно.

Следовательно, условие, при котором функция u обращается в бесконечность, имеет вид

$$\frac{dZ}{dz} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dZ}{dz} = \infty.$$

Равенство $dZ/dz=0$ имеет место в двух случаях:

- 1) в вершинах многоугольника R_0 , принадлежащих циклу второго или третьего типа (к рассмотрению этого случая мы еще вернемся);
- 2) в случае, когда одновременно выполняются равенства

$$f(Z, Z') = 0, \quad \frac{df}{dZ'} = 0,$$

т. е. когда касательная к кривой $f(Z, Z') = 0$ параллельна оси Z' .

Если соответствующая точка не является двойной точкой кривой $f = 0$, то

$$\frac{df}{dZ'} = 0,$$

но ни равенство

$$\frac{df}{dZ} = 0,$$

ни, следовательно,

$$\frac{dZ'}{dz} = 0$$

места не имеют.

Поэтому, если положить

$$dS' = \sqrt{dZ' dZ'_0}$$

и

$$e^{u'} = \left(\frac{ds}{dS'} \right)^2,$$

т. е. если u' — функция, играющая относительно Z' такую же роль, какую функция u играет относительно Z , то новая функция u' в рассматриваемой точке не будет обращаться в бесконечность.

Если же рассматриваемая точка является двойной точкой кривой $f=0$, то одновременно выполняются два равенства:

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{dZ'}{dz} = 0.$$

Положив

$$Z'' = R(Z, Z'),$$

где R — рациональная функция от Z и Z' , мы можем выбрать функцию R так, что Z'' будет принимать в двойной точке различные значения в зависимости от того, какую из ветвей, пересекающихся в этой точке, мы будем рассматривать. При этих условиях равенство

$$\frac{dZ''}{dz} = 0$$

выполняться не будет, и, следовательно, если u'' — функция, играющая по отношению к Z'' такую же роль, какую функция u играет по отношению к Z , то u'' не будет обращаться в бесконечность в рассматриваемой точке.

Кроме того, всегда можно считать, что кривая $f=0$ не имеет других особенностей, кроме обыкновенных двойных точек. Наоборот, если бы точка z была вершиной многоугольника R_0 , принадлежащей циклу второго или третьего типа, то все производные

$$\frac{dZ}{dz}, \quad \frac{dZ'}{dz}, \quad \frac{dZ''}{dz}$$

были бы одновременно равны нулю, а все функции

$$u, u', u''$$

одновременно обратились бы в бесконечность.

3) При $Z=\infty$

$$\frac{dZ}{dz} = \infty.$$

Однако, если

$$Z'' = \frac{1}{Z}$$

и u'' — функция, играющая относительно Z'' такую же роль, какую u играет относительно Z , то

$$Z'' = 0.$$

Следовательно, производная dZ''/dz не равна нулю, а функция u'' не обращается в бесконечность.

Итак, если рассматриваемая фуксова функция первого типа, т. е. если вершины производящего многоугольника не образуют циклов второго и третьего типа, то функции

$$u, u', u'', \dots$$

не могут одновременно обращаться в бесконечность.

В общем случае эти функции могут одновременно обращаться в бесконечность лишь в различных вершинах циклов второго и третьего типа.

Исследуем теперь, что происходит в вершине, принадлежащей к циклу второго типа.

Если сумма углов цикла равна $2\pi/n$, a — вершина второго типа и A — соответствующее значение Z , то фуксова функция

$$Z - A = \varphi(z) - A$$

допускает разложение по степеням $z-a$, и это разложение начинается с члена $(z-a)^n$. Поэтому разложение производной dZ/dz начинается с члена $(z-a)^{n-1}$, в силу чего

$$\ln(Z - A) = n \ln(z - a) + Q,$$

$$\ln \frac{dZ}{dz} = (n-1) \ln(z - a) + Q',$$

где Q и Q' остаются конечными при $z=a$; следовательно,

$$\ln \frac{dZ}{dz} = \frac{n-1}{n} \ln(Z - A) + Q'',$$

$$\ln \frac{dZ_0}{dz_0} = \frac{n-1}{n} \ln(Z_0 - A_0) + Q_0''$$

и, наконец,

$$u = -\frac{2n-2}{n} \ln |Z - A| + q,$$

где функции Q'' , Q_0'' и q остаются конечными при $z=a$. Заметим также, что q допускает разложение по степеням

$$Z - A, Z_0 - A_0, \sqrt[n]{(Z - A)(Z_0 - A_0)}.$$

Перейдем к вершинам, образующим цикл третьего типа. В окрестности такой вершины

$$\frac{1}{z-a} = \psi(Z) + b \ln(Z - A),$$

где b — константа, а ψ — функция, допускающая разложение по степеням $Z - A$. Отсюда следует, что

$$\frac{dz}{dZ} = -(z-a)^2 \left[\psi'(Z) + \frac{b}{Z-A} \right]$$

и

$$\ln \frac{dZ}{dz} = \ln (Z - A) - 2 \ln (z - a) + Q,$$

где Q означает величину, конечную при $z = a$.

Аналогично,

$$\ln \frac{dZ_0}{dz_0} = \ln (Z_0 - A_0) - 2 \ln (z_0 - a_0) + Q_0.$$

Здесь функция Q_0 также остается конечной при $z = a$. Поскольку вершина a лежит на фундаментальной окружности, $a_0 a = 1$ и, следовательно,

$$u = -2 \ln |Z - A| + 2 \ln \frac{(z - a)(z_0 - a_0)}{aa_0 - zz_0} + q,$$

где q — величина, конечная при $z = a$.

Заметим, что соотношение

$$\frac{zz_0 - aa_0}{(z - a)(z_0 - a_0)} = \frac{a}{z - a} + \frac{a_0}{z_0 - a_0} + 1 = ab \ln (Z - A) + a_0 b_0 \ln (Z_0 - A_0) + q'$$

выполняется тождественно (q' здесь так же, как и раньше, означает член, не обращающийся в бесконечность при $z = a$).

Нетрудно проверить, что произведение ab должно быть вещественным, в силу чего

$$ab = a_0 b_0,$$

и

$$\frac{zz_0 - aa_0}{(z - a)(z_0 - a_0)} = 2ab \ln |Z - A| + q' = -\ln |Z - A| e^{q''}$$

(член q'' при $z = a$ остается конечным).

Окончательно получаем

$$u = -2 \ln |Z - A| - 2 \ln \ln |Z - A| - 2q'' + q,$$

или, более точно,

$$u = -2 \ln |Z - A| - 2 \ln (\ln |Z - A| + \psi) + \varphi,$$

где функции ψ и φ голоморфны относительно $Z - A$ и $Z_0 - A_0$.

Итак:

1) в окрестности вершины второго типа разность

$$u + \frac{2n - 2}{n} \ln |Z - A|$$

остается конечной, или, точнее, все разности

$$u + \frac{2n - 2}{n} \ln |Z - A|, \quad u' + \frac{2n - 2}{n} \ln |Z' - A'|,$$

$$u'' + \frac{2n-2}{n} \ln |Z'' - A''|$$

не могут обращаться в бесконечность одновременно;

2) в окрестности вершины третьего типа все разности

$$\begin{aligned} u + 2 \ln |Z - A| + 2 \ln \ln |Z - A|, \\ u' + 2 \ln |Z' - A'| + 2 \ln \ln |Z' - A'|, \\ u'' + 2 \ln |Z'' - A''| + 2 \ln \ln |Z'' - A''|, \\ \dots \end{aligned}$$

не могут обращаться в бесконечность одновременно.

Чрезвычайно важно понять причину такого различия между вершинами второго и третьего типа.

Пусть $\rho^2 = x^2 + y^2$. Предположим для простоты, что u зависит только от ρ . Тогда уравнение

$$\Delta u = 8e^u$$

запишется в виде

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} = 8e^u. \quad (4)$$

Будем интегрировать это уравнение методом последовательных приближений, выбирая их следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_0}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du_0}{d\rho} &= 0, \\ \frac{d^2 u_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du_1}{d\rho} &= 8e^{u_0}, \\ \frac{d^2 u_2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du_2}{d\rho} &= 8(e^{u_0+u_1} - e^{u_0}), \\ \frac{d^2 u_3}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du_3}{d\rho} &= 8(e^{u_0+u_1+u_2} - e^{u_0+u_1}), \\ &\dots \end{aligned}$$

Если ограничиться, например, двумя первыми приближениями, то

$$\begin{aligned} u_0 &= p \ln \rho, \quad e^{u_0} = \rho^p, \\ u_1 &= \frac{8\rho^{p+2}}{(p+2)^2}. \end{aligned}$$

При $p = -2$ выражение для u_1 теряет смысл, и, следовательно, уравнение (4) не может иметь интеграл вида

$$u = -2 \ln \rho + v,$$

где слагаемое v конечно при $\rho = 0$, и, наоборот, имеет интеграл вида

$$u = p \ln \rho + v$$

при p , не равном -2 .

Однако уравнение (4) допускает интеграл

$$u = -2 \ln \rho - 2 \ln \ln \rho - \ln 4.$$

Я ограничусь этим кратким перечнем фактов, достаточным для того, чтобы понять различие между вершинами второго типа, для которых $p \neq -2$, и вершинами третьего типа, отвечающим $p = -2$.

Переменная z представляет собой отношение интегралов фуксова уравнения

$$\frac{d^2 v}{dZ^2} = \varphi(Z, Z') v, \quad (1)$$

аналогичного уравнению (1) предыдущего раздела.

Если «тип» этого уравнения задан, то тем самым известны:

1) алгебраическое соотношение

$$f(Z, Z') = 0;$$

2) значения A переменной Z , соответствующие циклам как второго, так и третьего типа;

3) целое число n в каждой из вершин второго типа.

III. Поверхности Клейна

Клейн предложил способ представления алгебраических функций, который может быть полезен и нам.

Рассмотрим алгебраическую кривую, определяемую уравнением

$$f(Z, Z') = 0. \quad (2)$$

Можно построить такую замкнутую поверхность, что каждой вещественной или мнимой точке кривой (2) будет соответствовать одна и только одна вещественная точка этой поверхности. Двойной же точке кривой (2) будут соответствовать две вещественные точки поверхности — каждая из них отвечает одной из двух ветвей кривой (2), пересекающихся в данной двойной точке.

Предположим, кроме того, что координаты точки поверхности являются непрерывными функциями координат соответствующей точки кривой и что эти непрерывные функции имеют производные любого порядка.

Римановы поверхности оказываются частным случаем поверхностей Клейна: поверхность Клейна вырождается в риманову после бесконечного сплющивания и превращения в конечное число листов, наложенных на плоскость.

Следует различать *изотропные* поверхности Клейна от *анизотропных* поверхностей Клейна.

Поверхность Клейна называется *изотропной*, если соответствие между точками кривой и точками поверхности таково, что оно задает *конформное отображение* плоскости Z на поверхность Клейна. Различным точкам

плоскости Z отвечают различные точки кривой (2) и, следовательно, различные точки поверхности Клейна. Это соответствие определяет отображение области плоскости Z на некоторую область поверхности Клейна. Для того чтобы поверхность Клейна была изотропной, необходимо, чтобы указанное отображение сохраняло углы.

Для наших целей можно было рассматривать одни лишь изотропные поверхности, поскольку работы Шварца и Клейна позволяют утверждать, что любую алгебраическую кривую можно всегда представить с помощью изотропной поверхности Клейна.

Предпочтительнее, однако, не вводить столь ограничительных предположений, чтобы не усложнять значительно нашего анализа, и отказаться от использования только что сформулированной теоремы, доказательство которой достаточно длинно [3].

Наоборот, если задана любая кривая (2) рода p и любая $(2p+1)$ -связная замкнутая поверхность, то между точками этой кривой и точками поверхности, очевидно, можно установить однозначное соответствие.

Так, однозначное соответствие можно установить между вещественными точками сферы и мнимыми точками любой уникурсальной кривой или между вещественными точками тора и мнимыми точками любой кривой рода 1.

Уточним природу этого соответствия.

Не ограничивая общности, можно считать, что кривая (2) не имеет других особенностей, кроме обычных двойных точек, и регулярна на бесконечности, т. е. все ее асимптотические направления различны и не параллельны осям.

Пусть, далее, M — текущая точка поверхности, соответствующая точке Z, Z' кривой, и пусть P — точка поверхности Клейна, которая поставлена в соответствие точке

$$Z = A, \quad Z' = A'$$

нашей кривой.

Если расстояние MP мало и в точке

$$Z = A, \quad Z' = A'$$

производная $\frac{df^*}{dZ}$ отлична от нуля, то расстояние MP имеет тот же порядок величины, что и $|Z - A|$.

Наоборот, если

$$\frac{df}{dZ} = 0^{**},$$

* Следует читать $\frac{df}{dZ'}$. (Прим. ред.).

** $\frac{df}{dZ'} = 0$. (Прим. ред.).

но

$$\frac{df}{dZ'} \neq 0^*,$$

то расстояние MP по порядку величины будет отличаться от $|Z - A|$ и в общем случае будет порядка квадрата модуля $|Z - A|^{**}$ и во всяком случае того же порядка, что и $|Z' - A'|$.

Если производные $\frac{df}{dZ}$ и $\frac{df}{dZ'}$ одновременно равны нулю

$$\frac{df}{dZ} = \frac{df}{dZ'} = 0,$$

т. е. если $Z=A$, $Z'=A'$ — двойная точка кривой (2), то расстояние MP по порядку величины не будет совпадать с $|Z - A|$ или с $|Z' - A'|$, однако можно положить

$$Z'' = R(Z, Z'),$$

где R — рациональная функция от Z и Z' , числитель и знаменатель которой обращаются в нуль в двойной точке.

Если A'' — одно из двух значений, принимаемых Z'' в двойной точке, причем именно то, которое отвечает точке P , то расстояние MP имеет тот же порядок величины, что и $|Z'' - A''|$.

Наконец, если точка P соответствует бесконечно удаленной точке кривой (2), то расстояние MP будет по порядку величины совпадать с $|1/Z|$.

Рассмотрим теперь функцию u координат точки M . Точка M отвечает точке плоскости Z с координатами X и Y — вещественной и мнимой частью числа Z . Поэтому u можно рассматривать и как функцию X и Y .

Пусть dS — бесконечно малая дуга в плоскости Z , а $d\sigma$ — соответствующая ей дуга на поверхности Клейна. Аналогично, пусть $d\Omega$ — бесконечно малая область на плоскости Z , а $d\omega$ — соответствующая область поверхности Клейна.

Через конечную точку Z дуги dS проведем бесконечно малую дугу ZZ_1 , нормальную к dS , длиной dN .

Пусть MM_1 — бесконечно малая дуга на поверхности Клейна, соответствующая дуге ZZ_1 и, следовательно, примыкающая к концу M дуги $d\sigma$.

Предположим сначала, что поверхность Клейна изотропна. Тогда дуга MM_1 будет нормальна к $d\sigma$, и, если dn — длина дуги MM_1 , то

$$\frac{d\sigma}{dn} = \frac{dS}{dN}, \quad \frac{d\omega}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{dS} \right)^2.$$

* $\frac{df}{dZ} \neq 0$. (Прим. ред.).

** Порядка корня квадратного из модуля $|Z-A|$. (Прим. ред.).

Пусть u — значение функции u в точке M , или, что то же, в точке Z , а

$$u + \frac{du}{dn} dn = u + \frac{du}{dN} dN$$

— ее значение в точке M_1 , или, что то же, в точке Z_1 . Тогда

$$\frac{du}{dn} d\sigma = \frac{du}{dN} dS.$$

Формула Грина, примененная к плоскости Z , дает

$$\int \Delta u d\Omega = \int \frac{du}{dN} dS, \quad (3)$$

или, если рассматривать две функции u и v ,

$$\int v \Delta u d\Omega = \int v \frac{du}{dN} dS - \int \left(\frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial v}{\partial Y} \right) d\Omega. \quad (4)$$

Интегралы в правой части равенства берутся по всем элементам $d\Omega$ некоторой части плоскости и по всем элементам dS ограничивающего ее контура. Функции u и v , по предположению, непрерывны так же, как их первые производные.

Введем обозначения:

$$Du = \Delta u \frac{d\Omega}{d\omega}$$

и

$$E(u, v) = \left(\frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial v}{\partial Y} \right) \frac{d\Omega}{d\omega},$$

так что

$$\begin{aligned} E(u, v) &= E(v, u), \\ E(u, u) &> 0. \end{aligned}$$

Тогда равенства (3) и (4) запишутся в виде

$$\int Du d\omega = \int \frac{du}{dn} d\sigma, \quad (3bis)$$

$$\int v Du d\omega = \int v \frac{du}{dn} d\sigma - \int E(u, v) d\omega. \quad (4bis)$$

Эти равенства выражают формулы Грина, записанные для поверхности Клейна, но первое из них допускает замечательную физическую интерпретацию.

Пусть u — температура в данной точке поверхности. Тогда $\frac{du}{dn}$ имеет смысл производной от температуры по нормали к дуге $d\sigma$.

Если предположить, что поверхность теплопроводна, причем ее свойства с точки зрения теплопроводности однородны и изотропны, то произведение

$$\frac{du}{dn} d\sigma$$

в надлежаще выбранных единицах будет выражать поток тепла, проходящий в единицу времени через элемент поверхности $d\sigma$.

Таким образом, интеграл

$$\int \frac{du}{dn} d\sigma$$

означает количество тепла, притекающего к участку поверхности, площадь которого равна $\int d\omega$, через ограничивающий его контур.

Следовательно, выражение $Du d\omega$ означает количество тепла, поступающего к элементу поверхности $d\omega$ через бесконечно близкие элементы поверхности.

Предположим теперь, что поверхность Клейна анизотропна. В этом случае дуга MM_1 не будет более нормальной к дуге $d\sigma$.

Если на плоскости Z провести бесконечно малую окружность с центром в точке Z , то на поверхности Клейна ей будет соответствовать бесконечно малый эллипс с центром в точке M . Касательные к дуге MM_1 и к дуге $d\sigma$ будут двумя сопряженными диаметрами этого эллипса.

Поэтому соотношение

$$\frac{MM_1}{dN} = \frac{d\sigma}{dS}$$

выполняться не будет, но, положив

$$dn = \frac{d\sigma dN}{dS},$$

мы получим

$$MM_1 = \frac{a' dn}{b'},$$

где a' и b' — длины сопряженных диаметров нашего эллипса, направленных соответственно по касательным к MM_1 и к $d\sigma$.

При таком определении dn будет справедливо соотношение

$$\frac{du}{dn} d\sigma = \frac{du}{dN} dS.$$

Сохраняя прежними определения Du и $E(u, v)$, получаем снова равенства (3 bis) и (4 bis).

Их физический смысл также остается прежним. В самом деле, если поверхность теплопроводна, но не изотропна, то поток тепла через элемент $d\sigma$ по-прежнему будет выражаться произведением

$$\frac{du}{dn} d\sigma,$$

но dn следует понимать в только что указанном новом смысле.

Из уравнения (3bis) следует, что

$$\int D u d\omega = 0,$$

если интеграл берется по всей поверхности Клейна, поскольку она замкнута.

Физическая интерпретация этого равенства очевидна: теплопроводность поверхности обуславливает теплообмен между различными ее частями, общее же количество тепла, заключенное в данной поверхности, остается неизменным.

IV. Функция U

Рассмотрим величины

$$Z, Z', Z'',$$

рациональные относительно Z и Z' , и соответствующие функции

$$u, u', u'',$$

определенные так же, как в разделе II.

Пусть

$$e^U = e^u \frac{d\Omega}{d\omega}.$$

Тогда, если бы поверхность Клейна была изотропной, то

$$e^U = \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2.$$

Точно так же мы всегда можем утверждать, что

$$e^U = e^{u'} \frac{d\Omega'}{d\omega},$$

где $d\Omega'$ — элемент плоскости Z' , соответствующий элементу $d\Omega$ плоскости Z . Действительно,

$$e^u = \left(\frac{ds}{dS} \right)^2, \quad e^{u'} = \left(\frac{ds}{dS'} \right)^2, \quad \frac{d\Omega}{d\Omega'} = \left(\frac{dS}{dS'} \right)^2.$$

Аналогично,

$$e^U = e^{u''} \frac{d\Omega''}{d\omega}.$$

Следовательно, определение функции U не зависит от выбора функции Z среди функций

$$Z, Z', Z'', \dots$$

Но это означает, что

$$Du = \Delta u \frac{d\Omega}{d\omega} = 8e^u \frac{d\Omega}{d\omega} = 8e^U$$

и, наконец,

$$DU = 8e^U + D \ln \frac{d\Omega}{d\omega}.$$

Поскольку $D \ln \frac{d\Omega}{d\omega}$ — известная функция, которую можно считать равной $-\Phi$, можно записать, что

$$DU = 8e^U - \Phi. \quad (1)$$

Для того чтобы определение функции U не зависело от выбора Z , должна выполняться цепочка равенств

$$-\Phi = D \ln \frac{d\Omega}{d\omega} = D \ln \frac{d\Omega'}{d\omega} = D \ln \frac{d\Omega''}{d\omega} = \dots$$

и, следовательно,

$$D \ln \frac{d\Omega'}{d\Omega} = 0, \quad \Delta \ln \frac{d\Omega'}{d\Omega} = 0$$

(что, впрочем, нетрудно проверить).

Я утверждаю, что функция Φ не может обращаться в бесконечность. В самом деле, она обратится в бесконечность лишь в том случае, когда в бесконечность обратится $\ln \frac{d\Omega}{d\omega}$, т. е. когда

$$Z = \infty \quad \text{или} \quad \frac{df}{dZ'} = 0.$$

Но тогда одновременно должна была бы обратиться в бесконечность и величина $\ln \frac{d\Omega'}{d\omega}$, что возможно лишь при условии, если

$$Z' = \infty \quad \text{или} \quad \frac{df}{dZ} = 0.$$

Итак, сомнения вызывают лишь те точки поверхности Клейна, которые соответствуют бесконечно удаленной или двойным точкам поверхности

$$f(Z, Z') = 0. \quad (2)$$

Но существует еще одно условие, которое должно выполняться для всех функций Z'' :

$$\ln \frac{d\Omega'}{d\omega} = \infty.$$

Однако оно не выполняется ни в бесконечно удаленной точке, если положить

$$Z'' = \frac{1}{Z},$$

ни в двойной точке, если положить

$$Z'' = R(Z, Z')$$

(и числитель и знаменатель функции R обращаются в указанной точке в нуль).

Следовательно, функция Φ всегда конечна, что и требовалось доказать.

Что можно сказать о функции U ?

Если оставить в стороне те точки поверхности Клейна, которые соответствуют вершинам второго или третьего типа многоугольника R_0 , то всегда можно найти функцию Z' такую, что

$$u'' \quad \text{и} \quad \ln \frac{d\Omega''}{d\omega}$$

будут конечны. Следовательно, функция U конечна.

Итак, если фуксова функция — первого типа, то функция U конечна на всей поверхности Клейна и определяется из уравнения

$$DU = 8e^U - \Phi. \quad (1)$$

Пусть теперь a — вершина второго типа многоугольника R_0 , A , A' и A'' — значения функций Z , Z' и Z'' в точке a , а P — соответствующая точка поверхности Клейна.

Функцию Z'' можно считать выбранной так, что величина

$$\ln \frac{d\Omega''}{d\omega}$$

остается конечной. Тогда разность

$$u'' + \frac{2n-2}{n} \ln |Z'' - A''|$$

и, следовательно, разность

$$U + \frac{2n-2}{n} \ln MP$$

будут конечны.

Однако следует заметить, что когда Z'' стремится к A'' , то выражение

$$u'' + \frac{2n-2}{n} \ln |Z'' - A''|$$

стремится к конечному, вполне определенному пределу. Если же точка M приближается к P , то выражение

$$U + \frac{2n-2}{n} \ln MP,$$

если только поверхность Клейна не изотропна, остается конечным, но не будет стремиться к какому-либо конечному пределу: предел этого выражения будет зависеть от направления прямой MP . Если ρ — радиус достаточно малой окружности на плоскости Z'' , а ε — диаметр соответствующего ей эллипса на поверхности Клейна и направление диаметра совпадает с направлением MP , то выражение

$$U + \frac{2n-2}{n} \ln \frac{\rho MP}{\varepsilon}$$

стремится к определенному пределу при MP , стремящемся к нулю.

Пусть

$$v'' = u'' + \frac{2n-2}{n} \ln |Z'' - A''|,$$

тогда

$$\Delta v'' = \Delta u'' = \delta e^{u''} \frac{d\Omega''}{d\Omega} = \delta e^{v''} |Z'' - A''|^{\frac{2-2n}{n}} \frac{d\Omega''}{d\Omega}.$$

Мы видим, что функция v'' удовлетворяет уравнению

$$\Delta v'' = \vartheta e^{v''} \frac{d\Omega''}{d\Omega},$$

где ϑ — данная, существенно положительная функция, обращающаяся в бесконечность при $Z'' = A''$.

Пусть теперь

$$e^V = e^{v''} \frac{d\Omega''}{d\Omega}.$$

Если сохранить за ϑ и Φ их прежний смысл:

$$\vartheta = \delta |Z'' - A''|^{\frac{2-2n}{n}}; \quad \Phi = -D \ln \frac{d\Omega''}{d\omega},$$

то

$$DV = \vartheta e^V - \Phi.$$

В точке P (соответствующей точке $Z'' = A''$) функция ϑ обратится в бесконечность, но V и Φ останутся конечными.

Точно так же рассмотрим вершину третьего типа. Выберем u'' так, чтобы выражение

$$u'' + 2 \ln |Z'' - A''| + 2 \ln \ln |Z'' - A''|$$

оставалось конечным, и положим

$$v'' = u'' + 2 \ln |Z'' - A''| + 2 \ln \ln |Z'' - A''|,$$

$$\vartheta = \delta |Z'' - A''|^{-2} \ln^{-2} |Z'' - A''|.$$

Тогда

$$\Delta v'' = \Delta u'' + 2\Delta \ln \ln |Z'' - A''| = \frac{d\Omega''}{d\omega} \left(8e^{u''} - \frac{2}{|Z'' - A''|^2 \ln^2 |Z'' - A''|} \right)$$

и если

$$e^v = e^{u''} \frac{d\Omega''}{d\omega},$$

то

$$DV = \vartheta e^v - \Phi - \frac{\vartheta}{4} \frac{d\Omega''}{d\omega}.$$

Итак, мы видим, что определение функции U необходимо изменить. Полагаем

$$U = u + \ln \frac{d\Omega}{d\omega} + h,$$

где h — однозначная функция, конечная во всех точках поверхности Клейна, за исключением точек, соответствующих вершинам второго или третьего типа многоугольника R_0 .

В вершине второго типа должна оставаться конечной разность

$$h - \frac{2n-2}{n} \ln |Z'' - A''|,$$

в вершине третьего типа — разность

$$h - 2 \ln |Z'' - A''| - 2 \ln \ln |Z'' - A''|.$$

Функцию h всегда можно выбрать так, чтобы удовлетворить этим условиям и чтобы функция h вне вершин второго и третьего типа, а функции

$$h - \frac{2n-2}{n} \ln |Z'' - A''|; \quad h - 2 \ln |Z'' - A''| - 2 \ln \ln |Z'' - A''|$$

в окрестности этих вершин имели конечные и непрерывные производные всех порядков.

При этих условиях функция U всюду конечна и удовлетворяет уравнению

$$DU = 8e^U e^{-h} + D \ln \frac{d\Omega}{d\omega} + Dh,$$

или (если положить

$$\vartheta = 8e^{-h}, \quad -\Phi = D \ln \frac{d\Omega}{d\omega} + Dh)$$

уравнению

$$DU = \vartheta e^U - \Phi \quad [^4]. \quad (1bis)$$

И ϑ , и Φ — заданные функции. Первая из них всегда положительна, никогда не обращается в нуль, а в бесконечность обращается лишь в вершинах второго и третьего типов. Функция Φ обращается в бесконечность лишь в вершинах третьего типа.

В вершинах второго типа ϑ обращается в бесконечность как

$$|Z'' - A''|^{\frac{2-2n}{n}}.$$

В вершинах третьего типа ϑ и Φ обращаются в бесконечность как

$$(|Z'' - A''| \ln |Z'' - A''|)^{-2}.$$

Следовательно, отношение Φ/ϑ остается конечным; кроме того, его предел положителен и равен

$$\frac{1}{4} \frac{d\Omega''}{d\omega}.$$

Итак, если имеются вершины третьего типа, то функция Φ может обращаться в бесконечность, но в положительную бесконечность. Следовательно, у нее нет конечного верхнего предела, но *всегда есть конечный нижний предел*.

V. Максимумы и минимумы

Основное свойство выражения Du заключается в следующем: если функция u достигает максимума, Du отрицательно; если же u достигает минимума, Du положительно. С точки зрения физики это означает, что точка, в которой температура максимальна, может отдавать тепло соседним точкам, но не может его получать от них.

Рассмотрим то, что при этом происходит, подробнее. Для этого воспользуемся равенством (3 bis) из раздела III:

$$\int D u d\omega = \int \frac{du}{dn} d\sigma. \quad (3bis)$$

Если в точке P функция u достигает максимума, то в окрестности этой точки линии уровня $u = \text{const}$ представляют собой вложенные одна в другую замкнутые кривые, охватывающие точку P .

Интеграл $\int \frac{du}{dn} d\sigma$, взятый по любой из таких кривых, всегда отрицателен, поскольку производная du/dn отрицательна. Следовательно, интеграл $\int D u d\omega$, взятый по поверхности, заключенной внутри такой замкнутой кривой, также отрицателен.

Но это означает, что внутри каждой из замкнутых кривых функция Du должна принимать отрицательные значения. Поскольку эти кривые, по предположению, могут проходить сколь угодно близко от точки D , то в сколь угодно малой окрестности точки P всегда найдутся точки, в которых выражение Du отрицательно.

Если функция Du непрерывна, то она не может быть положительной в P . Функция Du может обращаться в точке P в нуль, но при условии, если в окрестности P существуют точки, в которых она отрицательна. Может случиться и так, что в точке P выражение Du обратится в бесконечность,

но опять-таки лишь при условии, что в окрестности точки P существуют точки, в которых оно отрицательно.

Тем не менее, как нетрудно убедиться, интеграл

$$\int |Du| d\omega$$

остаётся конечным и в том случае, когда Du обращается в бесконечность. Именно так происходит в рассматриваемой нами задаче.

Мы видели, что в вершинах второго типа выражение Du обращается в бесконечность как

$$\frac{1}{MP^{2-\frac{2}{n}}},$$

а в вершинах третьего типа как

$$\frac{1}{MP^2 \ln^2 MP}.$$

Поэтому интеграл

$$\int |DU| d\omega$$

того же порядка, что и

$$\int |DU| MP d(MP),$$

т. е. что и

$$\int \frac{dMP}{MP^{1-\frac{2}{n}}}, \quad \int \frac{dMP}{MP \ln^2 MP}.$$

Нетрудно проверить, что оба последних интеграла конечны.

Рассмотрим, далее, уравнение

$$DU = \vartheta e^U - \Phi.$$

Предположим, что функция ϑ положительна и никогда не обращается в нуль и, кроме того, функции ϑ и Φ всюду конечны (что, как мы видели, отвечает случаю фуксовых функций первого типа).

Наконец, функцию Φ сначала будем считать положительной и не обращающейся в нуль.

Тогда каждая из функций ϑ и Φ , всюду положительная и не обращающаяся в нуль, достигает минимума ϑ_0 и Φ_0 и максимума ϑ_1 и Φ_1 , причем и минимальное, и максимальное ее значение положительно.

С другой стороны, функция U , будучи конечной, достигает максимума U_1 и минимума U_0 .

В точке максимума

$$DU < 0$$

и, следовательно,

$$\vartheta e^{U_1} - \Phi < 0,$$

поэтому заведомо

$$\vartheta_0 e^{U_1} - \Phi_1 < 0.$$

В точке минимума

$$DU > 0,$$

следовательно,

$$\vartheta e^{U_0} - \Phi > 0$$

и заведомо выполняется неравенство

$$\vartheta_1 e^{U_0} - \Phi_0 > 0.$$

Итак, функция U всегда удовлетворяет неравенствам

$$\ln \Phi_0 - \ln \vartheta_1 < U < \ln \Phi_1 - \ln \vartheta_0. \quad (1)$$

Более точные пределы можно получить, рассматривая отношение Φ/ϑ . Неравенства

$$\vartheta e^{U_1} - \Phi < 0, \quad \vartheta e^{U_0} - \Phi > 0$$

показывают, что величина e^U всегда заключена между максимумом и минимумом Φ/ϑ .

Для получения этого результата существенно, что функция Φ всюду положительна.

Предположим теперь, что Φ не всегда положительна и что можно найти функцию η такую, что сумма

$$\Phi + D\eta$$

будет всюду положительна.

Положив

$$U = V + \eta,$$

получим уравнение

$$DV = \vartheta e^\eta e^V - \Phi - D\eta.$$

Если функции ϑe^η , $\Phi + D\eta$ всюду конечны и положительны, то можно воспользоваться предыдущими результатами и показать, что e^V всегда заключена между максимумом и минимумом отношения

$$\frac{\Phi + D\eta}{\vartheta e^\eta}. \quad (2)$$

Следовательно, если η_0 и η_1 — минимум и максимум функции η , а ζ_0 и ζ_1 — минимум и максимум отношения

$$\frac{\Phi + D\eta}{\vartheta},$$

то

$$\zeta_0 e^{\eta_0 - \eta_1} < e^U < \zeta_1 e^{\eta_1 - \eta_0}. \quad (2)$$

Будут ли справедливы полученные результаты, если ϑ и Φ обращаются в бесконечность? В рассматриваемом нами случае ϑ может обращаться в бесконечность лишь в вершинах второго и третьего типа, а Φ — в вершинах третьего типа.

В обоих случаях выражение

$$e^U - \frac{\Phi}{\vartheta} \quad (3)$$

остаётся конечным и вполне определенным; оно должно быть отрицательным в максимуме (без чего выражение DU не могло бы быть отрицательным в окрестности точки, соответствующей максимуму) и положительным — в минимуме.

Следовательно, если Φ всегда положительна, то e^U будет всегда заключена между максимумом и минимумом отношения Φ/ϑ .

Если же положительна не функция Φ , а сумма $\Phi + D\eta$, то справедливы неравенства (2).

Рассмотрим теперь уравнение

$$DV = \vartheta e^U V - \psi. \quad (4)$$

Пусть V_1 и V_0 — максимум и минимум функции V , тогда

$$\vartheta e^U V_1 - \psi < 0,$$

$$\vartheta e^U V_0 - \psi > 0.$$

Эти неравенства означают, что функция V заключена между максимумом и минимумом отношения

$$\frac{\psi}{\vartheta e^U}.$$

Поскольку произведение ϑe^U существенно положительно и не принимает нулевых значений, полученный результат верен независимо от того, будет ли функция ψ существенно положительной или может изменять знак.

Он остаётся верным и не теряет смысла и тогда, когда ϑ и ψ обращаются в бесконечность, если только отношение ψ/ϑ остаётся конечным.

Я утверждаю, что уравнение (4) не может иметь двух решений. Действительно, если бы оно имело два решения V и V' , то их разность $V - V'$ удовлетворяла бы уравнению

$$D(V - V') = \vartheta e^U (V - V')$$

того же вида, что и уравнение (4), но с функцией ψ , равной нулю. Следовательно, как мы только что видели, верхний и нижний пределы, между ко-

торыми могла бы изменяться разность $V - V'$, также были бы равны нулю, откуда

$$V - V' = 0,$$

что и требовалось доказать.

Уравнение

$$DU = \vartheta e^U - \Phi$$

также имеет единственное решение. Действительно, если бы это уравнение допускало два решения U и $U + V$, то функция V удовлетворяла бы уравнению

$$DV = \vartheta e^U (e^V - 1).$$

Обозначив через V_1 и V_0 максимум и минимум функции V , мы бы получили

$$e^{V_1} \leq 1, \quad e^{V_0} \geq 1,$$

откуда

$$V_1 \leq 0, \quad V_0 \geq 0, \quad V_1 \geq V \geq V_0,$$

и, следовательно,

$$V_1 = V = V_0 = 0,$$

что и требовалось доказать.

VI. Уравнение $Du = \varphi$

Обратимся теперь к интегрированию уравнения

$$Du = \varphi, \tag{1}$$

где u — неизвестная функция, ограниченная и непрерывная вместе со своими производными первого и второго порядка, а функция φ задана. Именно таким уравнением определялась бы конечная температура в каждой точке поверхности, не излучающей тепла во внешнее пространство, но содержащей в каждом своем элементе $d\omega$ источник тепла, выделяющий в единицу времени количество тепла, равное $-\varphi d\omega$.

Для того чтобы задача имела решение, необходимо прежде всего выполнение условия

$$\int \varphi d\omega = 0, \tag{2}$$

где интеграл берется по всей поверхности. Действительно, ранее мы нашли, что

$$\int Du d\omega = 0,$$

и, кроме того, тепловое равновесие, очевидно, возможно лишь тогда, когда *полное* количество тепла, выделяемого поверхностью, равно нулю.

Предположим, что условие (2) выполнено. Для того чтобы решить задачу, введем функцию, аналогичную функции Грина в теории потенциала.

Возьмем алгебраическую кривую

$$f(Z, Z') = 0, \quad (3)$$

обладающую теми же свойствами, что и кривая (2) предыдущих разделов.

Рассмотрим абелев интеграл

$$I = \int R(Z, Z') dZ, \quad (4)$$

в котором R означает рациональную функцию от Z и Z' .

Пусть, далее,

$$\begin{aligned} (Z = Z_0, Z' = Z'_0), \quad (Z = Z_1, Z' = Z'_1), \\ (Z = U_0, Z' = U'_0), \quad (Z = U_1, Z' = U'_1) \end{aligned}$$

— четыре аналитические точки, взятые на кривой (3). Первые две точки (Z_0, Z'_0) и (Z_1, Z'_1) служат нижним и верхним пределом интеграла (4).

Сам интеграл (4) представляет собой абелев интеграл третьего рода, имеющий логарифмические особенности в аналитических точках (U_0, U'_0) , (U_1, U'_1) .

За исключением этих двух точек (U_0, U'_0) и (U_1, U'_1) , функция I всюду голоморфна. В окрестности точки (U_0, U'_0) разность

$$I + \ln(Z_1 - U_0) - \ln(Z_0 - U_0),$$

а в окрестности (U_1, U'_1) разность

$$I - \ln(Z_1 - U_1) + \ln(Z_0 - U_1)$$

голоморфны относительно Z_1 и Z_0 .

Для полного определения интеграла (4) предположим, что вещественные части его $2p$ циклических периодов равны нулю.

Интеграл I не изменяется при перестановке аналитических точек

$$(Z_0, Z'_0), \quad (Z_1, Z'_1)$$

с аналитическими точками

$$(U_0, U'_0), \quad (U_1, U'_1).$$

Этот результат хорошо известен в теории абелевых функций под названием *перестановочности параметра и аргумента*.

Обозначим через M, P, M_1, P_1 точки поверхности Клейна, соответствующие четырем аналитическим точкам

$$(Z_1, Z'_1), \quad (Z_0, Z'_0), \quad (U_1, U'_1), \quad (U_0, U'_0),$$

и через

$$G(M, P; M_1, P_1)$$

вещественную часть интеграла I .

Ясно, что

$$G, \quad G + \ln \left| \frac{Z_1 - U_0}{Z_0 - U_0} \right|, \quad G - \ln \left| \frac{Z_1 - U_1}{Z_0 - U_1} \right|$$

будут гармоническими функциями относительно X и Y (если $Z_1 = X + iY$), первая — всюду, кроме точек U_0 и U_1 , вторая — в окрестности U_0 и третья — в окрестности U_1 .

Заметим, наконец, что в некоторых случаях данное нами определение необходимо изменить. Если одна из четырех наших аналитических точек совпадает с точкой кривой (3), в которой

$$\frac{\partial f}{\partial Z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial Z'} = 0 \quad [5],$$

то функцию Z , играющую основную роль в нашем определении, следует заменить функцией Z' . Точно так же, если одна из четырех аналитических точек совпадает с двойной точкой кривой (3), то вместо Z следует взять

$$Z'' = \frac{P(Z, Z')}{Q(Z, Z')},$$

где P и Q — два многочлена, которые в рассматриваемой двойной точке обращаются в нуль.

Пусть $d\omega$ и $d\omega_1$ — два произвольно взятых элемента поверхности Клейна, M и M_1 — центры тяжести этих элементов, P и P_1 — две произвольные фиксированные точки на поверхности Клейна, φ — любая функция координат точки M_1 .

Рассмотрим интеграл

$$v = \int G(M, P; M_1, P_1) \varphi_1 d\omega_1, \quad (5)$$

взятый по всем элементам $d\omega_1$ поверхности Клейна. Интеграл v есть функция координат точки M .

Я утверждаю, что интеграл v конечен, если конечна функция φ_1 . Действительно, функция G может обращаться в бесконечность лишь в том случае, когда точка M_1 совпадает с M или с P (она обращается в нуль, когда M совпадает с P , или, в силу перестановочности параметра и аргумента, когда M_1 совпадает с P_1). Но в тех случаях, когда M_1 совпадает с M или с P , функция G имеет логарифмическую особенность, вследствие чего наш интеграл остается конечным и определенным.

Для того чтобы мы могли продолжить наши исследования, разобьем поверхность Клейна на две области: шапочку S' , которой принадлежит точка M , и ее дополнение S'' до всей поверхности.

Пусть

$$v = v' + v'',$$

где v' и v'' — интегралы, взятые по S' и S'' .

Предположим, что точка M не совпадает ни с P , ни с P_1 .

Рассмотрим сначала интеграл v'' . Если M_1 не выходит из области S'' , не содержащей точки M , то три расстояния MM_1 , MP , MP_1 остаются конечными. В этом случае функция G так же, как любая из ее производных, имеет конечный верхний предел [6].

Интеграл

$$\int H \varphi_1 d\omega_1,$$

где H — любая из производных функции G , не только конечен, но и *равномерно* сходится. Дифференцируя под знаком интеграла, мы убеждаемся в том, что все производные v'' конечны.

Кроме того,

$$Dv'' = \int DG \varphi_1 d\omega_1 = 0,$$

так как

$$DG = 0.$$

Рассмотрим теперь интеграл v' . Если область S' достаточно мала, то ее можно однозначно отобразить на плоскость Z , и тогда

$$v' = \int G \varphi_1 \frac{d\omega_1}{d\Omega_1} d\Omega_1,$$

где $d\Omega_1$ — площадь элемента плоскости Z , соответствующего элементу $d\omega_1$ поверхности Клейна, а интегрирование производится по всем элементам $d\Omega_1$ той части плоскости Z , которая отвечает области S' .

Но

$$G = \ln |Z_1 - U_1| + H,$$

где H — гармоническая функция от X и Y .

Следовательно,

$$v' = v'_1 + v'_2,$$

$$v'_1 = \int \ln |Z_1 - U_1| \varphi_1 \frac{d\omega_1}{d\Omega_1} d\Omega_1,$$

$$v'_2 = \int H \varphi_1 \frac{d\omega_1}{d\Omega_1} d\Omega_1.$$

Прежде всего ясно, что функцию v'_2 можно дифференцировать под знаком интеграла, и все ее производные конечны. Отсюда получаем соотношение

$$\Delta v'_2 = \int \Delta H \varphi_1 \frac{d\omega_1}{d\Omega_1} d\Omega_1 = 0,$$

из которого в свою очередь следует, что

$$Dv'_2 = 0.$$

Используя свойства логарифмического потенциала, можно показать, что:

1) интеграл v'_1 , так же, как и его производные до K -го порядка включительно, конечны, если конечны функция φ_1 и ее производные до $(K - 1)$ -го порядка;

2) интеграл v'_1 удовлетворяет уравнению

$$\Delta v'_1 = -2\pi\varphi \frac{d\omega}{d\Omega},$$

где φ и $\frac{d\omega}{d\Omega}$ — значения, принимаемые функцией φ_1 и $\frac{d\omega_1}{d\Omega_1}$, когда точка M совпадает с M_1 . Отсюда мы заключаем, что

$$Dv'_1 = -2\pi\varphi.$$

Итак, интеграл v и его K производных конечны; функция φ и ее $K-1$ производных также конечны, и

$$Dv = -2\pi\varphi \quad [?].$$

Мы предполагали, что M не совпадает ни с P , ни с P_1 .

Если же M совпадает с P , то G и v обращаются в нуль.

Нам остается еще показать, что при совпадении точки M с P_1 не возникает никакой особенности. Для этого мы покажем, что интеграл v не зависит от положения точки P_1 .

Возьмем вместо точки P_1 какую-нибудь другую точку P_2 . Тогда интеграл v заменится интегралом

$$\int G(M, P; M_1, P_2) \varphi_1 d\omega_1.$$

Поскольку

$$G(M, P; M_1, P_1) = G(M, P; M_1, P_2) - G(M, P; P_1, P_2),$$

приращение интеграла v , очевидно, равно

$$\int G(M, P; P_1, P_2) \varphi_1 d\omega_1 = G(M, P; P_1, P_2) \int \varphi_1 d\omega_1.$$

Но в силу соотношения (2) это выражение равно нулю. Следовательно, интеграл v не изменяется, что и требовалось доказать.

Итак, решение уравнения (1) дается формулой

$$u = -\frac{1}{2\pi} \int G(M, P; M_1, P_1) \varphi_1 d\omega_1. \quad (6)$$

Решение, определяемое формулой (6), не единственно: к нему, очевидно, можно прибавить произвольную постоянную. Других решений, кроме названных, уравнение (1) не имеет.

Частное решение (6) отличается тем, что в точке P оно обращается в нуль.

Решение (6) удовлетворяет одному неравенству, которое понадобится нам в дальнейшем.

Пусть η — любая существенно положительная функция и η_1 — ее значение в точке M . Положив

$$\varphi = \psi\eta, \quad \varphi_1 = \psi_1\eta_1,$$

получим

$$|u| < (\max |\psi|) \int \frac{|G| \eta_1 d\omega_1}{2\pi}.$$

Интеграл

$$\int \frac{|G| \eta_1 d\omega_1}{2\pi}$$

есть функция точки M . Его подынтегральная функция может обращаться в бесконечность лишь в трех случаях: 1) если точка M совпадает с M_1 ; 2) если функция η_1 обращается в бесконечность; 3) если точка M совпадает с P_1 .

Исключим третий случай, описав вокруг P_1 малую замкнутую кривую так, чтобы точка M осталась вне ее.

При приближении точки M к M_1 функция G обращается в бесконечность как $\ln MM_1$. Предположим, что функция η_1 обращается в некоторых точках A , соответствующих вершинам второго типа, в бесконечность как $M_1 A^{\frac{2-2n}{n}}$. Кроме того, будем считать, что вершин третьего типа нет, а во всех остальных точках функция η_1 конечна.

Тогда интеграл

$$\int \frac{|G| \eta_1 d\omega_1}{2\pi}$$

конечен и даже сходится равномерно. Действительно, в наименее благоприятном случае, когда либо точка M совпадает с точкой A , либо расстояние между M_1 и M становится очень малым, подынтегральная функция обращается в бесконечность как

$$MM_1^{\frac{2-2n}{n}} \ln MM_1$$

и интеграл остается конечным. Обозначив его предельное значение через β' , можно записать неравенство

$$|u| < \beta' (\max |\psi|). \quad (7)$$

Это неравенство верно лишь в том случае, когда точка M лежит вне замкнутой кривой, проведенной вокруг точки P_1 .

Но, как мы уже знаем, функция u не зависит от положения точки P_1 и не изменяется, если P_1 заменить на точку P_2 . Следовательно,

$$|u| < \beta'' (\max |\psi|), \quad (7bis)$$

если точка M лежит вне замкнутого контура, проведенного вокруг точки P_2 .

Обозначив через β наибольшее из двух чисел β' и β'' , получим

$$|u| < \beta (\max |\psi|), \quad (8)$$

независимо от того, где находится точка M .

Полученный результат верен лишь при условии, когда функция η имеет особенности порядка $2 - \frac{2}{n} < 2$.

Таково условие, которому удовлетворяет функция ∂e^U в отсутствие вершин третьего типа.

VII. Уравнение $Du = \eta u - \varphi$

Рассмотрим уравнение

$$Du = \lambda \eta u - \varphi - \lambda \psi. \quad (1)$$

Предположим, что его решение допускает разложение по степеням λ , и запишем это решение в виде

$$u = (u_0 + c_0) + \lambda (u_1 + c_1) + \lambda^2 (u_2 + c_2) + \dots$$

Здесь c_k означают константы, а u_k — функции, обращающиеся в нуль в точке P .

Подставляя разложение в (1), получаем цепочку уравнений:

$$\begin{aligned} Du_0 &= -\varphi, \\ Du_1 &= \eta (u_0 + c_0) - \psi, \\ Du_2 &= \eta (u_1 + c_1), \\ Du_3 &= \eta (u_2 + c_2), \\ &\dots \end{aligned} \quad (2)$$

Решение искомого вида существует, если

$$0 = \int \varphi d\omega = \int [\eta (u_0 + c_0) - \psi] d\omega = \int \eta (u_1 + c_1) d\omega = \dots,$$

что дает нам уравнения

$$\begin{aligned} c_0 \int \eta d\omega &= \int \psi d\omega - \int \eta u_0 d\omega, \\ c_1 \int \eta d\omega &= - \int \eta u_1 d\omega, \\ c_2 \int \eta d\omega &= - \int \eta u_2 d\omega, \\ &\dots \end{aligned} \quad (3)$$

Если эти условия выполнены, то формула (6) предыдущего пункта позволяет вычислить $u_0, u_1, \dots$.

Итак, если

$$\int \varphi d\omega = 0,$$

то из уравнений (2) и (3) мы можем последовательно вычислить $u_0, c_0, u_1, c_1, u_2, c_2, \dots$.

Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ — максимумы модулей $|u_1|, |u_2|, \dots$.

Если функция η_1 существенно положительна, то

$$|c_1| \int \eta d\omega < \int \eta |u_1| d\omega < \gamma_1 \int \eta d\omega,$$

откуда

$$|c_1| < \gamma_1,$$

и, аналогично,

$$|c_2| < \gamma_2, \quad |c_3| < \gamma_3, \dots$$

Из неравенства (8) предыдущего параграфа находим

$$\gamma_2 < \beta (\max |u_1 + c_1|) < 2\beta\gamma_1$$

и

$$\gamma_3 < 2\beta\gamma_2, \quad \gamma_4 < 2\beta\gamma_3, \dots$$

Таким образом, если

$$2\beta\lambda < 1,$$

то ряд

$$\sum \lambda^k \gamma_k$$

сходится, в силу чего ряд

$$\sum \lambda^k (u_k + c_k) \quad (4)$$

сходится равномерно.

Если u — сумма этого ряда, то функция u конечна и непрерывно зависит от координат точки M .

С другой стороны (поскольку ряд сходится равномерно),

$$\int \eta u d\omega = \int \eta (u_0 + c_0) d\omega + \lambda \int \eta (u_1 + c_1) d\omega + \dots = 0.$$

Следовательно, формула (6) предыдущего раздела позволяет нам найти функцию v , удовлетворяющую уравнению

$$Dv = \lambda \eta u - \varphi - \lambda \psi.$$

Я утверждаю, что эта функция v тождественна функции u . В самом деле, пусть

$$\begin{aligned} u &= (u_0 + c_0) + \lambda(u_1 + c_1) + \dots + \lambda^n(u_n + c_n) + R_n, \\ v &= (u_0 + c_0) + \lambda(u_1 + c_1) + \dots + \lambda^{n+1}(u_{n+1} + c_{n+1}) + S_n. \end{aligned}$$

Тогда

$$DS_n = \lambda \eta R_n.$$

Поскольку ряд (4) сходится равномерно, можно записать неравенство

$$|R_n| < K(2\lambda\beta)^n,$$

где K — некоторая надлежащим образом выбранная константа.

Итак,

$$|S_n| < K(2\lambda\beta)^{n+1}.$$

При неограниченном возрастании n величина $(2\lambda\beta)^n$ (а следовательно, $|R_n|$ и $|S_n|$) стремится к нулю. Разность $u - v$ равна

$$u - v = R_n - S_n - \lambda^{n+1}(u_{n+1} + c_{n+1}) < |R_n| + |S_n| + 2\lambda^{n+1}\gamma_{n+1}.$$

Поэтому она также стремится к нулю при возрастании n . Поскольку же эта разность не зависит от n , она просто равна нулю. Итак, $u = v$. Следовательно, u удовлетворяет уравнению

$$Du = \lambda \eta u - \varphi - \lambda \psi,$$

что и требовалось доказать.

При доказательстве мы исходили из предположения, что функции η , φ и ψ конечны и могут обращаться в бесконечность лишь в некоторых точках (соответствующих вершинам второго типа), имея в них *особенности порядка* $2 - \frac{2}{n} < 2$.

В заключение заметим следующее: если в некоторой области на поверхности Клейна функции η , φ и ψ так же, как и все их производные, конечны, то функция u также конечна.

Действительно, пусть $Dv = \vartheta$ — уравнение, решение которого дается формулой (6) предыдущего раздела.

Мы видели, что там, где конечны функция ϑ и ее производные до K -го порядка включительно, конечна и функция v со своими $K+1$ производными.

Воспользуемся этим результатом и применим его к уравнению

$$Du = \lambda \eta u - \lambda \varphi - \lambda \psi.$$

Поскольку функция u конечна, правая часть этого уравнения конечна. Следовательно, функция u и ее производные первого порядка конечны. Но отсюда следует конечность функции u вместе с ее производными второго порядка и т. д., что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что мы, умея интегрировать уравнение

$$Du = \eta u - \varphi, \quad (5)$$

хотим проинтегрировать уравнение

$$Du = (\eta + \lambda \eta') u - \varphi. \quad (6)$$

Обе функции η и η' , по предположению, существенно положительны. Пусть

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots$$

Подставляя в уравнение (6), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} Du_0 &= \eta u_0 - \varphi, \\ Du_1 &= \eta u_1 + \eta' u_0, \\ Du_2 &= \eta u_2 + \eta' u_1, \\ &\dots \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку уравнения (7) имеют вид (5), их можно проинтегрировать и последовательно найти $u_0, u_1, u_2, \dots$

Те же соображения, что и в разделе V, приводят к неравенствам

$$\begin{aligned} |u_0| &< \max \left| \frac{\varphi}{\eta} \right|, \\ |u_1| &< \max \left| \frac{\eta' u_0}{\eta} \right|, \\ |u_2| &< \max \left| \frac{\eta' u_1}{\eta} \right|, \\ &\dots \end{aligned}$$

Обозначив через γ_k максимум модуля $|u_k|$, а через β — максимум $|\eta'/\eta|$, получим

$$\gamma_1 < \beta \gamma_0, \quad \gamma_2 < \beta \gamma_1, \dots$$

Следовательно, если

$$|\lambda \beta| < 1,$$

то ряд

$$u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots \quad (8)$$

сходится равномерно.

Выше мы предполагали, что умеем интегрировать уравнение (5). Это предположение следует уточнить: мы умеем интегрировать уравнение (5) с любой функцией φ , если только отношение $|\varphi/\eta|$ ограничено. Кроме того,

мы предполагали, что отношение $|\eta'/\eta|$ имеет верхний предел (именно его мы и обозначили β).

Пусть теперь u — сумма ряда (8). Эта сумма конечна. Уравнение

$$Dv = \eta v + \lambda \eta' u - \varphi$$

интегрируемо, поскольку отношение

$$\left| \frac{\lambda \eta' u - \varphi}{\eta} \right|$$

ограничено.

Я утверждаю, что интеграл v этого уравнения тождественно совпадает с u .

Действительно, пусть

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \lambda u_1 + \dots + \lambda^n u_n + R_n, \\ v &= u_0 + \lambda u_1 + \dots + \lambda^{n+1} u_{n+1} + S_n, \end{aligned}$$

тогда

$$DS_n = \eta S_n + \lambda \eta' R_n.$$

Но

$$|R_n| < K (\lambda \beta)^n, \quad K — \text{некоторая константа.}$$

Далее, рассуждая так же, как в разделе V, находим

$$|S_n| < \max \left| \frac{\lambda \eta' R_n}{\eta} \right| < K (\lambda \beta)^{n+1}.$$

Таким образом, когда n стремится к бесконечности, разность

$$u - v = R_n - S_n - \lambda^{n+1} u_{n+1}$$

стремится к нулю. Следовательно, она тождественно равна нулю и $u = v$, что и требовалось доказать.

Далее так же, как и раньше, можно было бы доказать, что если в некоторой области функции η , φ и η' конечны вместе со всеми своими производными, то функция u также конечна (вместе со всеми производными).

Рассмотрим теперь уравнение

$$Du = \eta u - \varphi \tag{9}$$

и положим

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p &= 1, \\ \varphi &= \varphi_1 + \lambda_1 \psi_1. \end{aligned}$$

Постоянные λ здесь положительны; функция φ_1 удовлетворяет единственному условию

$$\int \varphi_1 d\omega = 0,$$

а в остальном произвольна.

Задача сводится к последовательному интегрированию системы уравнений

$$\begin{aligned} Du &= \lambda_1 \eta u - \varphi_1 - \lambda_1 \psi_1, \\ Du &= \lambda_1 \eta u + \lambda_2 \eta u - \varphi, \\ Du &= (\lambda_1 + \lambda_2) \eta u + \lambda_3 \eta u - \varphi, \\ &\dots \dots \dots \\ Du &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{p-1}) \eta u + \lambda_p \eta u - \varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

Первое из уравнений (10) имеет вид (1); следовательно, оно интегрируемо, если

$$\lambda_1 < \frac{1}{2\beta},$$

где β — величина, входящая в неравенство (8) предыдущего пункта.

Остальные уравнения (10) имеют вид (6) и тождественно совпадают с уравнением (6), если произвести следующие замены:

во 2-м уравнении $\lambda_1 \eta$ на η , η на η' , λ_2 на λ_1 ;
в 3-м уравнении $(\lambda_1 + \lambda_2) \eta$ на η , η на η' , λ_3 на λ_1 ;
 $\dots \dots \dots$
в p -м уравнении $(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{p-1}) \eta$ на η , η на η' , λ_p на λ_1 .

Таким образом, уравнения (10) также допускают *последовательное* интегрирование, если

$$\lambda_2 < \frac{1}{\max \frac{\eta}{\lambda_1 \eta}}, \quad \lambda_3 < \frac{1}{\max \frac{\eta}{(\lambda_2 + \lambda_3) \eta}}, \dots,$$

или

$$\lambda_2 < \lambda_1, \quad \lambda_3 < \lambda_1 + \lambda_2, \quad \dots, \quad \lambda_p < \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{p-1}.$$

Но этим условиям и соотношениям

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = 1, \quad \lambda_1 < \frac{1}{2\beta}$$

всегда можно удовлетворить, выбрав p достаточно большим.

Итак, уравнения (9) интегрируемы, если:

- 1) отношение $|\varphi/\eta|$ ограничено;
- 2) функция η положительна и нигде не обращается в нуль;
- 3) функция η всюду конечна, за исключением нескольких точек (соответствующих вершинам второго типа), в которых она имеет особенность порядка $2 - \frac{2}{n} < 2$.

Интеграл u всюду конечен и непрерывен.

Если в некоторой области данные функции η и φ конечны вместе со всеми своими производными, то интеграл u также конечен и имеет конечные производные всех порядков.

VIII. Обобщение полученных результатов на случай вершин третьего типа

Полученные только что результаты применимы лишь при условии, если функция η обращается в бесконечность только в ограниченном числе точек и имеет в них только особенности порядка $2 - \frac{2}{n} < 2$.

Функция ∂e^U удовлетворяет этому условию, если вершины третьего типа отсутствуют. В вершинах третьего типа функция ∂e^U имеет такую же особенность, какую функция

$$\frac{1}{x^2 \ln^2 x}$$

имеет при $x=0$.

Поэтому нам необходимо исследовать, что происходит в тех точках (вершинах третьего типа), где функция η обращается в бесконечность, причем так, что произведение

$$\eta \overline{MK}^2 \ln^2 \overline{MK}$$

стремится к конечному и вполне определенному пределу, когда точка M неограниченно приближается к вершине K третьего типа.

В этом случае рассмотренный в конце раздела V интеграл

$$\int \frac{|G| \eta_1 d\omega_1}{2\pi}$$

не останется конечным при совпадении точки M с K , следовательно, мы не можем указать его верхний предел и не можем записать неравенство (8) из раздела VI.

Обратившись к уравнениям (1), (2) и (3) из раздела VII, мы еще можем построить функции $u_0, u_1, u_2, \dots$, но не вправе ни записать неравенство

$$\gamma_3 < 2^\beta \gamma_2, \quad \gamma_4 < 2^\beta \gamma_3, \dots,$$

ни, следовательно, утверждать, что ряд

$$S = \sum \lambda^k (u_k + c_k)$$

сходится.

Кроме того, нетрудно видеть, что

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

в вершинах третьего типа K обращаются в бесконечность как

$$\ln \ln MK, \quad \ln^2 \ln MK, \quad \ln^3 \ln MK, \dots$$

Тем не менее позже мы покажем, что ряд S сходится во всех точках поверхности Клейна, за исключением вершин третьего типа, и что сумма этого ряда стремится к конечному и вполне определенному пределу, когда точка M приближается к одной из таких вершин.

Пользуясь более кратким, но менее точным языком, можно было бы сказать, что в вершинах третьего типа сумма ряда S конечна, хотя каждый его член обращается в бесконечность.

Простой пример позволит лучше понять мою мысль.

Пусть λ — некоторое положительное число. Рассмотрим функцию x^λ . Разложив ее по степеням λ , получим

$$x^\lambda = 1 + \frac{\lambda \ln x}{1} + \frac{\lambda^2 \ln^2 x}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{\lambda^n \ln^n x}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} + \dots$$

При $x=0$ каждый член этого ряда обращается в бесконечность, но сумма ряда x^λ остается конечной.

Следовательно, интегрирование уравнения (1) из раздела VII возможно. Однако при попытке доказать все утверждения, сделанные в разделе VII, мы все же столкнемся с известными трудностями. Аналогичные трудности (не преодоленные и поныне) возникают в методе Пикара и во всех методах последовательных приближений.

Для того чтобы преодолеть их в нашем случае, разобьем задачу на ряд этапов.

Пусть сначала имеется лишь одна вершина третьего типа, которую мы обозначим K . Требуется проинтегрировать уравнение

$$Du = \zeta \varphi. \quad (1)$$

В этом уравнении ζ и φ — данные функции, причем φ всюду конечна. Что же касается функции ζ , то она существенно положительна и конечна всюду, за исключением точки K , в которой она обращается в бесконечность как

$$\frac{1}{MK^2 \ln^3 MK},$$

вершин второго типа (если таковые имеются), в которых она имеет такие же особенности, как функция η , и точки P_1 , в которой она обращается в бесконечность как $\ln MP_1$.

Решение уравнения (1) зададим формулой

$$u = \int \zeta_1 \varphi_1 G(M, K; M_1 P_1) d\omega_1,$$

аналогичной формуле (6) из раздела VI.

Доказательство ее проводится так же, как в разделе VI, и повторять его здесь еще раз излишне.

Следует заметить, что условие

$$\int \zeta \varphi d\omega = 0$$

на этот раз не является необходимым, поскольку функция u при $M = P_1$ может обращаться в бесконечность.

Очевидно, справедливо неравенство

$$|u| < \gamma \int \zeta_1 |G(M, K; M_1, P_1)| d\omega_1.$$

Рассмотрим интеграл

$$\int \zeta_1 |G(M, K; M_1, P_1)| d\omega_1.$$

Он представляет собой функцию координат точки M и может иметь особенности лишь в том случае, когда точка M совпадает с K или с P_1 .

Что происходит, когда точка M подходит на достаточно близкое расстояние к точке K ? Опишем вокруг K малую замкнутую кривую, разделив тем самым поверхность Клейна на две части.

Рассмотрим сначала область S , лежащую вне проведенной нами замкнутой кривой; соответствующая ей часть интеграла будет очень малой величиной порядка MK .

Рассмотрим теперь область S' , лежащую внутри нашей замкнутой кривой. Если обе точки M и M_1 принадлежат рассматриваемой области, то функция G по порядку величины сравнима с

$$\ln \frac{MM_1 \cdot KP_1}{MP_1 \cdot KM_1}$$

или с

$$\ln \frac{MM_1}{KM_1}.$$

Следовательно, можно найти величину β , такую, что

$$\zeta_1 < \beta' \frac{1}{KM_1^2 |\ln^3 KM_1|},$$

$$d\omega_1 < \beta'' KM_1 d(KM_1) d\varepsilon,$$

где ε — угол между KM_1 и KM .

Если для краткости обозначить

$$KM_1 = \rho, \quad KM = r, \\ MM_1 = \delta = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varepsilon}, \quad b = \beta\beta'\beta'',$$

то наш интеграл будет меньше, чем

$$b \int \left| \ln \frac{\delta}{\rho} \right| \frac{d\rho d\varepsilon}{\rho |\ln^3 \rho|}.$$

Предположим, что проведенная нами замкнутая кривая определяется уравнением

$$\rho = R,$$

т. е. представляет собой пересечение поверхности Клейна со сферой радиуса R и центром в точке K .

Рассматриваемый интеграл берется в пределах от 0 до 2π по ε и от 0 до R — по ρ . Если ρ и ε рассматривать как полярные координаты точки на плоскости (будем по-прежнему обозначать эту точку M_1), то интеграл берется по кругу радиуса 1 (центр круга обозначим прежней буквой K).

Величины r и 0 будем рассматривать как полярные координаты другой точки (назовем ее по-прежнему точкой M). Расстояние MM_1 между указанными двумя точками на нашей вспомогательной плоскости будет равно δ (расстоянию между точками M и M_1 на поверхности Клейна).

Площадь нашего единичного круга разобьем на две части: на область, где

$$\delta > \rho, \quad MM_1 > KM_1, \quad \left| \ln \frac{MM_1}{KM_1} \right| = \ln \frac{MM_1}{KM_1},$$

и другую область, где

$$\delta < \rho, \quad MM_1 < KM_1, \quad \left| \ln \frac{MM_1}{KM_1} \right| = \ln \frac{KM_1}{MM_1}.$$

Эти две области разделяет прямая π , проходящая через середину отрезка MK перпендикулярно к последнему.

Интеграл, взятый по первой области, больше интеграла, взятого по второй области, по двум причинам.

Во-первых, сама область интегрирования в первом случае больше; во-вторых, рассмотрев две точки M_1 , расположенные симметрично друг другу относительно прямой π и лежащие одна — в первой области, а другая — во второй, мы обнаружим, что значение

$$\frac{1}{\rho \ln^3 \rho}$$

в первой точке больше, чем во второй, в то время как

$$\left| \ln \frac{\delta}{\rho} \right|$$

в обеих точках принимает одинаковые значения.

Следовательно, наш интеграл меньше

$$2b \int \left| \ln \frac{\delta}{\rho} \right| \frac{d\rho d\varepsilon}{\rho |\ln^3 \rho|},$$

где интегрирование производится только по первой области. Но в этой области

$$\left| \ln \frac{\delta}{\rho} \right| = \ln \frac{\delta}{\rho} = \ln \frac{MM_1}{KM_1} < \ln \frac{KM_1 + MK}{KM_1} = \ln \left(1 + \frac{MK}{KM_1} \right) = \ln \left(1 + \frac{r}{\rho} \right).$$

Следовательно, наш интеграл меньше

$$2b \int \ln \left(1 + \frac{r}{\rho} \right) \frac{d\rho d\varepsilon}{\rho |\ln^3 \rho|}$$

и заведомо меньше того же интеграла, взятого по всему кругу радиуса R , т. е.

$$4\pi b \int_0^R \ln \left(1 + \frac{r}{\rho} \right) \frac{d\rho}{\rho |\ln^3 \rho|}.$$

Разобьем наш интеграл следующим образом:

$$\int_0^R = \int_0^r + \int_r^{R_0} + \int_{R_0}^R.$$

Символом R_0 здесь обозначена величина, которую позднее мы определим более точно. Пока же она должна удовлетворять неравенству $R_0 > r$.

Рассмотрим сначала третий интеграл, взятый от R_0 до R .

В этих пределах

$$\ln \left(1 + \frac{r}{\rho} \right) < \frac{r}{\rho}$$

и, следовательно, рассматриваемый интеграл меньше

$$r \int \frac{d\rho}{\rho^2 |\ln^3 \rho|} < r \int \frac{d\rho}{\rho^2} < \frac{r}{R_0}.$$

Рассмотрим теперь второй интеграл, взятый от r до R_0 . В этих пределах

$$r < \rho, \quad \ln \left(1 + \frac{r}{\rho} \right) < \ln 2,$$

в силу чего и второй интеграл меньше

$$\ln 2 \cdot \int \frac{d\rho}{\rho |\ln^3 \rho|} = \frac{\ln 2}{2} \left(\frac{1}{\ln^2 R_0} - \frac{1}{\ln^2 r} \right) < \frac{\ln 2}{2 \ln^2 R_0}.$$

Обратимся, наконец, к первому интегралу, взятому от 0 до r . В этих пределах

$$\rho < r; \quad \ln \left(1 + \frac{r}{\rho} \right) = \ln \left(1 + \frac{\rho}{r} \right) + \ln \frac{r}{\rho} < \ln 2 + \ln \frac{r}{\rho},$$

и, следовательно, интеграл меньше

$$\ln 2 \cdot \int \frac{d\rho}{\rho |\ln^3 \rho|} + \int \ln \frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{\rho |\ln^3 \rho|} = \frac{\ln 2}{\ln^2 r} + \frac{1}{2 |\ln r|}.$$

Таким образом, весь интеграл меньше

$$4\pi b \frac{r}{R_0} + 2\pi b \ln 2 \frac{1}{\ln^2 R_0} + \frac{4\pi b \ln 2}{\ln^2 r} + \frac{2\pi b}{|\ln r|}$$

при любом значении R_0 . Например, выбирая $R_0 = \sqrt{r}$, мы найдем, что наш интеграл есть величина порядка

$$\frac{1}{|\ln r|} = \frac{1}{|\ln MK|}.$$

Предположим теперь, что точка M принадлежит очень малой окрестности точки P .

В этом случае можно найти положительную величину H , такую, что

$$|G| < |\ln MM_1| + |\ln MP_1| + \ln |KM_1| + H.$$

Действительно, если одно из расстояний MM_1 , MP_1 , KM_1 очень мало (например, MM_1), то функция G равна $\pm \ln MM_1 +$ некоторая конечная величина.

Случай, когда малы два из этих расстояний, например MP_1 и KM_1 , сводится к предыдущему, если ввести вспомогательную точку K' и записать

$$G(M, K; M_1, P_1) = G(M, K'; M_1, P_1) + G(K', K; M_1, P_1).$$

В каждую из функций G в правой части равенства входит лишь одно из малых расстояний.

Итак, интегралы

$$\int H \zeta_1 d\omega_1, \quad \int |\ln MM_1| \zeta_1 d\omega_1, \quad \int \ln |KM_1| \zeta_1 d\omega_1$$

конечны, а интегралы

$$\int |\ln MP_1| \zeta_1 d\omega_1 = |\ln MP_1| \int \zeta_1 d\omega_1$$

имеют порядок $|\ln MP_1|$.

Отсюда следует, что интеграл

$$\int |G| \zeta_1 d\omega_1$$

конечен всюду, за исключением окрестности точки K , где он имеет порядок $1/|\ln MK|$, и окрестности точки P_1 , где он имеет порядок $|\ln MP_1|$.

Это означает, что существует величина b' , такая, что

$$\int |G| \zeta_1 d\omega_1 < b' \left| \frac{\ln MP_1}{\ln MK} \right|$$

и, следовательно,

$$|u| < \alpha \gamma b' \left| \frac{\ln MP_1}{\ln MK} \right|. \quad (3)$$

Положив

$$\eta u = \zeta \varphi'$$

и заметив, что найдется величина ε , для которой

$$\frac{\eta}{\zeta} < \varepsilon \left| \frac{\ln MK}{\ln MP_1} \right|,$$

получим

$$|\varphi'| < \alpha\gamma \quad (\alpha = b'\varepsilon). \quad (4)$$

Следовательно, если γ' — максимум модуля $|\varphi'|$, то всегда можно найти величину α , зависящую лишь от точек K и P_1 , и такую, что

$$\gamma' < \alpha\gamma. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$Du = \lambda\eta u + \varphi \quad (6)$$

и попытаемся найти решение u этого уравнения, которое равно нулю в точке K и может обращаться в точке P_1 в бесконечность как $\ln MP_1$.

Разложим искомое решение по степеням λ :

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots \quad (7)$$

Вводя последовательность функций $\varphi_0, \varphi_1, \dots$, получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \zeta\varphi_0 &= \varphi; & Du_0 &= \zeta\varphi_0; \\ \zeta\varphi_1 &= \eta u_0; & Du_1 &= \zeta\varphi_1; \\ \zeta\varphi_2 &= \eta u_1; & Du_2 &= \zeta\varphi_2; \\ &\dots & & \end{aligned}$$

Их можно интегрировать так же, как уравнение (1).

Если модуль $|\varphi_0|$ ограничен и γ_0 — его максимум, а γ_k — максимум $|\varphi_k|$, то в силу неравенств (5) и (3) имеем

$$\gamma_k < \alpha\gamma_{k-1} < \alpha^k\gamma_0; \quad |u_k| < \beta\delta\gamma_k MK |\ln MP_1|.$$

Следовательно, ряд (7) сходится, если

$$\lambda\alpha < 1,$$

и доставляет решение уравнения (6).

Если бы имели место равенства

$$\int \zeta\varphi_0 d\omega = \int \zeta\varphi_1 d\omega = \dots = \int \zeta\varphi_k d\omega = \dots = 0,$$

то, как показано в разделе VI, функции $u_0, u_1, \dots$ не зависели бы от положения точки P_1 и можно было бы утверждать, что эти функции, а следовательно, и функция u , остаются конечными даже в точке P_1 . Именно таким был ход рассуждений в конце раздела VI.

Рассмотрим теперь уравнение

$$Du = \lambda \eta u + \varphi + \mu \psi, \quad (8)$$

где φ и ψ — две заданные функции, μ — неопределенная постоянная, которую мы будем считать разложенной по степеням λ :

$$\mu = \mu_0 + \lambda \mu_1 + \lambda^2 \mu_2 + \dots$$

Требуется найти u и μ так, чтобы функция u была всюду конечна и в точке K обращалась в нуль.

Предположим, что интеграл $\int \psi d\omega$ отличен от нуля.

Мы получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \int \varphi d\omega + \mu_0 \int \psi d\omega &= 0; & \zeta \varphi_0 &= \varphi + \mu_0 \psi; & Du_0 &= \zeta \varphi_0; \\ \int \eta u_0 d\omega + \mu_1 \int \psi d\omega &= 0; & \zeta \varphi_1 &= \eta u_0 + \mu_1 \psi; & Du_1 &= \zeta \varphi_1; \\ \int \eta u_1 d\omega + \mu_2 \int \psi d\omega &= 0; & \zeta \varphi_2 &= \eta u_1 + \mu_2 \psi; & Du_2 &= \zeta \varphi_2; \\ & \dots & & & & \end{aligned}$$

которые интегрируются так же, как уравнение (1), и сохраняют все его свойства. Однако в силу соотношения

$$\int \zeta \varphi_k d\omega = 0$$

функция u_k не зависит от положения точки P_1 , вследствие чего при надлежащем выборе постоянной b' неравенство (2) можно заменить неравенством

$$|u_k| < \frac{b' \gamma_k}{|\ln MK|},$$

позволяющим утверждать, что

$$\left| \int \eta u_k d\omega \right| < \varepsilon' \gamma_k,$$

где ε' — некоторая новая постоянная, и, наконец,

$$|\mu_{k+1}| < \varepsilon'' \gamma_k$$

(если $\varepsilon'/\varepsilon''$ означает модуль интеграла $\left| \int \psi d\omega \right|$).

Если α' — величина, которая больше максимума $|\psi/\zeta|$, то

$$\zeta \varphi_k = \eta u_{k-1} + \mu_k \psi$$

и мы можем найти другую величину α , зависящую лишь от точки K , и такую, что

$$\frac{\eta}{\zeta} = \alpha |\ln MK|.$$

Тогда

$$\gamma_k < (\alpha + \alpha' \varepsilon'') \gamma_{k-1}$$

и ряд (7) сходится при условии, если

$$\lambda (\alpha + \alpha' \varepsilon'') < 1,$$

что и требовалось доказать.

Сформулируем полученный результат.

Если отношения

$$\frac{\varphi}{\zeta}, \quad \frac{\psi}{\zeta}$$

ограничены, то всегда можно найти функцию u , которая удовлетворяет уравнению (8), принимает в точке K нулевое значение и нигде не обращается в бесконечность.

Определим функцию v следующим образом.

Опишем вокруг K достаточно малую замкнутую кривую. Пусть A — значение, принимаемое Z в вершине K третьего типа.

Функция v внутри проведенной кривой равна $\ln \left| \frac{1}{Z - A} \right|$, не обращается ни в нуль, ни в бесконечность вне ее и всюду, за исключением точки K , конечна вместе с первыми тремя производными.

Пусть h — любой постоянный показатель. Тогда внутри нашей замкнутой кривой

$$Dv^h = \Delta v^h \frac{d\Omega}{d\omega}, \quad \Delta v^h = \frac{h(h-1)}{|Z - A|^2} \ln^{h-2} \left| \frac{1}{Z - A} \right|.$$

Относительно функции η сделаем сначала специальное предположение и будем считать, что внутри нашей замкнутой кривой η равна

$$\frac{1}{|Z - A|^2 \ln^2 \left| \frac{1}{Z - A} \right|} \frac{d\Omega}{d\omega}.$$

Функцию η , удовлетворяющую этому условию, обозначим η_0 .

Тогда внутри замкнутой кривой

$$Dv^h = \lambda \eta_0 v^h,$$

где

$$\lambda = h(h-1).$$

Следовательно, можно записать уравнение

$$Dv^h = \lambda \eta_0 v^h + \psi,$$

где функция ψ равна нулю внутри замкнутой кривой и конечна всюду вне ее, за исключением вершин третьего типа, где конечным остается отношение ψ/η_0 и, следовательно, отношение $|\psi/\zeta|$.

Итак, предположим, что имеется уравнение

$$Du = \lambda' \eta_0 u + \varphi + \mu \psi, \quad (8bis)$$

где отношение $|\varphi/\zeta|$ ограничено, а ψ — только что определенная нами функция.

В этом уравнении μ — неопределенная постоянная, так что уравнение (8bis) имеет такой же вид, как и уравнение (8). Однако тут мы должны сделать несколько замечаний.

1. Интеграл $\int \psi d\omega$ не может быть нулем; действительно,

$$\int \psi d\omega = -\lambda \int \eta_0 v^h d\omega,$$

а функции η_0 и v существенно положительны.

2. Функция ψ зависит от λ и даже допускает разложение по степеням λ . В самом деле, нетрудно проверить, что

$$Dv^h = hv^{h-1}Dv + h(h-1)v^{h-2}E(v, v).$$

Величина h , очевидно, допускает разложение по степеням λ . Отсюда следует, что и v^h допускает разложение по степеням λ внутри нашей замкнутой кривой, поскольку в указанной области v не обращается ни в нуль, ни в бесконечность. Но это означает, что внутри замкнутой кривой Dv^h также допускает разложение по степеням λ .

Функция ψ , равная нулю внутри замкнутой кривой, и

$$\psi = Dv^h - \lambda \eta_0 v^h$$

— вне ее, допускает разложение по степеням λ .

Итак, решение u уравнения (8bis), обращающееся в нуль в точке K , существует, если

$$\lambda'(\alpha + \alpha'\varepsilon'') < 1.$$

В этом неравенстве α зависит лишь от положения точки K и, следовательно, не зависит от λ . То же можно утверждать и о величине ε' , определение которой было дано выше, однако аналогичные утверждения относительно α' и $\varepsilon'/\varepsilon''$ были бы неверны.

В самом деле, величина α' должна быть больше максимума $|\psi/\zeta|$, а отношение $\varepsilon'/\varepsilon''$ равно $\left| \int \psi d\omega \right|$. Но

$$\psi = hv^{h-1}Dv + h(h-1)v^{h-2}E(v, v) - \lambda \eta_0 v^h.$$

Внутри замкнутой кривой функция ψ равна нулю, вне замкнутой кривой отношение η_0/ζ ограничено.

Далее, мы обозначили через λ величину $h(h-1)$:

$$\lambda = h(h-1).$$

Если это соотношение рассматривать как уравнение, определяющее h , то оно будет иметь два корня: один отрицательный и один положительный (поскольку λ , по предположению, положительна).

Выберем отрицательный корень, этот корень по модулю меньше λ .

Если ν_0 — наименьшее значение, принимаемое функцией ν вне замкнутой кривой, то найдется константа A , такая, что

$$\left| \frac{\psi}{\xi} \right| < A\lambda\nu_0^h.$$

Из рассмотрения равенства

$$\int \psi d\omega = -\lambda \int \eta_0 \nu^h d\omega$$

ясно, что это выражение по модулю больше интеграла

$$\lambda \int \eta_0 \nu^h d\omega,$$

если последний интеграл брать не по всей поверхности Клейна, а лишь по той ее части, которая лежит внутри проведенного нами замкнутого контура, поскольку элементы отброшенного интеграла существенно положительны.

Если ν_1 — наибольшее значение функции ν вне замкнутой кривой, то, поскольку h отрицательно,

$$\nu^h > \nu_1^h$$

и, следовательно,

$$\lambda \int \eta_0 \nu^h d\omega > \lambda \nu_1^h \int \eta_0 d\omega, \quad \text{или} \quad \left| \int \psi d\omega \right| > B\lambda \nu_1^h,$$

где B — некоторая постоянная.

Условие, которому должно удовлетворять отношение $\alpha'\epsilon''/\epsilon'$, имеет вид неравенства:

$$\frac{\alpha'\epsilon''}{\epsilon'} > \frac{A}{B} \left(\frac{\nu_0}{\nu_1} \right)^h.$$

Если это условие выполнено, то

$$\alpha' > \max \left| \frac{\psi}{\xi} \right|.$$

Предположим, что

$$\lambda < \lambda_0,$$

где λ_0 — некоторая константа, а

$$\frac{\alpha'\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{A}{B} \left(\frac{\nu_0}{\nu_1} \right)^{h_0},$$

где h_0 — значение h , соответствующее λ_0 , т. е.

$$\lambda_0 = h_0(h_0 - 1).$$

Тогда условие, наложенное на $\alpha'\varepsilon''/\varepsilon'$, будет заведомо выполнено, и *указанная величина не будет зависеть от λ* .

Далее, уравнение (8bis) имеет решение лишь в том случае, когда

$$\lambda'(\alpha + \alpha'\varepsilon'') < 1.$$

Предположим, что условия

$$\lambda < \lambda_0, \quad \lambda(\alpha + \alpha'\varepsilon'') < 1, \quad \lambda = \lambda'$$

выполняются одновременно. Пусть u' — решение уравнения (8bis). Положив $\lambda = \lambda'$, получим

$$Du' = \lambda\eta_0 u' + \varphi + \mu\psi,$$

значение μ здесь конечно.

Кроме того,

$$Dv^h = \lambda\eta_0 v^h + \psi.$$

Следовательно, если

$$u = u' - \mu v^h,$$

то

$$Du = \lambda\eta_0 u + \varphi. \quad (9)$$

Решение u обращается в точке K не в бесконечность, а в нуль, поскольку и u' , и v^h (показатель степени h отрицателен) принимают в этой точке нулевые значения.

Итак, уравнение (9) имеет решение, если величина $|\varphi/\zeta|$ ограничена.

Относительно функции η мы предполагали (и это — весьма ограничительное предположение), что она совпадает с η_0 . Рассмотрим теперь более общее уравнение

$$Du = \eta u + \varphi. \quad (10)$$

Я утверждаю, что оно также интегрируемо.

Действительно, пусть

$$\eta = \lambda\eta_0 + \eta',$$

где значение λ выбрано достаточно малым для того, чтобы выполнялись неравенства

$$\lambda < \lambda_0, \quad \lambda\alpha < 1$$

и, следовательно, можно было интегрировать уравнение (9). Запишем уравнение

$$Du = (\lambda\eta_0 + \mu\eta')u + \varphi. \quad (11)$$

Это уравнение аналогично уравнению (6) предыдущего раздела, поскольку само уравнение (9) аналогично уравнению (5) из того же раздела.

Действительно, отношение $\eta'/\lambda\eta_0$ ограничено. Следовательно, как показано в том же предыдущем разделе, уравнение (11) при достаточно ма-

лом μ имеет решение. Повторяя рассуждения, проводившиеся в конце того же раздела относительно уравнения (9), можно показать, что уравнение (11) имеет решение при любом значении μ , в частности при $\mu=1$.

Это и означает, что уравнение (10) интегрируемо.

Коль скоро теорема для случая, когда имеется только одна вершина третьего типа, доказана, методом Пикара ее нетрудно обобщить на случай любого числа вершин третьего типа. Однако я предпочитаю более прямой путь к получению результата и воспользуюсь для этого методом, лишь незначительно отличающимся от того, который применялся при рассмотрении указанного выше частного случая. Я охотно воспользовался бы предыдущим методом еще раз, если бы не опасался повторений.

Итак, предположим, что имеются две вершины третьего типа K и K_1 .

Функция η существенно положительна и обращается в бесконечность лишь в вершинах второго и третьего типа. В вершинах второго типа она имеет особенности порядка $2 - \frac{2}{n}$. В точке K функция η имеет особенность вида

$$\frac{1}{MK^2 \ln^2 MK}$$

и, кроме того, допускает разложение по степеням MK и $\left| \frac{1}{\ln MK} \right|$. То же можно сказать и о поведении η в точке K_1 .

Функция ζ всюду положительна, а отношение

$$\frac{\zeta |\ln MK \ln MK_1|}{\eta}$$

ограничено, так что, например, в окрестности точки K функция ζ будет величиной порядка

$$\frac{1}{MK^2 \ln^3 MK}.$$

Далее, так же, как и раньше, можно было бы показать, что найдется константа b' , такая, что

$$\int \zeta_1 d\omega_1 |G(M, K; M_1, P_1)| < b' \left| \frac{\ln MP_1}{\ln MK} \right|,$$

$$\int \zeta_1 d\omega_1 |G(M, K_1; M_1, P_1)| < b' \left| \frac{\ln MP_1}{\ln MK_1} \right|.$$

Пусть φ — функция, удовлетворяющая условиям

$$\int \zeta \varphi d\omega = 0; \quad \int \varphi_1 \zeta_1 G(K_1, K; M_1, P_1) d\omega_1 = 0 \quad (|\varphi| < \gamma), \quad (12)$$

а

$$u = \int \varphi_1 \zeta_1 G(M, K; M_1, P_1) d\omega_1.$$

В силу соотношений (12)

$$u = \int \varphi_1 \zeta_1 G(M, K; M_1, P_1) d\omega_1 = \int \varphi_1 \zeta_1 G(M, K; M_1, P_2) d\omega_1 = \\ = \int \varphi_1 \zeta_1 G(M, K_1; M_1, P_1) d\omega_2,$$

где P_2 — другая произвольная точка на поверхности Клейна. Следовательно, найдется постоянная b' , такая, что одновременно будут выполняться неравенства

$$|u| < b' \gamma \left| \frac{\ln MP_1}{\ln MK} \right|; \quad |u| < b' \gamma \left| \frac{\ln MP_1}{\ln MK_1} \right|; \\ |u| < b' \gamma \left| \frac{\ln MP_2}{\ln MK} \right|; \quad |u| < b' \gamma \left| \frac{\ln MP_2}{\ln MK} \right|.$$

Иначе говоря, функция u конечна в окрестности точек P_1 и P_2 и представляет собой бесконечно малую порядка $1/|\ln MK|$ и $1/|\ln MK_1|$ в окрестности точек K и K_1 . При надлежащем выборе постоянной b'' получим

$$|u| < \frac{b'' \gamma}{|\ln MK \ln MK_1|}.$$

Положим

$$\eta u = \zeta \varphi'.$$

Пусть γ' — максимум модуля $|\varphi'|$, а α/b'' — максимум величины $\frac{\eta}{\zeta |\ln MK \ln MK_1|}$.

Тогда

$$\gamma' < \alpha \gamma. \quad (13)$$

Это неравенство аналогично неравенству (5).

Рассмотрим теперь уравнение

$$Du = \lambda \eta u + \varphi + \mu \psi + \mu' \psi', \quad (14)$$

где φ , ψ , ψ' — заданные функции, а μ и μ' — произвольные постоянные.

Существует ли такое решение u этого уравнения, которое бы всегда было конечным?

Предположим, что:

- 1) отношения φ/ζ , ψ/ζ , ψ'/ζ ограничены;
- 2) интегралы

$$\int \psi' d\omega, \quad \int \psi_1 G(K, K_1; M_1, P_1) d\omega$$

отличны от нуля (в дальнейшем функцию $G(K, K_1; M_1, P_1)$ будем обозначать для краткости g);

3)

$$\int \psi d\omega = \int \varphi d\omega = 0.$$

Пусть u , μ и μ' допускают разложение по степеням λ :

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \dots, \quad \mu = \mu_0 + \lambda \mu_1 + \dots, \quad \mu' = \mu'_0 + \lambda \mu'_1 + \dots$$

Тогда мы получим следующую систему уравнений:

$$\mu'_0 = 0, \quad \int \varphi_1 g d\omega_1 + \mu_0 \int \psi_1 g d\omega_1 = 0,$$

$$\varphi + \mu_0 \psi = \zeta \varphi_0, \quad Du_0 = \zeta \varphi_0,$$

$$\int \eta u_0 d\omega + \mu'_1 \int \psi' d\omega = 0, \quad \eta u_0 + \mu'_1 \psi' = \varphi',$$

$$\int \varphi'_1 g d\omega_1 + \mu_1 \int \psi_1 g d\omega_1 = 0,$$

$$\eta u_0 + \mu_1 \psi + \mu'_1 \psi' = \zeta \varphi'_0, \quad Du_1 = \zeta \varphi'_0,$$

$$\int \eta u_1 d\omega + \mu'_2 \int \psi' d\omega = 0, \quad \eta u_1 + \mu'_2 \psi' = \varphi'',$$

$$\int \varphi''_1 g d\omega_1 + \mu_2 \int \psi_1 g d\omega_1 = 0,$$

$$\eta u_1 + \mu_2 \psi + \mu'_2 \psi' = \zeta \varphi''_0, \quad Du_2 = \zeta \varphi''_0,$$

$$\dots \dots \dots$$

где ψ_1 , φ'_1 , φ''_1 , ... — значения, которые принимают функции ψ , φ' , φ'' , ..., когда точка M совпадает с M_1 .

Разумеется, φ_0 , φ'_0 , ... не имеют никакого отношения ни к φ_1 , φ'_1 , φ''_1 , ..., ни к φ , φ' , φ'' , ...

Пусть γ_0 , γ_1 , γ_2 , ... — максимумы φ_0 , φ'_0 , φ''_0 , ... Тогда

$$|u_0| < \frac{b'' \gamma_0}{|\ln MK \ln MK_1|},$$

откуда мы заключаем, что найдется постоянная c , такая, что

$$\left| \int \eta u_0 d\omega \right| < c \gamma_0.$$

Поскольку интеграл $\int \psi' d\omega$ представляет собой константу, отличную от нуля, можно найти постоянную c' , такую, что

$$\mu'_1 < c' \gamma_0.$$

Следовательно, если β и β' — максимумы величин

$$\frac{\eta b''}{\zeta |\ln MK \ln MK_1|} \text{ и } \left| \frac{\psi'}{\zeta} \right|,$$

то

$$\left| \frac{\varphi'}{\zeta} \right| < (\beta + c'\beta') \gamma_0.$$

Но интеграл $h = \int \zeta_1 g d\omega_1$ есть конечная константа, а интеграл $h' = \int \psi_1 g d\omega_1$ — константа, отличная от нуля, в силу чего

$$\left| \int \varphi'_1 g d\omega_1 \right| < (\beta + c'\beta') h \gamma_0$$

и

$$|\mu_1| < (\beta + c'\beta') \frac{h}{h'} \gamma_0.$$

Но

$$\varphi'_0 = \frac{\eta u_0}{\zeta} + \mu_1 \left| \frac{\psi}{\zeta} \right| + \mu'_1 \left| \frac{\psi'}{\zeta} \right|$$

и, если β'' — максимум отношения $|\psi/\zeta|$, то

$$|\varphi'_0| < \left[\beta + (\beta + c'\beta') \frac{h\beta''}{h'} + c'\beta' \right] \gamma_0.$$

Полагая

$$\alpha = (\beta + c'\beta') \left(1 + \frac{h\beta''}{h'} \right),$$

$$\gamma_1 < \alpha \gamma_0,$$

находим

$$\gamma_2 < \alpha \gamma_1,$$

или, более общо,

$$\gamma_k < \alpha \gamma_{k-1}.$$

Отсюда ясно, что ряд

$$\sum \lambda^k \gamma_k$$

сходится при

$$\lambda \alpha < 1,$$

а поскольку

$$|u_k| < \frac{b'' \gamma_k}{|\ln MK \ln MK_1|},$$

то ряд

$$\sum \lambda^k u_k$$

также сходится.

Опишем вокруг K и K_1 две маленькие замкнутые кривые. Пусть v — функция, определенная следующим образом. Обозначим через A и A_1

значения Z , соответствующие точкам K и K_1 . Тогда внутри замкнутой кривой, описанной вокруг K ,

$$v = \ln \left| \frac{1}{Z - A} \right|.$$

Внутри второй замкнутой кривой функция v тождественно равна нулю. Во внешней по отношению к замкнутым кривым части поверхности Клейна функция v не принимает нулевых значений и не обращается в бесконечность. Наконец, функция v и ее производные до третьего порядка включительно всюду конечны.

Положим, далее,

$$C\lambda = h(h - 1),$$

где C — значение функции $\eta|Z - A|^2 \ln^2|Z - A|$ в точке K , а h — отрицательный корень этого квадратного уравнения.

Пусть

$$Dv^h = \lambda \eta v^h + \vartheta.$$

Я утверждаю, что функция ϑ/ζ ограничена.

В самом деле, отношение ϑ/ζ могло бы обратиться в бесконечность лишь в точке K . Но в окрестности точки K функция η , по предположению, разложима по целым возрастающим (положительным и отрицательным) степеням

$$(Z - A), \quad (Z_0 - A_0) \quad \text{и} \quad \frac{1}{\ln \left| \frac{1}{Z - A} \right|}.$$

Следовательно, аналогичные разложения допускают

$$v^h \ln^{-h} \left| \frac{1}{Z - A} \right|, \quad Dv^h \ln^{-h} \left| \frac{1}{Z - A} \right|,$$

а, значит, и

$$\vartheta \ln^{-h} \left| \frac{1}{Z - A} \right|.$$

В разложении функции ϑ члены наиболее высокого порядка, т. е. порядка

$$|Z - A|^{-2} \ln^{-2+h} \left| \frac{1}{Z - A} \right|,$$

уничтожаются, а члены ближайшего по величине порядка, т. е. порядка

$$|Z - A|^{-2} \ln^{-3+h} \left| \frac{1}{Z - A} \right|,$$

малы по сравнению с ζ (поскольку показатель h отрицателен); следовательно, отношение ϑ/ζ остается конечным, что и требовалось доказать.

Пусть v' — функция, построенная так же, как функция v . Единственное отличие заключается в том, что роль точки K для v' играет точка K_1 , и наоборот, т. е. внутри первой замкнутой кривой

$$v' = 0,$$

а внутри второй

$$v' = \ln \frac{1}{|Z - A_1|}.$$

Пусть C' — величина, аналогичная величине C в точке K , но построенная для точки K_1 , а h' — положительный корень уравнения

$$C'\lambda = h'(h' - 1).$$

Рассматривая уравнение

$$Dv'^{h'} = \lambda \eta v'^{h'} + \vartheta',$$

мы видим, что отношение ϑ'/ζ ограничено.

Обозначим через ψ и ψ' две линейные комбинации функций ϑ и ϑ' :

$$\psi = a\vartheta + c\vartheta',$$

$$\psi' = b\vartheta + d\vartheta'.$$

Я утверждаю, что коэффициенты a, b, c, d можно выбрать так, что

$$\int \psi d\omega = 0, \quad \int \psi' d\omega \neq 0, \quad \int \psi_1 d\omega \neq 0.$$

Действительно, указанный выбор коэффициентов невозможен, если либо

$$\int \vartheta d\omega = \int \vartheta' d\omega = 0,$$

либо

$$\int \vartheta d\omega \int \vartheta'_1 g d\omega_1 - \int \vartheta' d\omega \int \vartheta_1 g d\omega_1 = 0.$$

Но поскольку функции v и v' на части поверхности Клейна произвольны, их всегда можно считать заданными так, чтобы эти равенства не имели места.

Заметим, что функции ψ и ψ' зависят от λ . Отношение максимума $|\psi/\zeta|$ к максимуму $\left| \int \psi_1 g d\omega \right|$ и отношение максимума $|\psi'/\zeta|$ к максимуму $\left| \int \psi' d\omega \right|$ также зависят от λ .

Возникает важная задача: выяснить, не обращаются ли эти отношения в бесконечность, когда λ становится равной 0.

Исследуем пределы отношений ϑ/λ и ϑ'/λ при $\lambda=0$. Для этого воспользуемся формулой

$$Dv^h = hv^{h-1}Dv + h(h-1)v^{h-2}E(v, v).$$

Если учесть, что

$$Dv^h = \lambda \eta v^h + \vartheta; \quad C\lambda = h(h-1),$$

то, поделив на λ и устремив λ к 0, получим

$$-C \frac{Dv}{v} + C \frac{E(v, v)}{v^2} = \eta + \lim \frac{\vartheta}{\lambda}.$$

Обозначив через ϑ_0 и ϑ'_0 пределы отношений ϑ/λ и ϑ'/λ , мы видим, что функции ϑ_0/ζ и ϑ'_0/ζ ограничены. Действительно, в окрестности точек K и K_1 величина Dv обращается в нуль, а разность

$$C \frac{E(v, v)}{v^2} - \eta$$

по порядку величины самое большее равна

$$\frac{1}{|Z - A|^2 \ln^3 \left| \frac{1}{Z - A} \right|},$$

т. е. имеет тот же порядок, что и ζ .

С другой стороны, поскольку функции v и v' на части поверхности Клейна заданы произвольно, их можно выбрать так, чтобы равенства

$$\int \vartheta_0 d\omega = \int \vartheta'_0 d\omega = 0,$$

$$\int \vartheta_0 d\omega \int \vartheta'_{0,1} g d\omega_1 - \int \vartheta'_0 d\omega \int \vartheta_{0,1} g d\omega_1 = 0$$

не выполнялись, т. е. чтобы рассматриваемые выше отношения не обращались в бесконечность при $\lambda=0$.

Запишем уравнение

$$Du = \lambda' \eta u + \varphi + \mu \psi + \mu' \psi'. \quad (15)$$

Это уравнение (14), в которое вместо λ подставили λ' ; следовательно, оно также интегрируемо, если

$$\lambda' \alpha < 1.$$

Величину α мы определили выше. Единственное условие, которому она удовлетворяет, заключается в том, что она должна иметь нижний предел, но этот нижний предел зависит от λ , поскольку от λ зависят ψ и ψ' .

Однако при $\lambda=0$ нижний предел величины α не обращается в бесконечность, ибо два рассмотренных выше отношения при $\lambda=0$ остаются конечными.

Следовательно, если λ изменяется от 0 до λ_0 , то нижний предел α не превышает некоторой величины β . Достаточно выбрать в качестве α величину, не зависящую от λ и заведомо большую, чем β , чтобы мы могли утверждать: уравнение (15) интегрируемо всякий раз, когда

$$\alpha \lambda' < 1.$$

Пусть u_0 — решение уравнения (15). Рассмотрим новое уравнение

$$Du = \lambda \eta u + \varphi, \quad \int \varphi d\omega = 0. \quad (16)$$

Решение этого уравнения мы получим, положив

$$u = u_0 - \mu (av^h + cv'^{h'}) - \mu' (bv^h + dv'^{h'})$$

и обеспечив выполнение равенства

$$\lambda' = \lambda,$$

что возможно лишь при условии, если

$$\lambda' = \lambda < \lambda_0, \quad \lambda' = \lambda < \frac{1}{\alpha}.$$

Следует обратить внимание на некоторые различия между доказательством, данным мной для случая, когда имелась лишь одна вершина третьего типа, и тем доказательством, которое было проведено в случае двух вершин третьего типа.

В первом случае наш подход не был прямым: мы использовали вспомогательную функцию η_0 . Во втором случае, отказавшись от непрямого подхода, мы исходили из предположения о специальном виде функции η , а именно: считали, что η допускает разложение по возрастающим степеням $Z-A$, Z_0-A_0 , $1/\ln|Z-A|$. Впрочем, во всех последующих приложениях это условие выполнено.

Разумеется, можно было бы поступить иначе, но мне хотелось продемонстрировать два различных метода доказательства.

Если уравнение (16) интегрируемо при условии $\int \varphi d\omega = 0$, то оно точно так же будет интегрируемо и в том случае, когда это условие не выполнено, поскольку можно найти функцию v , такую, что

$$\int \eta v d\omega \neq 0.$$

Выбрав затем константу μ так, чтобы выполнялось равенство

$$\mu \int (Dv - \lambda \eta v) d\omega = -\lambda \mu \int \eta v d\omega = \int \varphi d\omega,$$

мы сможем проинтегрировать уравнение

$$Du = \lambda \eta u + [\varphi - \mu (Dv - \lambda \eta v)], \quad (17)$$

удовлетворяющее условию

$$\int [\varphi - \mu (Dv - \lambda \eta v)] d\omega = 0.$$

Следовательно, интеграл уравнения (16) равен интегралу уравнения (17) плюс μv .

Итак, выводы, к которым мы пришли в предыдущем разделе при рассмотрении уравнения (1), остаются в силе и в том случае, когда имеются вершины третьего типа. Следовательно, то, что говорилось в этом разделе об уравнениях (5), (6) и (9), также остается верным.

Обобщая, можно сказать, что уравнение

$$Du = \eta u - \varphi \quad (18)$$

интегрируемо. Ранее этот результат получали, предполагая ограниченность отношения φ/ζ .

Теперь же я утверждаю, что он верен и в том случае, когда ограничено и вполне определено отношение φ/η . Действительно,

$$\frac{\varphi}{\zeta} = \frac{\varphi}{\eta} \cdot \frac{\eta}{\zeta}.$$

Отношение η/ζ конечно всюду, за исключением вершин третьего типа. Следовательно, мы должны исследовать лишь то, что происходит в окрестности одной из таких вершин.

Выше мы предположили, что в окрестности вершины третьего типа η допускает разложение по возрастающим степеням

$$Z - A, \quad Z_0 - A_0, \quad \frac{1}{\ln |Z - A|}.$$

Предположим, что этим же свойством обладает и функция φ .

Пусть a — значение отношения φ/η в вершине K третьего типа и

$$\varphi = a\eta + \varphi_1.$$

Тогда отношение φ_1/ζ в точке K конечно.

Предположим для определенности, что имеются две вершины третьего типа K и K_1 . Пусть a и a_1 — значения отношения φ/η в точках K и K_1 .

Если v — любая функция, конечная и непрерывная вместе с производными первого, второго и третьего порядка, принимающая в точках K и K_1 значения a и a_1 [8], то

$$D(u - v) = \eta(u - v) - (\varphi - \eta v + Dv). \quad (19)$$

Поскольку отношение

$$\frac{\varphi - \eta v + Dv}{\zeta}$$

остается конечным в точках K и K_1 , уравнение (19) и, следовательно, уравнение (17) интегрируемы.

IX. Применение вариационного исчисления

Итак, мы подошли к исследованию уравнения

$$DU = \vartheta e^U - \Phi, \quad (1)$$

которое, как было показано, тесно связано с задачей построения фуксовых функций.

Но прежде чем строго доказывать интегрируемость этого уравнения, я хочу дать краткий набросок одного из методов, основанных на вариационном исчислении и имеющих некоторые приложения в математической физике.

Для этого прежде всего предположим, что функция Φ существенно положительна, и придадим функции U бесконечно малое приращение δU .

Рассмотрим интеграл

$$\int \delta U d\omega (\vartheta e^U - \Phi - DU), \quad (2)$$

взятый по всей поверхности Клейна.

Интегрируя по частям, находим

$$\int \delta U DU d\omega = - \int E(U, \delta U) d\omega,$$

в силу чего интеграл (2) преобразуется к виду

$$\int d\omega [(\vartheta e^U - \Phi) \delta U + E(U, \delta U)].$$

Но

$$(\vartheta e^U - \Phi) \delta U = \delta (\vartheta e^U - \Phi U); \quad E(U, \delta U) = \frac{1}{2} \delta E(U, U).$$

Следовательно, интеграл (2) есть не что иное, как вариация δJ , где

$$J = \int d\omega \left[\frac{1}{2} E(U, U) + \vartheta e^U - \Phi U \right].$$

Таким образом, вариация δJ не может обратиться в нуль без того, чтобы не выполнялось уравнение (1).

Достигает ли интеграл J своего минимума? Функция $E(U, U)$ существенно положительна. Что же касается выражения

$$\vartheta e^U - \Phi U,$$

то оно достигает минимума при

$$\vartheta e^U = \Phi.$$

Поскольку Φ и ϑ всюду положительны, их можно подобрать так, что это равенство будет выполнено. Сам минимум равен

$$\Phi \left(1 - \ln \frac{\Phi}{\vartheta} \right).$$

Таким образом, интеграл J удовлетворяет неравенству

$$J > \int d\omega \Phi \left(1 - \ln \frac{\Phi}{\vartheta} \right),$$

откуда следует, что у него есть минимум. В свою очередь это означает, что уравнение (1) имеет решение.

Предположим, что функция Φ не всюду положительна. Пусть Φ_0 — среднее значение Φ , так что

$$\Phi_0 \int d\omega = \int \Phi d\omega.$$

Положив

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1,$$

получим

$$\int \Phi_1 d\omega = 0.$$

Я утверждаю, что уравнению (1) можно удовлетворить, если среднее значение Φ_0 функции Φ положительно. В самом деле, поскольку

$$\int \Phi_1 d\omega = 0,$$

можно найти функцию v , такую, что

$$Dv = -\Phi_1.$$

Полагая

$$U = V + v,$$

преобразуем уравнение (1) к виду

$$DV = \vartheta e^v e^V - \Phi_0. \quad (1bis)$$

Уравнение (1bis), совпадающее по виду с уравнением (1), имеет решение, ибо функция ϑe^v всюду положительна, а Φ_0 — положительная константа.

Существует ли решение уравнения (1), если

$$\int \Phi d\omega < 0?$$

Оказывается, не существует. Действительно,

$$\int DU d\omega = 0,$$

и, следовательно,

$$\int \Phi d\omega = \int \vartheta e^u d\omega > 0.$$

Таким образом, необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (1) заключается в выполнении неравенства

$$\int \Phi d\omega > 0.$$

Х. Уравнение $DU = \vartheta e^u - \Phi$

Дадим теперь строгое доказательство того же результата.

Прежде всего рассмотрим уравнение

$$Du = \vartheta e^u - \varphi, \quad (1)$$

предположив, что оно интегрируемо и допускает в качестве решения

$$u = u_0.$$

Затем рассмотрим уравнение

$$Du = \vartheta e^u - \varphi - \lambda \psi \quad (2)$$

и выясним, при каких условиях новое уравнение будет также интегрируемым.

Для этого предположим, что u разложено по степеням λ :

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots$$

Тогда функция e^{u-u_0} также будет допускать разложение по степеням λ , и мы сможем записать

$$e^{u-u_0} = 1 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \dots + \lambda^2 w_2 + \lambda^3 w_3 + \dots$$

Коэффициенты w , очевидно, равны

$$w_2 = \frac{u_1^2}{2}, \quad w_3 = \frac{u_1^3}{6} + u_1 u_2, \quad w_4 = \frac{u_1^4}{24} + u_1 u_3 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{u_1^2 u_2}{2}, \quad \dots$$

В общем случае w будут полиномами относительно u_k с положительными коэффициентами.

Функции $u_0, u_1, \dots$ найдем последовательно из уравнений

$$Du_0 = \vartheta e^{u_0} - \varphi, \quad (1)$$

$$Du_1 = \vartheta e^{u_0} u_1 - \psi,$$

$$Du_2 = \vartheta e^{u_0} (u_2 + w_2), \quad (3)$$

$$Du_3 = \vartheta e^{u_0} (u_3 + w_3),$$

$$\dots$$

Уравнение (1) интегрируемо по предположению, уравнения (3) интегрируемы в силу результатов разделов VII и VIII.

В первом из уравнений (3) функции ϑ , u_0 и ψ известны, а функция u_1 не известна; во втором — известны ϑ , u_0 и w_2 , а функция u_2 не известна, и т. д.

Выясним, каким неравенствам удовлетворяют построенные таким образом функции u_k .

Когда функция u_2 достигает своего максимума, величина Du_2 должна быть отрицательной. Следовательно, должно выполняться неравенство

$$u_2 < -w_2.$$

Наоборот, когда u_2 достигает своего минимума, должно выполняться неравенство

$$u_2 > -w_2.$$

Таким образом, максимум u_2 меньше максимума величины $(-w_2)$, а минимум u_2 больше минимума $(-w_2)$.

Отсюда следует, что максимум $|u_2|$ меньше максимума $|w_2|$.

Аналогичным образом можно было бы показать, что максимум $|u_3|$ меньше максимума $|w_3|$ и вообще максимум $|u_k|$ меньше максимума $|w_k|$.

По той же причине максимум $|u_1|$ меньше максимума

$$\frac{|\psi|}{\vartheta e^{u_0}}$$

(напомним, что ϑ и e^{u_0} существенно положительны).

Следовательно,

$$\max |u_1| < \frac{\max \left| \frac{\psi}{\vartheta} \right|}{\min e^{u_0}}.$$

Но u_0 удовлетворяет уравнению

$$Du_0 = \vartheta e^{u_0} - \varphi.$$

Когда u_0 достигает минимума, должно выполняться неравенство

$$\vartheta e^{u_0} - \varphi > 0,$$

из которого (если φ — существенно положительная функция) получаем

$$\min e^{u_0} > \min \left| \frac{\varphi}{\vartheta} \right|$$

и, наконец,

$$\max |u_1| < \frac{\max \left| \frac{\psi}{\vartheta} \right|}{\min \left| \frac{\varphi}{\vartheta} \right|}.$$

Пусть $u'_1, u'_2, \dots, u'_k, \dots$ — последовательность положительных констант, а w'_k — многочлены, построенные из u'_j так же, как w_k из u_j .

Поскольку все коэффициенты многочленов w_k положительны, то, предположив, что

$$u'_1 > \max |u_1|, \quad u'_2 > \max |u_2|, \quad \dots, \quad u'_{k-1} > \max |u_{k-1}|,$$

мы получим неравенства

$$w'_k > \max |w_k|,$$

а предположив, что

$$u'_k = w'_k,$$

— неравенства

$$u'_k > \max |w_k| > \max |u_k|.$$

В конце концов мы приходим к неравенствам

$$u'_k = w'_k, \quad w'_k > \max |w_k|, \quad u'_k > \max |u_k|. \quad (4)$$

Положив

$$v = \lambda u'_1 - \lambda^2 u'_2 + \dots \quad (5)$$

и воспользовавшись определением многочленов w и w' , получим

$$e^v = 1 + \lambda u'_1 + \lambda^2 u'_2 + \lambda^3 u'_3 + \dots + \lambda^2 w'_2 + \lambda^3 w'_3 + \dots,$$

или, в силу равенства $u'_k = w'_k$,

$$e^v = 2v + 1 - \lambda u'_1. \quad (6)$$

Поскольку единственное условие, наложенное на u'_1 , заключается в том, что эта величина должна быть больше максимума u_1 , выберем

$$u'_1 = \frac{\max \left| \frac{\psi}{\vartheta} \right|}{\min \left| \frac{\varphi}{\vartheta} \right|}.$$

Из уравнения (6) найдем функцию v в виде ряда, расположенного по степеням λ . Граница сходимости этого ряда отвечает тому значению λ , при котором уравнение (6) имеет двукратный корень.

Дифференцируя уравнение (6), находим

$$e^v = 2, \quad v = \ln 2;$$

$$\lambda u'_1 = \ln 4 - 1.$$

Следовательно, ряд (5) сходится при условии, если

$$|\lambda u'_1| < \ln 4 - 1.$$

В силу неравенств (4) это означает, что ряд

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots$$

сходится абсолютно и равномерно.

Ряд

$$e^u = e^{u_0} (1 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots + \lambda^2 w_2 + \dots)$$

также сходится абсолютно и равномерно. В самом деле, члены этого ряда меньше соответствующих членов сходящегося ряда (с положительными членами)

$$e^{u+u_0} = e^{u_0} (1 + \lambda u'_1 + \lambda^2 u'_2 + \dots + \lambda^2 w'_2 + \dots).$$

Образуем два ряда:

$$\partial e^u - \varphi - \lambda \psi = V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2 + \dots$$

и

$$\int V_0^1 G d\omega_1 + \lambda \int V_1^1 G d\omega_1 + \lambda^2 \int V_2^1 G d\omega_1 + \dots$$

(буквой G здесь для краткости обозначена функция

$$G(M, P; M_1, P_1),$$

а V_k^1 — значение функции V_k в точке M_1).

Первый из этих рядов сходится равномерно, в силу чего второй ряд задает интеграл

$$J = \int (\partial e^u - \varphi - \lambda \psi)_1 G d\omega_1,$$

где

$$(\partial e^u - \varphi - \lambda \psi)_1$$

— значение функции

$$\partial e^u - \varphi - \lambda \psi$$

в точке M_1 . Следовательно,

$$DJ = \partial e^u - \varphi - \lambda \psi.$$

С другой стороны,

$$D \int V_0^1 G d\omega_1 = V_0 = \partial e^{u_0} - \varphi,$$

$$D \int V_1^1 G d\omega_1 = V_1 = \partial e^{u_0} u_1 - \psi,$$

$$D \int V_2^1 G d\omega_1 = V_2 = \partial e^{u_0} (u_2 + w_2),$$

• • • • •

Таким образом, обозначив для краткости

$$\int V_k^1 G d\omega_1 = v_k,$$

получим

$$Du_k = Dv_k$$

и, следовательно,

$$u_k = v_k + C_k,$$

где C_k — некоторая постоянная. Оба ряда

$$u = \sum \lambda^k u_k \quad \text{и} \quad \sum \lambda^k v_k = J$$

сходятся.

Сходимость равномерна, если точка M не лежит внутри малой замкнутой кривой, проведенной вокруг точки P_1 .

Пусть u — сумма первого ряда, J — сумма второго и c — сумма ряда $\sum \lambda^k C_k$. Тогда

$$C = J + c$$

и, следовательно,

$$Du = DJ = \partial e^u - \varphi - \lambda \psi.$$

Таким образом, решение нашего уравнения найдено. При отыскании его мы исходили из предположения, что функция φ существенно положительна, а отношения φ/∂ и ψ/∂ ограничены и всюду определены.

Можно ли утверждать, что решение уравнения

$$Du = \partial e^u - \alpha \partial \tag{7}$$

существует при любом значении положительной константы α ? Да, можно, поскольку уравнение (7) допускает решение

$$u = \ln \alpha.$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$Du = \partial e^u - \alpha \partial - \mu \psi, \tag{8}$$

где ψ — существенно положительная функция, для которой отношение ψ/∂ ограничено.

Будет ли оно интегрируемым при любом выборе положительных констант α и μ ?

Заменяем μ на $\mu + \lambda$. Уравнение (8) при этом перейдет в

$$Du = \partial e^u - \alpha \partial - \mu \psi - \lambda \psi, \tag{8bis}$$

последнее же заменой

$$\varphi = \alpha \partial + \mu \psi$$

приводится к виду (2).

Так как функция $\mu\psi$ существенно положительна, имеем неравенство

$$\min \left| \frac{\varphi}{\vartheta} \right| > \alpha.$$

Это означает, что интегрируемость уравнения (8) влечет за собой интегрируемость уравнения (8bis), если только

$$\left| \frac{\lambda}{\alpha} \max \left| \frac{\psi}{\vartheta} \right| \right| > \ln 4 - 1.$$

Следовательно, если уравнение (8) интегрируемо при

$$\mu = \mu_0,$$

то оно интегрируемо и при

$$\mu_0 < \mu < \mu_0 + (\ln 4 - 1) \frac{\alpha}{\max \left| \frac{\psi}{\vartheta} \right|}$$

и, следовательно, при

$$\mu_0 < \mu < \mu_0 + \frac{n\alpha}{\max \left| \frac{\psi}{\vartheta} \right|} (\ln 4 - 1).$$

Поскольку число n можно выбирать сколь угодно большим, уравнение (8) интегрируемо при всех значениях μ , лежащих справа от μ_0 (бóльших μ_0).

Но уравнение (8) при $\mu=0$ интегрируемо, поскольку в этом случае оно вырождается в уравнение (7). Следовательно, оно интегрируемо при всех положительных значениях μ , что и требовалось доказать.

Отсюда можно заключить, что уравнение

$$Du = \vartheta e^u - \varphi \tag{1}$$

интегрируемо всякий раз, когда:

- 1) функция φ всюду положительна и нигде не обращается в нуль;
- 2) функция φ остается конечной всюду, за исключением вершин второго и третьего типа, в которых ϑ обращается в бесконечность;
- 3) наконец, при приближении к любой из вершин третьего типа отношение φ/ϑ стремится к определенному пределу, отличному от нуля и бесконечности.

Действительно, при этих условиях отношение φ/ϑ будет постоянно заключено в положительных пределах, так что

$$\beta > \frac{\varphi}{\vartheta} > \alpha.$$

Можно записать, что

$$\varphi = \alpha\vartheta + \psi.$$

Тогда функция ϕ будет всюду положительна, а отношение ϕ/ϑ — ограничено. Следовательно, уравнение

$$Du = \vartheta e'' - \alpha \vartheta - \mu \phi$$

будет интегрируемым при всех положительных значениях μ и, в частности, при $\mu=1$, что и требовалось доказать.

В частном случае, когда фуксовы функции принадлежат к первому типу, вершины второго и третьего типа отсутствуют, функция ϑ всюду конечна, и уравнение (1) интегрируемо, если функция φ существенно положительна и нигде не обращается в бесконечность. Уравнение (1), в частности, интегрируемо, когда φ — положительная постоянная.

Предположим теперь, что функция φ , оставаясь конечной, не является более всюду положительной. Если φ_0 — среднее значение φ , такое, что

$$\varphi_0 \int d\omega = \int \varphi d\omega,$$

то существует функция v , удовлетворяющая уравнению

$$Dv = \varphi_0 - \varphi,$$

поскольку $\int (\varphi_0 - \varphi) d\omega = 0$ (см. раздел VI).

Если постоянная φ_0 положительна, то существует функция w , удовлетворяющая уравнению

$$Dw = \vartheta e^v e^w - \varphi_0.$$

Следовательно, функция

$$u = v + w$$

удовлетворяет уравнению

$$Du = \vartheta e'' - \varphi.$$

Итак, если фуксовы функции принадлежат к первому типу, т. е. если функция ϑ нигде не обращается в бесконечность и, кроме того, функция φ также нигде не обращается в бесконечность, то необходимым и достаточным условием интегрируемости уравнения (1) является положительность среднего значения функции φ .

Этот результат допускает обобщение на случай, когда имеются вершины второго и третьего типов.

В самом деле, предположим, что функция φ всюду конечна, за исключением вершин второго и третьего типов, в окрестности которых отношение φ/ϑ стремится к вполне определенному положительному пределу (отличному от нуля и бесконечности).

Предположим, кроме того, что

$$\int \varphi d\omega > 0.$$

Функцию φ , очевидно, можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

так что:

- 1) функция φ_1 будет существенно положительной;
- 2) функция φ_2 не будет нигде обращаться в бесконечность;
- 3)

$$\int \varphi_2 d\omega = 0.$$

В окрестности вершин второго и третьего типов отношение φ_1/ϑ будет стремиться к конечному пределу, отличному от нуля, и будет выполняться неравенство

$$\int \varphi_1 d\omega > 0.$$

Следовательно, можно найти функции v и w , удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} Dv &= -\varphi_2, \\ Dw &= \vartheta e^v e^w - \varphi_1. \end{aligned}$$

Но тогда функция

$$u = v + w$$

будет удовлетворять уравнению (1).

Итак, уравнение (1) интегрируемо, если выполнены следующие условия:

- 1) среднее значение функции φ положительно;
- 2) в окрестности любой из вершин второго и третьего типов отношение φ/ϑ стремится к конечному, отличному от нуля, положительному пределу.

Существует еще одно ограничение, которое желательно снять.

Отношение φ/ϑ должно быть конечным в окрестности вершин второго и третьего типов и, кроме того, не должно обращаться в нуль в самих этих вершинах. Для вершин третьего типа это ограничение существенно. В отношении же вершин второго типа его следует снять.

Действительно, пусть ψ — любая функция, удовлетворяющая следующим условиям: 1) среднее значение ее равно нулю; 2) она всюду конечна, за исключением окрестностей вершин второго типа; 3) в окрестности вершин второго типа отношение ψ/ϑ отлично от нуля и положительно. Тогда, как показано в разделе VI, уравнение

$$Dv = \psi$$

интегрируемо. Это уравнение не было бы интегрируемым, если бы мы предположили, что отношение ψ/ϑ отлично от нуля в окрестности вершин третьего типа, и интеграл

$$\int \psi_1 G(M, P; M_1, P_1) d\omega_1$$

не оставался бы конечным, когда точка M совпала бы с одной из таких вершин.

С другой стороны, запишем уравнение

$$Du = \vartheta e^u - \varphi \quad (1)$$

и предположим, что функция φ удовлетворяет следующим условиям:

1) выполняется неравенство

$$\int \varphi d\omega > 0;$$

2) отношение φ/ϑ имеет всюду конечное и вполне определенное значение;

3) в окрестности вершин второго типа это значение может быть положительным, отрицательным или равным нулю;

4) в окрестности вершин третьего типа отношение φ/ϑ отлично от нуля и положительно.

Полагая

$$u - \lambda v = w,$$

находим

$$Dw = \vartheta e^{\lambda v} e^w - \varphi - \lambda \psi. \quad (9)$$

Положительную постоянную λ выберем достаточно большой для того, чтобы в окрестности вершины второго типа отношения

$$\frac{\varphi + \lambda \psi}{\vartheta}, \quad \frac{\varphi + \lambda \psi}{\vartheta e^{\lambda v}}$$

были положительны (такой выбор возможен, поскольку отношение ψ/ϑ положительно, а модуль $|\varphi/\vartheta|$ ограничен).

В окрестности вершин третьего типа эти отношения равны

$$\frac{\varphi}{\vartheta}, \quad \frac{\varphi}{\vartheta e^{\lambda v}}$$

и, следовательно, по предположению, положительны.

Таким образом, уравнение (9) интегрируемо. Отсюда следует, что уравнение (1) также интегрируемо.

Итак, уравнение (1) интегрируемо, если выполнены следующие условия:

1) функция φ удовлетворяет неравенству

$$\int \varphi d\omega > 0;$$

2) отношение φ/ϑ всюду конечно и определено;

3) отношение φ/ϑ может принимать любые значения в окрестности вершин второго типа и должно быть отличным от нуля и положительным в окрестности вершин третьего типа.

XI. Приложение к фуксовым функциям

Только что мы установили условия, при которых уравнение (1) из предыдущего раздела интегрируемо. В начале работы мы показали, что построение фуксовых функций связано с интегрированием уравнения того же вида.

Запишем уравнение

$$DU = \vartheta e^U - \Phi \quad (1)$$

и выясним, удовлетворяет ли оно сформулированным выше условиям.

В конце раздела IV мы показали, что функция Φ конечна всюду, за исключением окрестностей вершин третьего типа. В самих же вершинах третьего типа отношение Φ/ϑ конечно и имеет вполне определенное, отличное от нуля (положительное) значение.

Следовательно, остается лишь проверить, выполняется ли неравенство

$$\int \varphi d\omega > 0 \text{ *}.$$

Напомним, что

$$-\Phi = D \ln \frac{d\Omega}{d\omega} + Dh,$$

где h — функция, конечная всюду за исключением окрестностей вершин второго и третьего типов, и такая, что разность

$$h - \left(2 - \frac{2}{n}\right) \ln |Z - A| \quad (2)$$

остается конечной в окрестностях вершин второго типа, а разность

$$h - 2 \ln |Z - A| - 2 \ln \ln |Z - A| \quad (3)$$

— в окрестностях вершин третьего типа.

Предположим, что Z связано с Z' алгебраическим соотношением

$$F(Z, Z') = 0.$$

Указанное соотношение задает алгебраическую кривую порядка m . Не ограничивая общности, можно считать, что эта кривая имеет m различных асимптотических направлений и не содержит других особенностей, кроме обычных двойных точек.

Можно также считать, что точка кривой, соответствующая вершине второго или третьего типа, не является ни ее двойной, ни бесконечно удаленной точкой, ни точкой, в которой касательная параллельна оси Z (именно это обстоятельство позволяет нам записать в формулах (2) и (3) $Z - A$ вместо $Z' - A'$).

* Следует читать $\int \Phi d\omega > 0$. (Прим. ред.).

Возникает вопрос: когда обращается в бесконечность $\ln \frac{d\Omega}{d\omega}$, если наши предположения выполнены? Это происходит в следующих случаях:

1) когда $\frac{d\Omega}{d\omega}$ обращается в бесконечность, т. е. когда точка Z, Z' удаляется в бесконечность вдоль одного из асимптотических направлений нашей кривой;

2) в точках, в которых касательная параллельна оси Z , когда

$$\frac{dZ}{dZ'} = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{d\Omega}{d\Omega'} = 0;$$

из этого равенства, поскольку производная $\frac{d\Omega'}{d\omega}$ конечна, следует, что производная $\frac{d\Omega}{d\omega}$ равна нулю;

3) в двойных точках, когда одновременно выполняются равенства

$$\frac{\partial F}{\partial Z} = \frac{\partial F}{\partial Z'} = 0,$$

но Z' — голоморфная функция от Z , и $\frac{d\Omega}{d\omega}$ остается конечной.

Итак.

$$\Phi = D\psi,$$

$$\psi = -\ln \frac{d\Omega}{d\omega} - h,$$

причем функция ψ имеет логарифмическую особенность в конечном числе особых точек, которые делятся на четыре вида.

Первый вид: m бесконечно удаленных точек кривой $F=0$.

Второй вид: точки, в которых $\frac{\partial F}{\partial Z'} = 0$; число их равно

$$m(m-1) - 2d,$$

где d — число двойных точек, или

$$2m + 2p - 2,$$

где p — род кривой.

Третий вид: вершины второго типа.

Четвертый вид: вершины третьего типа.

Опишем вокруг каждой из особых точек бесконечно малую замкнутую кривую. Поверхность Клейна при этом разделится на две части: область, лежащую внутри этих замкнутых кривых, и область, лежащую вне этих кривых. Внутренняя область бесконечно мала, внешняя конечна.

Интеграл $\int \Phi d\omega$, взятый по внутренней области, бесконечно мал. Из уравнения (3bis) (из раздела III) следует, что интеграл $\int \Phi d\omega$, взятый по внешней области, равен

$$\int \Phi d\omega = \int D\psi d\omega = \int \frac{d\psi}{dn} d\sigma,$$

где dn и $d\sigma$ определены так же, как в разделе III, независимо от того, изотропна или анизотропна поверхность Клейна.

Третий интеграл берется по периметрам всех замкнутых кривых; следует заметить, что d/dn — дифференцирование по внешней нормали к области, по которой берется двойной интеграл, или, что то же самое, по *внутренней* нормали к области, ограниченной замкнутой кривой.

Рассмотрим сначала замкнутую кривую, описанную вокруг одной из m особых точек первого вида, — точек, в которых Z обращается в бесконечность.

Положим

$$Z'' = \frac{1}{Z},$$

тогда

$$\frac{d\Omega}{d\Omega''} = \left| \frac{dZ}{dZ''} \right|^2 = \frac{1}{|Z''|^4}.$$

Внутри нашей кривой

$$\psi = 4 \ln |Z''| - \ln \frac{d\Omega''}{d\omega} - h.$$

Но величина $\ln \frac{d\Omega''}{d\omega} + h$ остается конечной, и наш интеграл с точностью до бесконечно малых равен

$$4 \int \frac{d \ln |Z''|}{dn} d\sigma,$$

или (мы по-прежнему придерживаемся обозначений раздела III)

$$4 \int \frac{d \ln |Z''|}{dN''} dS'',$$

где dS'' и dN'' — бесконечно малые дуги, соответствующие на плоскости Z'' дугам $d\sigma$ и dn на поверхности Клейна.

Если

$$Z'' = \rho e^{i\omega}$$

и $\rho = \text{const}$ — уравнение кривой, соответствующей окружности на плоскости Z'' , то интеграл можно записать в виде

$$-4 \int \frac{d \ln \rho}{d\rho} \rho d\omega = -4 \int d\omega = -8\pi.$$

Знак минус выбран потому, что дуга dN'' считается положительно ориентированной в направлении, идущем внутрь замкнутой кривой $\rho = \text{const}$.

Рассмотрим теперь замкнутую кривую, описанную вокруг одной из

$$2m + 2p - 2$$

особых точек второго вида.

Пусть $Z=A$, $Z'=A'$ — такая особая точка. Тогда

$$\psi = -\ln \frac{d\Omega}{d\omega'} - \ln \frac{d\Omega'}{d\Omega} - h.$$

С другой стороны,

$$Z - A = (Z' - A')^2 H,$$

где H — ряд, расположенный по степеням $Z' - A'$ и не обращающийся в нуль при $Z' = A'$.

Отсюда заключаем, что

$$\frac{dZ}{dZ'} = (Z' - A') H',$$

причем множитель H' не обращается в нуль при $Z' = A'$. Следовательно,

$$\ln \frac{d\Omega}{d\Omega'} = 2 \ln \left| \frac{dZ}{dZ'} \right| = 2 \ln |Z' - A'| + 2 \ln H',$$

откуда

$$\psi = -2 \ln |Z' - A'| - 2 \ln H' - \ln \frac{d\Omega'}{d\omega} - h.$$

Выражение

$$2 \ln H' + \ln \frac{d\Omega'}{d\omega} + h$$

остается конечным, в силу чего рассматриваемый интеграл приводится к виду

$$-2 \int \frac{d \ln |Z' - A'|}{dn} d\sigma.$$

Вычисления, аналогичные проведенным выше, показывают, что этот интеграл равен 4π .

Рассмотрим кривую, описанную вокруг особой точки третьего вида. Тогда

$$h = \left(2 - \frac{2}{n}\right) \ln |Z - A| + h_1,$$

слагаемое h_1 здесь конечно, и

$$\psi = \left(\frac{2}{n} - 2\right) \ln |Z - A| - h_1 - \ln \frac{d\Omega}{d\omega}$$

(величина $h_1 + \ln \frac{d\Omega}{d\omega}$ конечна).

Следовательно, наш интеграл равен

$$\left(\frac{2}{n} - 2\right) \int \frac{d \ln |Z - A|}{dn} d\sigma$$

(буква n в этой формуле фигурирует в двух различных смыслах: n — целое число и dn — бесконечно малая длина, однако это не может вызвать никаких недоразумений).

Рассуждения, полностью аналогичные проводившимся ранее, показывают, что эта величина равна

$$4\pi \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Перейдем, наконец, к вершинам четвертого вида, для которых

$$h = 2 \ln |Z - A| + 2 \ln \ln |Z - A| + h_1,$$

где h_1 — конечная величина. Наш интеграл приводится к виду

$$-2 \int \frac{d \ln |Z - A|}{dn} d\sigma - 2 \int \frac{d \ln \ln |Z - A|}{dn} d\sigma.$$

Первый интеграл равен 4π . Что же касается второго интеграла, то его, положив

$$Z - A = \rho e^{i\omega}$$

и выбрав в качестве замкнутой кривой кривую $\rho = \text{const}$, можно преобразовать к виду

$$+2 \int \frac{d \ln \ln \rho}{d\rho} \rho d\omega = 2 \int \frac{d\omega}{\ln \rho}.$$

При ρ , стремящемся к нулю, последний интеграл также стремится к нулю.

Следовательно, весь интеграл окончательно равен 4π .

Итак, мы получим следующие величины:

1) для m точек первого вида

$$-8m\pi;$$

2) для $2m + 2p - 2$ точек второго вида

$$8m\pi + 8p\pi - 8\pi;$$

3) для q точек третьего вида (вершин второго типа)

$$4\pi \left(q - \sum \frac{1}{n}\right);$$

4) для q' точек четвертого вида (вершин третьего типа)

$$4q'\pi.$$

Окончательно получаем

$$\int \Phi \omega d = 4\pi \left(2p - 2 + q + q' - \sum \frac{1}{n}\right).$$

Рассмотрим фуксов многоугольник R_0 . Пусть $2h$ — число его сторон; h — число циклов, образуемых вершинами первого типа; q и q' — число циклов, образуемых вершинами второго и третьего типов.

Сумма его углов равна

$$2\pi\left(h + \sum \frac{1}{n}\right).$$

Угловой дефект (пропорциональный неевклидовой площади) равен

$$2\pi\left(k - 1 - h - \sum \frac{1}{n}\right).$$

С другой стороны,

$$p = \frac{k + 1 - h - q - q'}{2},$$

откуда

$$k = 2p - 1 + h + q + q'.$$

Эта формула показывает, что угловой дефект равен

$$2\pi\left(2p - 2 + q + q' - \sum \frac{1}{n}\right),$$

а интеграл $\int \Phi d\omega$ — удвоенному угловому дефекту.

Следовательно, он положителен, что и требовалось доказать.

Но это означает, что уравнение

$$DU = \partial e^U - \Phi$$

интегрируемо, и, таким образом, во всяком фуксовом типе содержится фуксово уравнение [9].

Эта фундаментальная теорема доказана для фуксовых функций, существующих лишь внутри фундаментальной окружности. К рассмотрению других фуксовых функций и, в частности, функций третьего семейства я намерен еще вернуться.

XII. Построение фуксовых уравнений

Пусть

$$\frac{d^2 v}{dZ^2} = v\varphi(Z, Z') \quad (1)$$

— фуксово уравнение, φ — рациональная функция двух переменных Z и Z' , связанных алгебраическим соотношением

$$f(Z, Z') = 0. \quad (2)$$

Два фундаментальных решения этого уравнения имеют вид

$$v_1 = \sqrt{\frac{dZ}{dz}}, \quad v_2 = z \sqrt{\frac{dZ}{dz}},$$

где Z — фуксова функция от z .

Если величины, комплексно сопряженные с решениями v_1 и v_2 , обозначить через v_1^0 и v_2^0 , то

$$v_1^0 = \sqrt{\frac{dZ_0}{dz_0}}, \quad v_2^0 = z_0 \sqrt{\frac{dZ_0}{dz_0}}.$$

С другой стороны, мы положили

$$e^u = \frac{dz}{dZ} \frac{dz_0}{dZ_0} (1 - zz_0)^{-2},$$

откуда

$$e^{-\frac{u}{2}} = \sqrt{\frac{dZ}{dz}} \sqrt{\frac{dZ_0}{dz_0}} (1 - zz_0),$$

или

$$e^{-\frac{u}{2}} = v_1 v_1^0 - v_2 v_2^0.$$

Экспонента $e^{-u/2}$ является фуксовой функцией относительно Z и Z_0 . Способ построения этой функции для случая, когда значения Z и Z_0 образуют комплексно сопряженные пары, известен из этого мемуара.

Далее, имеем

$$\frac{d^2 e^{-\frac{u}{2}}}{dZ^2} = \frac{d^2 v_1}{dZ^2} v_1^0 - \frac{d^2 v_2}{dZ^2} v_2^0,$$

или, в силу уравнения (1),

$$\frac{d^2 e^{-\frac{u}{2}}}{dZ^2} = e^{-\frac{u}{2}} \varphi(Z, Z'),$$

или, наконец,

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dZ^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{du}{dZ} \right)^2 = \varphi.$$

Функция u известна для всех пар комплексно сопряженных значений Z и Z_0 , т. е. при всех вещественных значениях X и Y (если считать, что $Z = X + iY$).

Следовательно, производные

$$\frac{du}{dZ} = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dX} + i \frac{du}{dY} \right),$$

$$\frac{d^2 u}{dZ^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 u}{dX^2} + i \frac{2d^2 u}{dXdY} - \frac{d^2 u}{dY^2} \right)$$

также известны при всех вещественных значениях X и Y .

Таким образом, функция φ известна, и фуксово уравнение построено. Нетрудно проверить, что φ зависит только от Z . Действительно,

$$\frac{d\varphi}{dZ_0} = -\frac{1}{2} \frac{d^3u}{dZ^2 dZ_0} + \frac{1}{2} \frac{du}{dZ} \frac{d^2u}{dZ dZ_0}.$$

Но

$$\frac{d^2u}{dZ dZ_0} = 2e^u, \quad \frac{d^3u}{dZ^2 dZ_0} = 2e^u \frac{du}{dZ}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\varphi}{dZ_0} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Остальные свойства функции φ также проверяются без особого труда.

Изложенные выше соображения позволяют дать новое доказательство существования фуксова уравнения.

Предположим, что рассматриваются уравнения одного и того же фуксова типа. Пусть входящая в них функция φ будет не произвольной, а зависящей лишь от конечного числа N параметров.

Тогда интегралы v_1 и v_2 будут зависеть от этих N параметров и, кроме того, от четырех постоянных интегрирования.

Выражение

$$e^{-\frac{u}{2}} = v_1 v_1^0 - v_2 v_2^0$$

будет функцией от X и Y , зависящей от $N+4$ параметров. Однако эта функция не будет однозначной на поверхности Клейна. Ее можно сделать таковой, если провести соответствующие разрезы.

Далее, можно записать интеграл из раздела IX и повторить рассуждения, основанные на использовании вариационного исчисления, проводившиеся в этом разделе. На этот раз такие рассуждения были бы строгими, поскольку интеграл не содержит более произвольной функции, а зависит лишь от некоторого числа произвольных постоянных и, следовательно, достигает минимума.

О КРИВЫХ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ*

І. Введение

Известно, сколь важна для теории алгебраических поверхностей теорема, доказанная недавно Энрикесом, Кастельнуово и Севери. Согласно этой теореме, число интегралов полных дифференциалов первого рода зависит от иррегулярности поверхности, т. е. от алгебраических нелинейных систем алгебраических кривых, находящихся на этой поверхности.

Я задался целью найти новое чисто трансцендентное доказательство этой теоремы. Интерес такого доказательства заключается в том, что оно показывает зависимость между числом интегралов полных дифференциалов первого рода и числом и распределением некоторых значений u , которые я называю *критическими* и которые играют большую роль в приводимом ниже анализе. Число таких интегралов первого рода зависит также от разности между родом p гиперплоских сечений поверхности и числом поверхностей порядка $n-3$, проходящих через двойную кривую поверхности.

Эти же рассуждения приводят к классификации алгебраических кривых, лежащих на поверхности. Хотя большую часть времени я занимаюсь тем, что привожу известные результаты, я думаю, будет полезно взглянуть на них с новой точки зрения.

ІІ. Определение функций v_i

Пусть $f(x, y, z)=0$ — уравнение алгебраической поверхности; пересечем эту поверхность переменной плоскостью $y=\text{const}$ и пусть

$$u = \int R \frac{dx}{\left(\frac{df}{dz}\right)} \quad (1)$$

— абелев интеграл первого или второго рода ^[1] относительно кривой пересечения

$$f=0, \quad y=\text{const}. \quad (2)$$

* Sur les courbes tracées sur les surfaces algebriques.— Ann. scient. École norm. supér., sér. 3, 1910, 27, 55—108.

Мы предполагаем, что R — рациональная функция от x , y и z ; любой интеграл вида (1) можно привести к виду :

$$U = \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2 + \dots + \rho_{2p} u_{2p} + \Pi, \quad (3)$$

где p — род кривой (2); $u_1, u_2, \dots, u_{2p}$ — $2p$ специальных интегралов вида (1); $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{2p}$ — рациональные функции от y ; Π — рациональная функция от x, y, z . Положим

$$u_i = \int R_i \frac{dx}{\left(\frac{df}{dz}\right)},$$

что я буду записывать так же, как

$$u_i = \int R_i \frac{dx}{f'_z},$$

для определения $2p$ специальных абелевых интегралов $u_1, u_2, \dots, u_{2p}$. Для завершения определения необходимо задать пределы интегрирования. Наиболее простое предположение состоит в том, что пределы интегрирования — два фиксированных, не зависящих от y , значения x : x_0 и x_1 , и предположим сначала, что путь интегрирования от x_0 до x_1 также не зависит от y . В этих условиях интеграл (1) является функцией y , и дифференцирование под знаком интеграла дает

$$\frac{dU}{dy} = \int \left[\frac{d}{dy} \left(\frac{R}{f'_z} \right) \frac{df}{dz} - \frac{d}{dz} \left(\frac{R}{f'_z} \right) \frac{df}{dy} \right] \frac{dx}{f'_z}. \quad (4)$$

Это выражение снова является интегралом первого или второго рода вида (1), и его можно, следовательно, привести к форме (3); однако, так как мы теперь имеем дело уже с определенным интегралом, нужно в выражении (3) заменить Π на $\Pi_1 - \Pi_0$, где Π_1 и Π_0 — результат подстановки в Π x_1 и x_0 вместо x . Чтобы получить du_i/dy , нужно заменить R на R_i в уравнении (4); таким образом, получим

$$\frac{du_i}{dy} = \rho_1^i u_1 + \rho_2^i u_2 + \dots + \rho_{2p}^i u_{2p} + \Pi_1^i - \Pi_0^i, \quad (5)$$

где ρ_k^i и Π^i — значения ρ_k и Π , соответствующие случаю $R = R_i$.

Я запишу это уравнение в виде

$$\Delta u_i = \Pi_1^i - \Pi_0^i, \quad (5a)$$

полагая для краткости

$$\Delta u_i = \frac{du_i}{dy} - \sum \rho^i u = \frac{du_i}{dy} - \rho_1^i u_1 - \dots - \rho_{2p}^i u_{2p}.$$

Такое же уравнение получается, когда точки x_0 и x_1 остаются неподвижными, а путь интегрирования $x_0 x_1$ непрерывно деформируется при изменении y ; в самом деле, это не меняет интеграл u_i . Предположим теперь, что x_0 совпадает с x_1 , и что путь интегрирования — замкнутый

контур; тогда u_i представляет один из периодов соответствующего интеграла, и так как $\Pi_1 = \Pi_0$,

$$\Delta u_i = 0. \quad (5b)$$

Это то самое уравнение, к торым Пикар так часто пользовался в своих исследованиях алгебраических поверхностей [2].

Предположим теперь, что верхний предел x_1 не неподвижен, а меняется вместе с y таким образом, что точка x_1, y, z_1 описывает некоторую алгебраическую кривую C , расположенную на поверхности. Пусть $\frac{du_i}{dy}$ — производная интеграла u_i , вычисленная в предположении, что точка x_1, y, z_1 остается на кривой C , и $\frac{\partial u_i}{\partial y}$ — производная, вычисленная в предположении, что x_1 постоянно; получим

$$\frac{du_i}{dy} = \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y};$$

$\frac{\partial u_i}{\partial y}$ будет задаваться уравнением (5), т. е.

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} = \sum \rho^i u + \Pi_1^i - \Pi_0^i.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{R}{f'_z}$$

— рациональная функция от x, y, z , и чтобы получить $\frac{\partial u_i}{\partial x_1}$, достаточно заменить x и z на x_1 и z_1 ; если

$$\varphi(x, y) = 0$$

— уравнение проекции кривой C на плоскость xy , будем иметь

$$\frac{\partial x_1}{\partial y} = - \frac{\varphi'_y(x_1, y)}{\varphi'_x(x_1, y)},$$

это снова рациональная функция от x_1 и y , так что

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y} = M^i(x_1, y, z_1) = M_1^i$$

— рациональная функция от x_1, y, z_1 . Наше уравнение можно, следовательно, записать так:

$$\Delta u_i = M_1^i + \Pi_1^i - \Pi_0^i. \quad (5c)$$

Во втором члене стоит разность рациональной функции от x_1, y, z_1 и рациональной функции от x_0, y, z_0 .

Кривая C пересекает плоскость $y = \text{const}$ в некотором числе переменных точек (например, в m точках). Пусть $x_1, y, z_1; x_2, y, z_2; \dots; x_m, y, z_m$ — эти m точек. Можно рассмотреть m значений интеграла, принимая x_0 за нижний предел и одну из этих m точек за верхний предел. Пусть

$$u_i^1, u_i^2, \dots, u_i^m$$

— эти m значений; рассмотрим их среднее арифметическое

$$v_i = \frac{1}{m} (u_i^1 + u_i^2 + \dots + u_i^m).$$

Ясно, что

$$\Delta v_i = H^i - \Pi_0^i, \quad (5d)$$

где H^i обозначает среднее арифметическое m выражений

$$\begin{aligned} & M^i(x_1, y, z_1) + \Pi^i(x_1, y, z_1), \\ & M^i(x_2, y, z_2) + \Pi^i(x_2, y, z_2), \\ & \dots \dots \dots \\ & M^i(x_m, y, z_m) + \Pi^i(x_m, y, z_m). \end{aligned}$$

Заметим, что H^i — рациональная функция y .

Поступим теперь с нижним пределом интегрирования так же, как с верхним. Предположим, что точка x_0, y, z_0 , служащая нижним пределом, уже не постоянна, а описывает алгебраическую кривую C_0 ; получим тогда

$$\Delta u_i = M_1^i + \Pi_1^i - M_0^i - \Pi_0^i,$$

где M_0^i образована по кривой C_0 и точке x_0, y, z_0 , а M_1^i — по кривой C и точке x_1, y, z_1 .

Если кривая C_0 пересекает плоскость $y = \text{const}$ в m_0 переменных точках, обозначим через v_i среднее арифметическое $m \cdot m_0$ интегралов u_i , в которых за нижний предел принимается одна из m_0 точек пересечения плоскости $y = \text{const}$ с кривой C_0 , а за верхний предел — одна из m точек пересечения той же плоскости с кривой C ; впрочем,

$$v_i = v_i' - v_i'',$$

где v_i' обозначает среднее арифметическое m интегралов с верхним пределом — одной из m точек C и нижним пределом — фиксированным значением X , а v_i'' обозначает среднее арифметическое m_0 интегралов с верхним пределом — одной из m_0 точек C_0 и нижним пределом X .

Видно также, что

$$\Delta v_i = \frac{1}{m} \sum (M_1^i + \Pi_1^i) - \frac{1}{m_0} \sum (M_0^i + \Pi_0^i),$$

где $\sum (M_1^i + \Pi_1^i)$ — сумма m аналогичных функций относительно m точек C и $\sum (M_0^i + \Pi_0^i)$ — сумма m_0 аналогичных функций относительно m_0 точек C_0 . Но

$$\frac{1}{m} \sum (M_1^i + \Pi_1^i) = H_i; \quad \frac{1}{m} \sum (M_0^i + \Pi_0^i) = H_i^0$$

— рациональные функции от y ; мы приходим, таким образом, к линейному уравнению

$$\Delta v_i = H_i - H_i^0, \quad (5e)$$

где второй член — рациональная функция от y .

Можно заменить кривую C_0 на одну или несколько неподвижных точек следующим образом.

Перейдем к однородным координатам, и пусть

$$f(x, y, z, t) = 0$$

— уравнение поверхности в однородных координатах. Плоскость $y = \text{const}$ заменится на $y/t = \text{const}$; в этом случае прямая $y = t = 0$ будет принадлежать всем плоскостям $y/t = \text{const}$; она пересекает поверхность в некотором числе точек, равном степени поверхности, и мы можем без существенного ограничения общности предположить, что все эти точки различны. Примем одну из этих точек за нижний предел; эта точка будет бесконечно удаленной точкой кривой (2), характеризуемой бесконечными значениями координат x_0 и z_0 и конечным значением отношения z_0/x_0 ; переменная y остается конечной, но изменяющейся, когда плоскость $y/t = \text{const}$ вращается вокруг прямой $y = t = 0$. Нижний предел соответствует, таким образом, фиксированному значению x_0 , и H_i^0 редуцируется к единственному члену $M_0^i + \Pi_0^i$ и даже к Π_0^i , потому что $M_0^i = 0$; если придать x_0 и z_0 бесконечные значения, отношение которых конечно и задано, $\Pi_i(x_0, y, z_0)$, очевидно, будет рациональной функцией y .

Можно еще взять среднее арифметическое m_0 интегралов, в качестве нижнего предела которых берется одна из точек пересечения поверхности с $y = t = 0$. Предположим, например, что поверхность имеет степень 5, и что A, B, C, D, E — пять точек пересечения с $y = t = 0$. Можно взять тогда $m_0 = 10$, полагая, что четыре нижних предела совпадают с A , 3 — с B , 2 — с C , 1 — с D , или приняв любые другие аналогичные предположения. Получим тогда

$$H_i^0 = \frac{1}{m_0} \sum \Pi_0^i; \quad M_0^i = 0.$$

Мы будем чаще всего брать $m = m_0$, что всегда возможно сделать, принимая, например, за кривую C_0 m раз взятую одну из точек пересечения поверхности с прямой $y = t = 0$.

III. Свойства функций v_i

Рассмотрим снова функции v_i , определенные в предыдущем разделе; кривая C будет алгебраической кривой, пересекающейся с плоскостью $y = \text{const}$ в m переменных точках; кривая C_0 заменяется некоторой точкой пересечения поверхности с прямой $y = t = 0$, взятой m раз; эту точку я буду обозначать O . Выражения

$$u_1, u_2, \dots, u_p$$

будут интегралами первого рода; мы оставим пока в стороне интегралы второго рода $u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_{2p}$ и соответствующие функции $v_{p+1}, v_{p+2}, \dots, v_{2p}$. Функции

$$R_1, R_2, \dots, R_p$$

будут многочленами от x и z степени $n-3$, где n — степень поверхности; эти функции будут рациональными от y и будут обращаться в нуль на двойной кривой поверхности.

Если исключить $v_{p+1}, v_{p+2}, \dots, v_{2p}$ из уравнений (5e) предыдущего раздела, то получится система p линейных уравнений второго порядка с рациональными коэффициентами и рациональным вторым членом. Исследуем подробнее свойства этих функций $v_1, v_2, \dots, v_p$.

Когда y описывает замкнутый контур, эти функции заменяются на

$$v_1 + \frac{1}{m} \Omega_1, \quad v_2 + \frac{1}{m} \Omega_2, \quad \dots, \quad v_p + \frac{1}{m} \Omega_p,$$

Ω_1 — один из периодов интеграла u_1 и Ω_i — соответствующий период интеграла u_i . Если p уравнений второго порядка, полученных из уравнений (5e) исключением $v_{p+1}, \dots, v_p$, записать в виде

$$D(v_i) = S_i, \tag{1}$$

где $D(v_i)$ — линейные выражения (с рациональными по y коэффициентами) относительно v_i и их производных первого и второго порядка, а S_i — рациональна по y , то Ω_i будут удовлетворять уравнениям без второго члена

$$D(\Omega_i) = 0. \tag{2}$$

Какие же значения y будут точками ветвления? Среди плоскостей $y = \text{const}$ будут плоскости, которые касаются поверхности; пусть $y = y_0$ — одна из таких плоскостей; она пересекает поверхность по кривой, имеющей на единицу больше двойных точек, чем пересечение той же поверхности с плоскостью $y = y_0 + \varepsilon$, и род которой поэтому равен $p-1$. Такие значения y_0 и будут искомыми точками ветвления.

Стоит немного уточнить природу различных особенностей, которые могут встретиться. Рассмотрим наши p абелевых интегралов u_i и $2p$ нормальных периодов первого и второго рода. Пусть $\alpha_{ik} + \sqrt{-1} \alpha'_{ik}$ есть k -й

нормальный период первого рода u_i , $\beta_{ik} + \sqrt{-1}\beta'_{ik}$ есть k -й нормальный период второго рода u_i . Рассмотрим, с другой стороны, выражения

$$a_k = \sum (\mu_i \alpha_{ik} + \mu'_i \alpha'_{ik}); \quad b_k = \sum (\mu_i \beta_{ik} + \mu'_i \beta'_{ik});$$

$$c_k = \sum (\nu_i \alpha_{ik} + \nu'_i \alpha'_{ik}); \quad d_k = \sum (\nu_i \beta_{ik} + \nu'_i \beta'_{ik});$$

функция

$$\sum (a_k d_k - b_k c_k) = F(\mu, \mu', \nu, \nu')$$

является билинейной формой относительно μ, μ' и ν, ν' , которая обращается в нуль:

- 1) когда $\mu_i = \nu_i, \mu'_i = \nu'_i$;
- 2) когда $\mu'_i = \sqrt{-1}\mu_i, \nu'_i = \sqrt{-1}\nu_i$, так как тогда a_k, b_k, c_k, d_k — нормальные периоды двух абелевых интегралов

$$\sum \mu_i u_i, \quad \sum \nu_i u_i;$$

3) положим теперь

$$\mu_i = \nu'_i, \quad \nu_i = -\mu'_i,$$

так что

$$F(\mu, -\nu, \nu, \mu) = \Phi(\mu, \nu)$$

образует квадратичную форму от μ и ν . Легко видеть, что в этом случае

$$a_k + \sqrt{-1}c_k, \quad b_k + \sqrt{-1}d_k$$

являются нормальными периодами интеграла

$$U = \sum (\mu_i + \sqrt{-1}\nu_i) u_i.$$

Следовательно, согласно известной теореме, наша форма равна двойному интегралу

$$\iint \left| \frac{dU}{dx} \right|^2 d\sigma, \quad (3)$$

взятому по всей римановой поверхности ($d\sigma$ представляет произведение вещественной и мнимой части dx).

Таким образом, мы имеем особенности:

1. Если один из периодов обращается в нуль сразу для всех интегралов u_i , или, более общо, если можно найти такие целые числа m_k, m'_k , что выражение

$$\left| \sum m_k (\alpha_{ik} + \sqrt{-1}\alpha'_{ik}) + \sum m'_k (\beta_{ik} + \sqrt{-1}\beta'_{ik}) \right|$$

становится сколь угодно малым, причем одновременно для всех интегралов u_i . Это условие можно выразить иначе: оно означает, что определитель, состоящий из $2r$ строк и $2r$ столбцов и составленный из α и α' , β и β' , обращается в нуль. Но дискриминант формы Φ равен квадрату этого определителя. Поэтому этот дискриминант должен обращаться в нуль. Существуют, следовательно, вещественные значения μ и ν , отлич-

ные от нуля, для которых форма Φ нулевая, и для которых, следовательно, интеграл U таков, что двойной интеграл (3) обращается в нуль. А так как его элементы положительны, dU/dx должно быть тождественным нулем. Итак, необходимым и достаточным условием появления указанного обстоятельства является существование чисел $\lambda = \mu + \sqrt{-1}\nu$, для которых тождественно

$$\frac{1}{\left(\frac{df}{dz}\right)} (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \dots + \lambda_p R_p) = 0.$$

Значения y , для которых это так, будут называться *критическими значениями*; точнее, мы будем говорить, что критическое значение принадлежит интегралу $U = \sum \lambda_i u_i$.

В простейшем случае, когда поверхность не имеет двойных кривых,

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Мы можем предположить тогда, что

$$R_i = \rho_i M_i,$$

где ρ_i — рациональная функция от y , а M_i — целый моном относительно x и z степени не больше $n-3$. Тогда должно быть

$$\frac{\lambda_i \rho_i}{\left(\frac{df}{dz}\right)} = 0.$$

Если мы сначала отбросим случай бесконечного y , то это уравнение можно записать в виде

$$\lambda_i \rho_i = 0.$$

Однако все λ_i не могут одновременно обращаться в нуль; нужно, следовательно, чтобы исчезала хотя бы одна из функций ρ_i . Критические значения y — это значения, аннулирующие одну из ρ_i .

Кроме того $y = \infty$ может быть критическим значением; чтобы учесть это, перейдем к четырем однородным координатам x, y, z, t и пусть

$$u_i = \int F(x, y, z) dx = \int \frac{\rho M dx}{\left(\frac{df}{dz}\right)};$$

мы получим соответствующее выражение в однородных координатах, записывая

$$u_i = \int F\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) \frac{dx}{t} = \int \frac{\rho M dx}{\left(\frac{df}{dz}\right)},$$

где ρM должно быть однородным степени $n-2$, и, следовательно, ρ — однородным степени $n-2-q$, если моном M имеет степень q . Таким образом, ρ будет однородной рациональной функцией степени $n-2-q$ от y и t ; если одна из функций ρ_i , превращенная таким способом в однородную, обращается в нуль при $t=0$, нужно рассматривать $y=\infty$ как критическое значение.

Так как $q \leq n-3$, степень ρ_i всегда положительна, значит ρ_i всегда обращается в нуль либо для $t=0$, либо для конечного значения y/t . Поэтому обязательно имеются критические значения y . Зато всегда можно выбрать функции ρ_i так, чтобы критическими значениями были наперед заданные значения y .

Более общо, положим

$$u_k = \int \frac{R_k dx}{f'_z},$$

где f'_z — однородная функция от x, y, z, t степени $n-1$ и R_k — степени $n-2$, и

$$R_k = \sum \rho_{ik} M_i,$$

где M_i — те же мономы от x и z , а ρ_{ik} — рациональные функции, однородные по y и t . Критические значения y задаются тогда условием обращения в нуль определителя ρ_{ik} (имеющего $p=(n-1)(n-2)/2$ строк и столбцов). Так как этот определитель является однородной рациональной функцией от y и t *положительной степени*, то обязательно будут существовать критические значения.

Предположим теперь, что поверхность имеет двойную кривую порядка d , так что

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d, \quad p < \frac{(n-1)(n-2)}{2};$$

число R_k будет тогда меньше числа мономов M_i ; ρ_{ik} должны быть выбраны так, чтобы R_k обращались в нуль на двойной кривой. Чтобы получить критические значения y , нужно записать, что определители, содержащиеся в таблице (в которой столбцов больше, чем строк), обращаются одновременно в нуль. Вполне может случиться, что критических значений нет, так как эти определители могут не обращаться в нуль одновременно.

Несколько примеров сделают это более понятным: пусть дана поверхность четвертого порядка с двойной прямой ($p=2$). Поверхности $R_k=0$ должны пересекать плоскость $y=\text{const}$ по прямой ($n-3=1$), встречающейся с двойной прямой. Впрочем, это поверхности второго порядка, так что можно провести через двойную прямую две линейно независимые плоскости

$$P_1=0, \quad P_2=0,$$

которые позволяют записать

$$R_1 = S_1 P_1, \quad R_2 = S_2 P_2$$

(S_1 и S_2 — два многочлена первой степени по y и t), откуда получаем два критических значения при $S_1=0$ и при $S_2=0$ *.

Предположим, однако, что наша поверхность четвертого порядка имеет две двойные прямые, которые не пересекаются ($p=1$); поверхность $R_k=0$ пересекает плоскость $y=\text{const}$ вдоль прямой, проходящей через две двойные прямые; будучи второго порядка, она является параболоидом, опирающимся на эти две прямые. Так как этот параболоид неразложим, и, следовательно, его уравнение не может удовлетворяться тождественно ни при каком постоянном значении y , критических значений нет.

В качестве третьего примера рассмотрим поверхность шестого порядка, обладающую двойной биквадрикой и двойной прямой, которые между собой не пересекаются; имеем

$$p=5, \quad n-2=4, \quad n-3=3.$$

Поверхности $R_k=0$ четвертого порядка, и они должны пересекать плоскость $y=\text{const}$ по кубике, встречающейся с двумя двойными кривыми. Мы должны выяснить, существуют ли поверхности третьего порядка, проходящие через эти двойные кривые. Пусть

$$\Sigma_1=0, \quad \Sigma_2=0, \quad P_1=0, \quad P_2=0$$

— уравнения двойной биквадрики и прямой, Σ — второго порядка и P — первого. Это дает нам четыре различные поверхности третьего порядка, проходящие через двойные кривые **

$$\Sigma_1 P_1=0, \quad \Sigma_1 P_2=0, \quad \Sigma_2 P_1=0, \quad \Sigma_2 P_2=0.$$

Можно положить

$$R_1=S_1 \Sigma_1 P_1, \quad R_2=S_2 \Sigma_1 P_2, \quad R_3=S_3 \Sigma_2 P_1, \quad R_4=S_4 \Sigma_2 P_2,$$

где S — многочлены первой степени от y и t ; критические значения соответствуют нулям S .

Но это только четыре R_k ; так как $p=5$, существует пятая, независимая от четырех других функция, которая не может иметь такую форму. Существует, следовательно, абелев интеграл, для которого нет критических значений. Отсюда видно, какая связь имеется между числом критических значений, с одной стороны, и разностью между родом p и числом поверх-

* Эта поверхность имеет бирациональное представление на плоскость (A. Clebsch. Math. Ann., 1869, 1, 261); поэтому она не имеет интегралов первого рода; отсюда, согласно предложению, которое будет установлено позже (стр. 338), никакой абелев интеграл, связанный с плоским сечением, не может избежать критического значения. (P. Г.).

** Других нет, так как любая поверхность третьего порядка S_3 , проходящая через биквадрику C , имеет уравнение вида $\Sigma_1 Q_1 + \Sigma_2 Q_2 = 0$ (Q_1, Q_2 — многочлены первой степени; нужно использовать систему координат, в которой уравнение C имеет вид $y^2 - t^2 - x^2 = 0 = z^2 - t^2 + k^2 x^2$; можно еще заметить, что биквадрика накладывает 12 условий на кубическую поверхность, содержащую ее; см., например: E. Picard. G. Simart. Указ. соч., t. 1, p. 227). Если, кроме того, S_3 проходит через прямую D , уравнение которой может быть приведено к виду $x=0=y$ (уже в другой системе координат), получаем, замечая, что D не пересекает C , что $Q_1(0, 0, z, t) \equiv 0$ и $Q_2(0, 0, z, t) \equiv 0$. (P. Г.).

ностей порядка $n-3$, проходящих через двойные кривые, — с другой [3]. Это тем более важно, что это число связано, как будет видно дальше, с числом интегралов полных дифференциалов первого рода. Однако наше обсуждение не будет полным, если мы не скажем здесь о кажущихся критических значениях.

Предположим, например, что $f=0$ — конус третьей степени с вершиной в начале координат. Можно тогда записать

$$u = \int \frac{(\alpha y + \beta t) dx}{f'_z};$$

критическое значение задается условием $\alpha y + \beta t = 0$; так как его можно выбирать произвольно, положим $\alpha y + \beta t = y$. Запишем

$$u = \int \frac{y dx}{f'_z}.$$

Критическое значение $y=0$ становится тогда *кажущимся*. Мы доказали, что если один из периодов обращается в нуль (или, более общо, если можно сделать периоды сколь угодно малыми по модулю), то одно из критических значений тождественно аннулирует u ; однако мы не доказывали обратного. Здесь интеграл однороден степени 0 по x, y, z ; периоды ω не зависят от y , следовательно, они не обращаются в нуль, когда y принимает значение 0, которое, таким образом, является лишь кажущимся критическим значением.

Предположим теперь, что поверхность $f=0$ обладает конической точкой в начале координат и касательный конус имеет род $p' > 0$ и степень h . Рассмотрим p интегралов

$$u_k = \frac{R_k dx}{f'_z}.$$

Предположим, что R_k делится на y , так что $y=0$ является критическим значением, кажущимся или настоящим.

Положим [4]

$$x = \xi y, \quad z = \zeta y, \quad f = y^h \varphi, \quad R_k = y^\mu S_k;$$

в самом деле, после замены переменных f делится на y^h ; что касается R_k , который и раньше делился на y , то мы предположим, что после замены переменных он делится на y^μ и что S_k на y уже не делится; получаем тогда

$$u_k = \int \frac{y^{\mu-h+2} S_k d\xi}{\varphi'_\zeta}.$$

Если $\mu > h-2$, значение $y=0$ действительно является критическим для нашего интеграла; если $\mu = h-2$, это только кажущееся критическое значение; если $\mu < h-2$, это будет одно из значений, для которых u_k становится бесконечным и которое мы назовем вскоре *критическим зна-*

чением второго сорта. Этих примеров достаточно для понимания того, что подразумевается под кажущимся критическим значением.

Я утверждаю, что всегда можно выбрать R_i так, что заданное значение y_0 не будет критическим. В самом деле, запишем

$$R_i = \frac{P_i}{Y},$$

где Y — однородный многочлен степени ν по y и t , один и тот же для всех функций R_i , и где $P_i = 0$ — поверхность степени $n + \nu - 2$, проходящая через двойную кривую. Предположим, что y_0 — критическое значение порядка h , т. е. что существуют q линейных комбинаций P_i , $\sum \lambda_i^{(k)} P_i$, которые делятся на $(y - y_0)^{\alpha_k}$, и $\sum \alpha_k = h$.

Положим тогда

$$\begin{aligned} \sum \lambda_i^{(k)} P_i &= \left(\frac{y - y_0}{y - y_1} \right)^{\alpha_k} \sum \lambda_i^{(k)} P'_i \quad (k = 1, 2, \dots, q), \\ \sum \mu_i^{(k)} P_i &= \sum \mu_i^{(k)} P'_i \quad (k = 1, 2, \dots, p - q), \end{aligned}$$

где коэффициенты μ выбраны так, что определитель λ и μ не нулевой. Образум R'_i , ρ'_{ik} и u'_i из P'_i точно так же, как R_i , ρ_{ik} и u_i образованы из P_i .

Так как y_0 — критическое значение порядка h , любой определитель, полученный из таблицы ρ_{ik} , делится на $(y - y_0)^h$, и степень эта не может быть повышена. Определители, составленные по таблице ρ'_{ik} , получены умножением соответствующих определителей таблицы ρ_{ik} на множители

$$\left(\frac{y - y_1}{y - y_0} \right)^{\sum \alpha_k} = \left(\frac{y - y_1}{y - y_0} \right)^h.$$

Поэтому эти определители не делятся одновременно на $y - y_0$, т. е. y_0 не является критическим значением для u'_i , что и требовалось доказать.

2. Назовем критическими значениями второго сорта значения y , при которых одно из выражений R_k тождественно обращается в бесконечность. Они появляются, в случае отсутствия двойной кривой, в бесконечностях ρ_i , или, более общо, в нулях знаменателя Y . Так как знаменатель может быть выбран произвольно, критические значения второго сорта также могут быть выбраны произвольными. Как мы увидим в разделе VIII, можно добиться того, чтобы их не стало совсем.

3. Назовем, наконец, особыми значениями y те, в которых плоскость $y = \text{const}$ касается поверхности, или, более общо, те значения y , для которых род кривой пересечения K_y поверхности с плоскостью меньше p . Вообще говоря, особые значения будут точками ветвления периодов, рассматриваемых как функции y . Это может произойти только в том случае, если один из периодов становится нулевым или бесконечным; если особое значение не является в то же время критическим, период не может быть нулевым, значит он должен быть бесконечным.

В случае обыкновенной касательной плоскости можно, выбрав подходящим образом периоды, расположить их в следующем порядке:

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2p},$$

который заменяется на

$$\omega_1 + \omega_2, \omega_2, \dots, \omega_{2p},$$

когда y обходит вокруг особого значения; только первый период ω_1 становится бесконечным.

Критические значения можно выбирать произвольно, поэтому можно считать, что ни одно значение не является одновременно особым и критическим; значение, не являющееся особым или критическим, будет обыкновенным.

Таким образом: 1) в окрестности обыкновенного значения функции v и периоды ω являются голоморфными функциями от y ; 2) в окрестности особого значения функции

$$v_1, v_2, \dots, v_p$$

могут перестать быть голоморфными, однако можно найти систему периодов наших интегралов u_i , а именно:

$$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_p,$$

такую, что

$$v_1 + \frac{1}{m} \Omega_1, \quad v_2 + \frac{1}{m} \Omega_2, \quad \dots, \quad v_p + \frac{1}{m} \Omega_p$$

остаются голоморфными. Действительно, v_i — среднее арифметическое интегралов u_i , взятых от точки C_0 до соответствующей точки C вдоль некоторого пути интегрирования. Если в то время, когда y принимает особое значение, ни один из этих путей интегрирования не проходит через новую двойную точку (точку касания поверхности с плоскостью $y = \text{const}$), функции v_i остаются голоморфными. При замене одного пути интегрирования другим v_i заменяются на

$$v_i + \frac{1}{m} \Omega_i,$$

где Ω_i — период. Но всегда можно выбрать путь интегрирования, не проходящий через новую двойную точку; таким образом всегда можно найти такой период, что $v_i + \frac{1}{m} \Omega_i$ остается голоморфным.

Это рассуждение оказывается ошибочным в двух случаях:

1) если кривая C проходит через новую двойную точку, то путь интегрирования, упирающийся в эту новую двойную точку, не может ее избежать;

2) если кривая K_y распадается, и при этом точки пересечения K_y с C_0 лежат на одной ее компоненте, а соответствующая точка пересечения

K_y с C — на другой. В этом случае нельзя пройти из одной точки в другую, оставаясь на кривой K_y и не проходя через пересечение двух компонент, т. е. через новую двойную точку. Эти два исключительных случая могут произойти только при определенных выборах координатных осей, выборах, которых всегда можно избежать.

Различные значения функции v_i , как мы видели, имеют вид $v_i + \frac{1}{m} \Omega_i$; однако я не утверждаю, что одно из значений v_i должно оставаться голоморфным, так как я не знаю, все ли выражения $v_i + \frac{1}{m} \Omega_i$ могут встречаться в них и, следовательно, все ли такие выражения являются значениями v_i .

4. Что же происходит около критического значения y_0 первого сорта, которое мы предположим нелинейным? Можно найти между R_i линейное соотношение

$$\sum \alpha_i R_i = 0,$$

где α — постоянные коэффициенты, которое будет тождественно выполняться для всех x и z при $y = y_0$; другими словами, при $y = y_0$ R_i перестают быть линейно независимыми.

Мы можем, однако, найти рациональные функции $\sigma_{ik}(y)$, определитель которых отличен от нуля при $y = y_0$, и такие, что если положить

$$R'_k = \sum \sigma_{ik} R_i,$$

то значение $y = y_0$, критическое для R_i , уже не будет критическим для R'_k . В самом деле, мы уже видели, что можно выбрать R таким образом, чтобы заданное значение y не было критическим. Если теперь обозначить через u'_k интегралы, аналогичные u_i , и через v'_k — аналогичные v_i функции, образованные при помощи R'_k , то получим

$$u'_k = \sum \sigma_{ik} u_i, \quad v'_k = \sum \sigma_{ik} v_i.$$

Значение $y = y_0$ — не критическое для R'_k , поэтому v'_k должны оставаться голоморфными при $y = y_0$; отсюда заключаем, что не только v_i остаются голоморфными, но и что выражение $\sum \alpha_i v_i$, соответствующее интегралу $\sum \alpha_i u_i$, которому принадлежит критическое значение, должно обращаться в нуль при $y = y_0$.*

5. В окрестности критического значения второго сорта делается то же самое; можно выбрать рациональные функции σ_{ik} так, что это значение не будет критическим для $R'_k = \sum \sigma_{ik} R_i$. Тогда v'_k должны оставаться голоморфными, хотя v_i могут обращаться в бесконечность.

В итоге, если y_0 — критическое значение, такое, что $\sum \alpha_i R_i$ делится на $(y - y_0)^h$, то $\sum \alpha_i v_i$ должно делиться на $(y - y_0)^h$; если y_0 — критическое

* Более того, это же верно для произвольного периода Ω суммы $\sum \alpha_i v_i$; это свойство будет использовано в условии 3 раздела IV (стр. 325). (Р. Г.).

значение второго сорта, то v_i могут становиться бесконечными того же порядка, что и R_i . Будем говорить в таком случае, что функции v_i ведут себя *регулярно*.

Если, например, поверхность $f=0$ третьей степени, то на ней имеется только один интеграл первого рода, который я запишу так:

$$u = \int \frac{y(y-1)dx}{(y-2)f'_z};$$

два его периода будут ω и ω' .

Если отбросить особые значения, то для всех значений y , отличных от 0, 1 и 2, v , ω и ω' остаются конечными; для $y=0$ или 1 v , ω и ω' обращаются в нуль так, что v/ω и v/ω' остаются конечными; для $y=2$ v , ω и ω' становятся бесконечными, причем v/ω и v/ω' ограничены.

Осталось сделать последнее замечание. Пусть $y_1, y_2, \dots, y_q$ — различные особые значения y . Соединим их с началом координат [5] разрезами $Q_1, Q_2, \dots, Q_q$. Предположим, что эти разрезы не пересекаются, и что окружность достаточно большого радиуса встречает их последовательно в перечисленном порядке. Предположим, что когда пересекается разрез Q_k , v_i меняется на $v_i + \frac{1}{m} \Omega_i$. Когда последовательно пересекаются все разрезы $Q_1, Q_2, \dots, Q_q$, v_i возвращается к своему первоначальному значению.

Предположим для простоты, что имеется только три разреза Q_1, Q_2, Q_3 , и отбросим индекс i . Когда пересекаются Q_1, Q_2 или Q_3 , v заменяется соответственно на $v + \frac{1}{m} \Omega^{(1)}$, $v + \frac{1}{m} \Omega^{(2)}$, $v + \frac{1}{m} \Omega^{(3)}$; когда пересекается Q_2 , $\Omega^{(1)}$ меняется на $\Omega'^{(1)}$; когда пересекается Q_3 , $\Omega^{(2)}$ меняется на $\Omega'^{(2)}$ и $\Omega'^{(1)}$ на $\Omega''^{(1)}$; таким образом, когда последовательно будут пересечены три разреза, v заменится на

$$v + \frac{1}{m} (\Omega''^{(1)} + \Omega'^{(2)} + \Omega^{(3)}),$$

и поэтому должно быть выполнено

$$\Omega''^{(1)} + \Omega'^{(2)} + \Omega^{(3)} = 0. \quad (4)$$

Еще одно замечание. Пикар показал, что при помощи бирационального преобразования всегда можно заменить поверхность на другую, не имеющую уже других особенностей, кроме двойной кривой с тройными точками [6], у которой, поэтому, особыми значениями y будут только те, для которых плоскость $y=\text{const}$ касается поверхности. Мы можем всегда выбрать координатные оси таким образом, чтобы эти касательные плоскости были обыкновенными касательными плоскостями. Тогда периоды ведут себя особенно просто. Пусть

$$\omega_i, \omega'_i, \omega''_i, \dots$$

— периоды u_i ; можно всегда выбрать нормальные периоды так, что $\omega_i, \omega_i'', \dots$ не меняются, когда y обходит вокруг особого значения, в то время как ω_i' (который приобретает логарифмическую особенность при этом значении), меняется на $\omega_i' + \omega_i$. Что же касается u_i , то оно меняется на $u_i + \mu \omega_i$, где μ — целое число, зависящее от выбранного значения u_i .

Мы говорим, что $y=y_0$ — критическое значение n -го порядка для u_i , если различные периоды Ω_i интеграла u_i имеют нули или бесконечности самое большее n -го порядка; необходимо тогда, чтобы v_i обращалось в нуль или бесконечность по крайней мере n -го порядка; и это другой способ выразить условия 3 и 4. Критическое значение порядка $n > 1$ можно рассматривать как слияние n критических значений первого порядка в том же смысле, как и кратные корни алгебраических уравнений.

Что касается функций v_i , удовлетворяющих условиям, сформулированным в настоящем разделе, то мы будем называть их *нормальными*.

IV. Кривые, соответствующие функциям v_i

Предположим, что задана система *нормальных* функций $v_1, v_2, \dots, v_p$, т. е. функций, удовлетворяющих следующим условиям:

1) все они являются голоморфными функциями y , за исключением особых или критических значений;

2) в окрестности особого значения они могут обращаться в бесконечность или становиться неоднозначными; однако существует период Ω_i , такой, что

$$v_i + \frac{1}{m} \Omega_i$$

остается голоморфным;

3) в окрестности критического значения отношения v_i/Ω_i остаются голоморфными.

Я утверждаю, что существует алгебраическая кривая C , соответствующая этим функциям.

Для начала мы можем предполагать $m=p$, умножая нашу функцию на константу m/p . Мы знаем теперь, что, если рассмотреть алгебраическую кривую рода p и если $u_1, u_2, \dots, u_p$ — соответствующие интегралы первого рода, а $v_1, v_2, \dots, v_p$ — заданные постоянные, то всегда можно найти абсциссы $x_1, x_2, \dots, x_p$ p точек кривой из p уравнений

$$\int_{x_1^0}^{x_1} du_i + \int_{x_2^0}^{x_2} du_i + \dots + \int_{x_p^0}^{x_p} du_i = p v_i \quad (i = 1, 2, \dots, p). \quad (1)$$

Нижние пределы интегрирования $x_1^0, \dots, x_p^0$ выбраны раз и навсегда некоторым способом.

1. Уравнения (1) однозначно определяют неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_p$.

2. Исключение составляют некоторые особенные системы значений постоянных v_i ; эти исключительные системы соответствуют случаю, когда p точек $M_1, M_2, \dots, M_p$ с абсциссами $x_1, x_2, \dots, x_p$ лежат на одной и той же присоединенной кривой порядка $n-3$.

3. Решения уравнений не меняются, если ко вторым членам добавляется период.

Применим это правило к интересующему нас случаю. Положим сначала, следуя нашему соглашению,

$$x_1^0 = x_2^0 = \dots = x_p^0,$$

так что точка с абсциссой x_1^0 , служащая нижним пределом интегрирования, является одной из точек пересечения поверхности с прямой $y=t=0$.

Примем теперь за v_i значения функций рассматриваемой системы. Когда y меняется, точки $M_1, M_2, \dots, M_p$ с абсциссами $x_1, x_2, \dots, x_p$ будут располагаться на поверхности и порождать некоторую кривую, которую я обозначу через C .

Когда y описывает замкнутый контур вокруг особого значения, найдутся, по предположению, периоды Ω_i , такие, что $v_i + \frac{1}{p} \Omega_i$ остаются голоморфными; после обхода по этому контуру Ω_i заменяются на $\Omega_i - \Omega'_i$, где Ω'_i — другой период. Таким образом v_i меняется на $v_i + \frac{1}{p} \Omega'_i$, т. е. ко вторым членам уравнений (1) добавляется период. Поэтому система точек $M_1, M_2, \dots, M_p$ остается в прежнем положении.

Отсюда вытекает, что кривая C пересекает плоскость $y=\text{const}$ в p подвижных точках. Однако из этого еще не следует, что кривая C алгебраическая и степень ее равна p . В самом деле, она может проходить через точки, принадлежащие всем плоскостям $y=\text{const}$, т. е. через точки пересечения поверхности $f=0$ с прямой $y=t=0$. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — эти n точек пересечения; если точка A_k является кратной точкой C порядка μ_k и μ_k конечны, кривая C будет алгебраической порядка $p + \sum \mu_k$; если же хоть одно из μ_k бесконечно, кривая C трансцендентна. Как же определить μ_k ?

Пусть

$$a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{pk}$$

— значения интегралов $u_1, u_2, \dots, u_p$, соответствующие точке A_k ; заметим, что для одной из этих точек, например для A_1 , все a_{i1} нулевые, поскольку эта точка является, по нашему соглашению, нижним пределом всех интегралов.

Для того чтобы кривая C проходила через A_k , нужно, чтобы одна из точек M , например M_p , совпадала с A_k при некотором значении y ; в этом случае

$$pv_i - a_{ik} = \int_{M_1} du_i + \int_{M_2} du_i + \dots + \int_{M_{p-1}} du_i.$$

Напомним теперь одно фундаментальное свойство функции Θ ; можно выбрать нижний предел интегрирования таким образом, чтобы тождественно (каковы бы ни были верхние пределы $M_1, M_2, \dots, M_{p-1}$) выполнялось

$$\Theta \left(\int^{M_1} du_i + \int^{M_2} du_i + \dots + \int^{M_{p-1}} du_i \right) = 0 \quad [7].$$

Это хорошо известная теорема Римана. Мне, однако, предпочтительнее сформулировать ее следующим образом, сохраняющим соглашение, принятое раньше относительно нижнего предела наших интегралов. Можно найти величины h_i , являющиеся функциями только y , для которых тождественно выполняется *

$$\Theta \left(\int^{M_1} du_i + \int^{M_2} du_i + \dots + \int^{M_{p-1}} du_i - h_i \right) = 0,$$

или

$$\Theta (pv_i - a_{ik} - h_i) = 0. \quad (2)$$

* Напомним формулировку теоремы Римана. Если положить

$$\int^{M_j} du_i = u_i(M_j),$$

то уравнение относительно M

$$\Theta (u_i(M) + c_i) = 0,$$

где $c_1, \dots, c_p$ — некоторые постоянные, имеет в общем случае p корней $M_1, \dots, M_p$, и эти корни таковы, что

$$\sum_{j=1}^p u_i(M_j) = h_i - c_i, \quad (\alpha)$$

где h_i (постоянные Римана) не зависят от c_i (см.: С. J o r d a n. Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, t. 2. 2^e éd. Paris, 1894, n. 575, p. 619, form (10)). Далее, уравнение относительно M

$$\Theta \left[u_i(M) - \sum_{j=1}^p u_i(M_j) + h_i \right] = 0$$

выполнено для $M = M_p$, поэтому из четности Θ следует

$$\Theta \left[\sum_{j=1}^{p-1} u_i(M_j) - h_i \right] = 0, \quad (\beta)$$

и это верно для любых $M_1, \dots, M_{p-1}$; в самом деле, c_i могут быть произвольны и, в частности, могут быть вычислены по $M_1, \dots, M_{p-1}$ (и по какому-нибудь M_p). (Р. Г.).

Кроме того, Риман доказал, что если рассмотреть $2p-2$ точки пересечения кривой рода p с присоединенной кривой порядка $n-3$, исключив из рассмотрения двойные точки, и образовать сумму

$$\sum^M \int du_i, \quad (3)$$

где суммирование распространяется на рассматриваемые $2p-2$ точки, то получим *

$$\sum^M \int du_i = 2h_i. \quad (3bis)$$

С другой стороны, по теореме Абеля, если взять сумму (3), где суммирование распространено на сей раз на все точки пересечения данной кривой с произвольной кривой степени k , то получится константа. Так, например, при $k=1$ эта константа будет $\sum a_{ik}$, потому что, рассматривая прямую $y=t=0$, мы получаем это значение; если $k=n-3$, константа равна

$$(n-3) \sum a_{ik}.$$

Это будет, таким образом, значение суммы (3), примененной ко всем пересечениям нашей присоединенной кривой порядка $n-3$, включая двойные точки. Я могу поэтому записать

$$2h_i + b_i = (n-3) \sum a_{ik}, \quad (4)$$

где

$$b_i = \sum^M \int du_i,$$

а суммирование распространено на двойные точки; каждая двойная точка дает два интеграла, соответствующих двум ветвям кривой, проходящей через эту точку.

Излишне добавлять, что уравнения (3bis) и (4) и аналогичные им уравнения выполнены с точностью до прибавления кратных периода. Уравнение (2) превращается теперь в

$$\Theta \left(pv_i - a_{ik} + \frac{1}{2} b_i - \frac{n-3}{2} \sum a_{ik} \right) = 0. \quad (5)$$

В этом уравнении неизвестным является y ; уравнений (5) столько же, сколько точек A_k , т. е. n . Если множество этих уравнений (5) обладает q корнями, то кривая C алгебраическая и степень ее $p+q$; если корней бесконечно много, то кривая C неалгебраическая.

В каком случае могло бы появиться бесконечно много корней? Для этого необходимо, чтобы некоторое значение y_0 служило точкой накопле-

* См.: С. J o r d a n. Цит. выше соч., п. 579 и особенно последнее уравнение этого пункта. (Р. Г.).

ния корней, так что y_0 принадлежит производному множеству для множества корней. Но тогда первый член одного из уравнений (5) перестает быть алгеброидным при $y = y_0$. Мы пришли, таким образом, к необходимости установить более точно аналитический вид этих первых членов.

Функции pv_i , a_{ik} , b_i , $\sum a_{ik}$ нормальны, т. е. они обладают свойствами, приведенными в начале этого раздела; разве что только m не одно и то же для них.

Функция Θ , как известно, имеет следующий вид:

$$\sum e^{P_1 + P_2},$$

где

$$P_1 = \sum m_i w_i, \quad P_2 = \frac{1}{2} \sum m_i m_k c_{ik};$$

m — целые, w и c — переменные и постоянные, которые мы сейчас определим.

1. Рассмотрим наши интегралы u_i и их нормальные периоды первого рода; пусть ω_{ij} — j -й нормальный период u_i . Введем переменные, соответствующие этим интегралам, которые по-прежнему будем обозначать u_i , и положим

$$2\pi \sqrt{-1} u_i = \sum \omega_{ij} w_j.$$

Заменим теперь эти переменные значениями, которые фигурируют в уравнении (5); это дает нам уравнения

$$2\pi \sqrt{-1} \left(pv_i - a_{ik} + \frac{1}{2} b_i - \frac{n-3}{2} \sum a_{ik} \right) = \sum \omega_{ij} w_j, \quad (6)$$

определяющие w .

2. Рассмотрим теперь нормальные периоды второго рода, и пусть ω'_{ij} — j -й нормальный период второго рода u_i ; получим

$$2\pi \sqrt{-1} \omega'_{ik} = \sum \omega_{ij} c_{jk}, \quad (7)$$

что и определяет c .

Видно, что Θ — голоморфная функция от w и c и перестает быть таковой, только если w становятся бесконечными или если вещественная часть P_2 перестает быть отрицательно определенной формой.

Рассмотрим сначала обыкновенные значения y ; pv_i , a_{ik} , b_i голоморфны по y , то же самое верно для ω_{ij} и ω'_{ij} ; более того, определитель ω_{ij} отличен от нуля, иначе мы имели бы критическое значение. Поэтому, в силу уравнений (6) и (7), w и c — голоморфные функции y ; вещественная часть P_2 тем более не перестает быть отрицательно определенной, так как это может случиться только при критических значениях. Следовательно, Θ — голоморфная функция от y .

Пусть теперь значение критическое, но не особое. Мы видели, что критические значения произвольны, иначе говоря, можно заменить u_i другими интегралами

$$u'_i = \sum \rho_{ik} u_k, \quad (8)$$

где ρ_{ik} — рациональные функции от y , и подобрать это линейное преобразование таким образом, что рассматриваемое значение уже не критическое. Мы предположили вначале, и *это существенно*, что около критического значения v_i ведут себя регулярно; то же самое, согласно разделу III, верно для функций a_{ik} , Поэтому, если мы положим

$$u_i = p v_i - a_{ik} + \frac{1}{2} b_i - \frac{n-3}{2} \sum a_{ik}, \quad (9)$$

то u_i ведут себя регулярно, и отсюда следует, что если рассматривать u_i как определенные уравнениями (9), а u'_i — уравнениями (8), то u'_i будут конечными.

Но линейное преобразование (8) не меняет ни w , ни s . Поэтому даже для критических значений Θ является голоморфной функцией y .

Рассмотрим, наконец, особое значение, которое я могу предполагать некритическим. Как мы видели в конце раздела III, можно предполагать, что это значение соответствует обыкновенной касательной плоскости, и что обход вокруг него возвращает всем нормальным периодам исходные значения, за исключением одного периода второго рода, скажем ω'_{i1} , который заменяется на $\omega'_{i1} + \omega_{i1}$; что касается $p v_i$, то по предположению, сделанному в начале раздела, оно заменяется на $p v_i + k \omega_{i1}$, k — целое. Точно так же, согласно результатам предыдущего раздела, a_{ik} и b_i заменяются на $a_{ik} + k' \omega_{i1}$, $b_i + k'' \omega_{i1}$, k' и k'' — целые.

Это, правда, предполагает специальный выбор нормальных периодов, и можно придумать бесконечно много таких выборов, каждому из которых соответствует своя функция Θ . Однако теорема не зависит от этого выбора, и значения y , для которых кривая C проходит через точку A_k , могут бесконечно накапливаться в окрестности значения y_0 только в том случае, если для $y = y_0$ все эти функции Θ перестают быть голоморфными.

Что же происходит теперь с

$$p v_i - a_{ik} + \frac{1}{2} b_i - \frac{n-3}{2} \sum a_{ik}?$$

К этому выражению прибавляется $\frac{K}{2} \omega_{i1}$, где K — целое. Согласно уравнениям (6), это приводит к тому, что w_1 увеличивается на $K\pi\sqrt{-1}$, а другие w не меняются. Что касается s , то из уравнений (7) видно, что s_{11} увеличивается на $2\pi\sqrt{-1}$, а остальные s не меняются. Выражение $P_1 + P_2$ увеличивается поэтому на

$$\pi K m_1 \sqrt{-1} + \pi m_1^2 \sqrt{-1}.$$

Если K нечетно, то $e^{P_1+P_2}$ не меняется и Θ не меняется; если K четно, то два значения Θ меняются местами, когда y обходит вокруг особого значения; пусть Θ_1 и Θ_2 — эти два значения; остается доказать, что нули произведения $\Theta_1\Theta_2$ не могут бесконечно накапливаться в окрестности рассматриваемого особого значения.

Произведение $\Theta_1\Theta_2$ и сумма $\Theta_1+\Theta_2$ являются однозначными функциями y ; я утверждаю, что эти функции голоморфны. В самом деле, e^{2w_1} и $e^{c_{11}}$ остаются голоморфными функциями y , хотя w_1 и c_{11} логарифмически бесконечны; но в разложении $\Theta_1\Theta_2$ или $\Theta_1+\Theta_2$ w_1 и c_{11} встречаются только в экспонентах e^{2w_1} и $e^{c_{11}}$. Таким образом, Θ — алгеброидная функция от y , что исключает бесконечные накопления ее нулей.

Итак, кривая C , проходя через точки A_k конечное число раз, является алгебраической, что и требовалось доказать.

Важно отметить роль одного из наших предположений. Если вблизи критического значения v_i оставались бы конечными, но не были бы регулярными, кривая C проходила бы через точку A_k бесконечное число раз в окрестности этого критического значения.

Теорема Римана, на которую мы опирались, предполагает $p > 1$. В случае $p=1$ достаточно ввести функцию Вейерштрасса $\wp$ и заменить уравнение $\Theta=0$ на $\wp=0$; рассуждения при этом ничуть не меняются [8].

Прежде чем оставить эту тему, отметим несколько частных случаев.

1. Может случиться, что p точек пересечения кривой C с плоскостью $y=\text{const}$ сводятся к p раз взятой точке A_k ; кривая C сводится тогда к p раз взятой точке A_k . Она может также редуцироваться к q -кратной точке A_k и $(p-q)$ -кратной точке A_j . Могло бы также случиться, что из наших p точек q остаются постоянно связанными с A_k , а другие $p-q$ — переменные.

2. Если мы рассмотрим период ω_i , например, как функцию y , то он будет удовлетворять условиям, приведенным в начале этого раздела. Соответствующая кривая C сводится, очевидно, к p раз взятой точке A_1 , которая служит нам началом; действительно, в этой точке ω_i равны нулю или периоду.

3. Уравнения (1) не всегда однозначно определяют точки x_i ; при некоторых исключительных системах значений v_i эти точки x_i не определены. Если v_i принимают эти исключительные значения только при некоторых специальных значениях y , нам нечего беспокоиться; достаточно устранить неопределенность, беря предельные значения этих точек x_i при стремлении y к исключительному значению. Другое дело, если v_i принимают эти исключительные значения при всех y . Такие исключительные значения существуют только для $p > 1$; для $p > 2$ можно удовлетворить уравнениям (1), полагая $x_1=x_1^0$; другие x определяются тогда теми же уравнениями; кривая C встречается теперь с плоскостью $y=\text{const}$ в $p-1$ переменных точках.

V. Классификация алгебраических кривых

Зададимся теперь следующим вопросом: всегда ли существуют нормальные функции, удовлетворяющие условиям, приведенным в начале предыдущего раздела? Если они существуют, то как их классифицировать? Как, иначе говоря, классифицировать кривые, лежащие на поверхности?

Рассмотрим плоскость y .

Пусть $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_h$ — различные особые значения; соединим эти точки с началом координат разрезами, которые обозначим $Q_1, Q_2, \dots, Q_h$. Так как мы предполагаем, что каждое из этих значений соответствует обыкновенной касательной плоскости, каждый разрез будет характеризоваться следующим: когда y пересекает разрез Q_k , один из периодов $\omega^{(k)}$ заменяется на $\omega^{(k)} + \varpi^{(k)}$, где $\varpi^{(k)}$ — другой период; остальные $2p-1$ периодов не меняются. Тогда, чтобы функция v_i была нормальной, должно найтись такое целое число λ_k , что

$$v_i := \frac{\lambda_k}{p} \omega_i^{(k)}$$

остаётся голоморфной в η_k , т. е. такое, что v_i меняется на $v_i + \frac{\lambda_k}{p} \varpi_i^{(k)}$, когда пересекается разрез Q_k . Мы обозначили через $\omega_i^{(k)}$ и $\varpi_i^{(k)}$ периоды u_i , соответствующие $\omega^{(k)}$ и $\varpi^{(k)}$.

Заметим, что числа λ_k не могут быть выбраны совершенно произвольно; выбор их должен удовлетворять условию (4) раздела III [9].

Пусть теперь $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$ — критические значения первого сорта, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu$ — второго; всегда можно считать, что все эти критические значения первого порядка кратности; разумеется, принимаются во внимание только *настоящие* критические значения, кажущиеся критическими значения не рассматриваются. Функции v_i ведут себя регулярно в точках α и могут становиться бесконечными в точках β . Поэтому v_i имеет вид

$$v_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{Q_k} \frac{\lambda_k}{p} \int \frac{(\omega_i^{(k)}) dY}{Y-y} + \sum \frac{A_k}{y-\beta_k} + C; \quad (1)$$

A_k и C — постоянные. Мы обозначаем через Y переменную интегрирования; интегрирование производится по всем разрезам Q_k и $(\varpi_i^{(k)})$ — не что иное, как $\varpi_i^{(k)}$, в котором y заменено на Y .

Сразу видно, что v_i удовлетворяют условиям относительно разрезов Q_k : остаётся посмотреть, можно ли подобрать постоянные A_k и C так, чтобы v_i вели себя регулярно. Число этих параметров A_k и C равно $\nu+1$ или $p(\nu+1)$ для p функций v_i ; условий, которым нужно удовлетворить, столько же, сколько точек α , т. е. μ ; так как эти условия являются линейными уравнениями относительно A_k и C и определитель этих линейных уравнений, как легко видеть, не обращается в нуль, условия могут быть удовлетворены, если

$$\mu \leq p(\nu+1). \quad (2)$$

Если неравенство (2) удовлетворяется, существуют нормальные функции, а значит и кривые C , соответствующие различным возможным значениям λ_k ; но эти системы нормальных функций являются целочисленными линейными комбинациями некоторых из них, которые можно назвать *примитивными* нормальными функциями. Соответствующие кривые называются *примитивными*, и мы сейчас увидим на простых примерах, как непримитивные кривые выражаются через примитивные. Эти примитивные кривые уже встречались по другому поводу у Севери (Annales de l'École normale, t. XXV, p. 449), который связывал их с инвариантом Пикара ρ [10].

Различные нормальные функции, примитивные или нет, образуют дискретные системы, и от одной из них к другой переходят, добавляя к λ_k целые числа. Можно, однако, спросить, существует ли непрерывная система нормальных функций? В такой системе числа λ_k должны оставаться постоянными, поскольку эти числа принимают только целые значения. Отсюда следует, что разность двух нормальных функций, принадлежащих одной непрерывной системе, должна быть рациональной функцией от y . Эта разность сама является нормальной функцией, у которой целые λ_k равны нулю. Таким образом, *существование непрерывной системы нормальных функций связано с существованием рациональных нормальных функций*.

Можно уже заключить (и мы вернемся позже к этому), что существование *непрерывной алгебраической* (не линейной) *системы* алгебраических кривых, лежащих на поверхности, связано с существованием непрерывной системы нормальных функций и, следовательно, с существованием *рациональных нормальных функций*.

Предположим, что наша непрерывная система нормальных функций q раз бесконечна. Тогда можно написать

$$v_i = A_1 \varphi_{i1} + A_2 \varphi_{i2} + \dots + A_q \varphi_{iq},$$

$A_1, A_2, \dots, A_q$ — произвольные постоянные и φ — $p \cdot q$ рациональных функций. Можно теперь найти p^2 рациональных функций ρ_{ik} , таких, что

$$\sum v_i \rho_{ik} = A_k,$$

если $k \leq q$, и

$$\sum v_i \rho_{ik} = 0,$$

если $k > q$.

Вместо основных интегралов

$$u_1, u_2, \dots, u_p$$

мы можем рассмотреть

$$U_1, U_2, \dots, U_p;$$

полагая

$$U_k = \sum u_i \rho_{ik}.$$

Тогда роль $v_1, v_2, \dots, v_p$ будут играть $V_1, V_2, \dots, V_p$, где

$$V_k = \sum v_i \rho_{ik},$$

и предыдущие уравнения превратятся в

$$V_k = A_k \quad (k \leq q), \quad V_k = 0 \quad (k > q).$$

После такого выбора основных интегралов наши нормальные функции сводятся к постоянным; они не могут поэтому обращаться в нуль или бесконечность, так что можно сказать, что не существует критических значений по крайней мере первого сорта.

Мы приходим, таким образом, к заключению, что существуют q линейно независимых интегралов

$$U_1, U_2, \dots, U_q,$$

для которых нет настоящих критических значений^[11].

Согласно теореме Энрикеса, Кастельнуово и Севери, новое доказательство которой мы дадим в следующем разделе, существование непрерывной алгебраической системы алгебраических кривых связано с существованием интегралов полных дифференциалов первого рода.

Мы закончим несколькими примерами; начнем с общей поверхности третьей степени. Число особых значений, т. е. касательных плоскостей, проведенных через прямую $y=t=0$, равно $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ ^[12]. Число p равно 1. Единственный интеграл u_1 имеет вид

$$\int \frac{\rho dx}{f'_z},$$

где ρ — однородная функция степени 1 по y и t ; можно поэтому предполагать, что нет критических значений второго сорта, и существует одно критическое значение первого сорта; неравенство (2) поэтому выполнено. Любой допустимой системе целых чисел λ_k будет соответствовать кривая C . Целые λ_k , которых 12, должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялось условие (4) раздела III. Это накладывает на них два условия.

В самом деле, согласно этому условию, мы должны иметь

$$\sum \lambda_k \varpi_i^{(k)} = 0, \tag{3}$$

где $\varpi_i^{(k)}$ означает следующее: когда пересекается разрез Q_k , v_i меняются на $v_i + \lambda_k \varpi_i^{(k)}$, когда последовательно пересекаются $Q_{k+1}, Q_{k+2}, \dots, Q_h$, $\varpi_i^{(k)}$ заменяется другим периодом $\varpi_i^{(k)}$ интеграла u_i . Сейчас у нас один интеграл u_i , который имеет два основных периода ε и ε' ; можно поэтому положить

$$\varpi_i^{(k)} = \mu_k \varepsilon + \mu'_k \varepsilon',$$

μ_k, μ'_k — целые, так что условие (3) разлагается на два:

$$\sum \lambda_k \mu_k = \sum \lambda_k \mu'_k = 0. \quad (4)$$

Это дало бы $12-2=10$ примитивных кривых; однако рано делать такой вывод, ибо мы видели, что некоторые нормальные функции соответствуют не собственно кривым, а точкам. Прежде всего имеются две нормальные функции

$$v_1 = \varepsilon, \quad v_2 = \varepsilon',$$

которые являются периодами и соответствуют поэтому точке A_1 , служащей началом; затем, две другие нормальные функции, которые соответствуют A_2 и A_3 — двум другим точкам пересечения поверхности с прямой $y=t=0$. Нужно, следовательно, вычесть 4 из предыдущего числа, и остается $10-4=6$ примитивных кривых [13].

Легко видеть, что это за 6 примитивных кривых. Рассмотрим 27 прямых на поверхности. Вот каковы значения $u_1=v_1$ для этих 27 прямых: пусть

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \delta$$

— семь величин, связанных соотношением $\sum \gamma = 0$. Получим для $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ прямых

$$u_1 = v_1 = -\gamma_i - \gamma_j,$$

для 6 прямых

$$u_1 = v_1 = \delta + \gamma_i,$$

для 6 других прямых

$$u_1 = v_1 = \gamma_i - \delta$$

(всего $15+6+6=27$ прямых). Это — следствие расположения этих прямых *. Видно, что у нас есть всего 6 линейно независимых эллиптических

* На поверхности S_3 можно найти две шестерки прямых

$$\begin{matrix} a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \\ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \end{matrix}$$

так что a_i и b_j ($i \neq j$) пересекаются, а a_i и b_i нет; более того, пятнадцать других прямых c_{ij} на S_3 таковы, что c_{ij} образует треугольник с a_i и b_j , с a_j и b_i , с c_{gh} и c_{kl} [($ijghkl$) — перестановка (1, . . . , 6) (см. например: A. H e n d e r s o n. The twenty-seven lines upon the cubic surface. Cambridge, 1914, p. 13—14)]. Пусть тогда $\gamma'_i, \gamma''_j, \gamma'''_{ij}$ — значения, принимаемые u_1 в точках пересечения $y=\text{const}$ с a_i, b_j, c_{ij} ; обозначая через ε нормальную функцию, соответствующую плоскому сечению, имеем

$$\gamma'_i + \gamma''_j + \gamma'''_{ij} = \varepsilon = \gamma'_j + \gamma''_i + \gamma'''_{ji}$$

и

$$\gamma'''_{ij} + \gamma'''_{gh} + \gamma'''_{kl} = \varepsilon.$$

переменных, так как γ связаны соотношением. Поэтому только 6 из этих прямых примитивны.

На этом простом примере хорошо видно, как можно получать непримитивные кривые из примитивных. Пусть две кривые C и C' соответствуют нормальным функциям v_1 и v'_1 , и нужно построить кривую C'' , соответствующую нормальной функции $v_1 + v'_1$; для этого я провожу плоскость $y = \text{const}$, которая пересекает C и C' в M и M' . Прямая MM' встречается с поверхностью в третьей точке N ; я соединяю N с точкой A_1 , служащей нам началом, прямая NA_1 встречается с поверхностью в третьей точке M'' , которая будет принадлежать C'' и породит эту кривую при вариации y . Эта процедура легко обобщается на более сложный случай, где $n > 3$, $p > 1$.

Рассмотрим теперь общую поверхность четвертой степени. Число особых значений $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$; $p = 3$, и поэтому имеется 6 периодов. Будет, следовательно, 6 соотношений, аналогичных (4), и осталось бы, таким образом, $36 - 6$ примитивных кривых. Нужно, однако, вычесть еще 6 для периодов и 3 из-за точек пересечения поверхности с прямой $y = t = 0$, начальная точка при этом не учитывается; остается теперь $30 - 6 - 3 = 21$ примитивная кривая. Это, однако, только оценка сверху, так как условие (2) не выполняется, и не любой системе значений λ_k соответствует нормальная функция [14].

Каковы же, в самом деле, числа μ и ν ? Можно принять здесь (в качестве функций R_r раздела II)

$$R_1 = \rho_1 x, \quad R_2 = \rho_2 z, \quad R_3 = \rho_3.$$

Эти функции должны быть однородными степени 2 по x, y, z, t , так что ρ_1 и ρ_2 однородны степени 1 по y и t , тогда как ρ_3 — степени 2. Поэтому

$$\nu = 0, \quad \mu = 4,$$

так как R не могут обратиться в бесконечность, тогда как ρ_1 и ρ_2 обращаются в нуль по 1 разу, а ρ_3 — 2 раза. Отсюда

$$\mu = 4 > 3 = p(\nu + 1),$$

так что условие (2) не выполнено, и получаем, что 21 примитивной кривой не существует. Этот результат должен быть сопоставлен с результатом, доказанным Нетером, согласно которому любая кривая, расположенная на общей поверхности степени 4 или выше, является полным пересечением [15].

Можно разрешить уравнения

$$\gamma'_i = \gamma_i + \delta, \quad \gamma''_i = \gamma_i - \delta \quad \text{и} \quad \gamma''_{ij} = -\gamma_i - \gamma_j + \epsilon,$$

причем $\sum_{i=1}^6 \gamma_i = 2\epsilon$. a_i — не что иное, как первая шестерка прямых-у Пуанкаре, и нормальные функции выражаются как комбинации семи функций γ_i и δ . (Р. Г.).

Предположим теперь, что наша поверхность четвертой степени имеет двойную прямую. Число особых значений теперь 20 [16]; так как $2p=4$, $n-1=3$, теми же рассуждениями, что и раньше, получаем $20-4-4-3=9$ примитивных кривых *. Эти примитивные кривые действительно существуют, так как можно положить

$$R_1 = \rho_1 P_1, \quad R_2 = \rho_2 P_2,$$

где $P_1=0$, $P_2=0$ — две плоскости, проходящие через двойную прямую, а ρ_1 и ρ_2 однородны степени 1 по y и t , так что

$$\mu = 2 = 2(0 + 1) = p(\nu + 1).$$

Предположим, наконец, что поверхность четвертой степени имеет две двойные прямые; тогда $p=1$ и можно взять в качестве R_1 первый член уравнения параболоида, проходящего через две прямые; критических значений нет и существует непрерывная система кривых C . Легко видеть, что это за кривые, потому что поверхность линейчатая; это образующие.

Я хотел бы заметить, что в связи с существованием интеграла полного дифференциала первого рода правила для определения числа примитивных кривых должны применяться достаточно осторожно, принимая во внимание следующие обстоятельства.

1. Особые значения могут оказаться кажущимися, так как в окрестности значения y , соответствующего касательной плоскости, периоды могут оставаться голоморфными функциями от y ; именно это и происходит, когда периоды постоянны.

2. Постоянные периоды ω входят в непрерывную систему нормальных функций и не образуют отдельных нормальных систем.

3. Точно так же значения v_i , относящиеся к точкам пересечения поверхности с $y=t=0$, постоянны и не образуют отдельных нормальных систем.

Отметим в заключение, что если существует непрерывная система алгебраических кривых, то эта система неизбежно будет алгебраической; в самом деле, эта система непрерывна, общая кривая системы имеет определенную степень и род и встретится в определенном *типе* классификации Альфана пространственных кривых (это будет, например, пространственная кубика, или пространственная биквадрика рода 1, или пространственная уникурсальная кривая четвертой степени и т.д.).

* На самом деле число примитивных кривых равно 10; это можно проверить так. При бирациональном представлении поверхности S_4 на плоскость (см. примечание к стр. 319) существует 9 фундаментальных точек на плоскости и ни одной на S_4 (см. также: C. M. Jessop. Quartic surfaces with singular points. Cambridge Univ. Press, 1916, p. 121). Поэтому базис на S_4 может быть составлен из 9 исключительных прямых и образа Γ общей прямой на плоскости. Исключительными являются прежде всего 8 прямых $a_1, \dots, a_8$, пересекающих двойную прямую D ; 8 сечений S_4 плоскостями (D, a_j) содержат еще 8 прямых b_j ; девятой исключительной кривой является коника, встречающаяся с b_j . Что касается Γ , то это кватрика Штейнера. (Р. Г.).

Более того, она должна проходить определенное число раз через каждую точку A_i .

Далее, можно написать общее уравнение пространственных кривых определенного типа Альфана в виде двух или большего числа алгебраических соотношений между координатами и некоторым числом произвольных параметров. Выражая условие, что кривая лежит на поверхности и проходит определенное число раз через каждую точку A_i , получаем некоторые соотношения между параметрами, и *эти соотношения являются алгебраическими*. Поэтому и система алгебраическая; это очень простое замечание будет использовано в следующем разделе.

VI. Интегралы полных дифференциалов первого рода

Мы видели, что если существует q интегралов u_i , не имеющих настоящих критических значений, то будет существовать непрерывная q раз бесконечная система нормальных функций, а значит и непрерывная алгебраическая q раз бесконечная система алгебраических кривых, лежащих на поверхности *. Осталось убедиться, что это же является необходимым и достаточным условием существования q интегралов полных дифференциалов первого рода, что и даст доказательство теоремы Энрикеса, Кастельнуово и Севери.

Предположим сначала, что существуют q интегралов полных дифференциалов первого рода. Если в каждом из них мы рассмотрим y как постоянный параметр, мы увидим, что они редуцируются в q из наших p интегралов u_i , *периоды которых постоянны*.

Мы будем различать поэтому среди интегралов u_i два сорта интегралов: q интегралов U_i , о которых сейчас шла речь, и остальные $p-q$ интегралов V_i .

Точно так же поделим на два сорта периоды: сначала те, которые мы будем обозначать α_i и которые являются нулевыми для интегралов U , затем периоды β_i , которые всегда можно предполагать линейно независимыми относительно U , иначе говоря, между ними нет никаких целочисленных линейных соотношений, верных для всех интегралов U .

1. Когда y описывает замкнутый цикл, α_i меняются на $\alpha_i + \gamma_i$, а β_i — на $\beta_i + \delta_i$, где γ_i и δ_i — другие периоды. Но для интегралов U периоды постоянны, следовательно, γ_i и δ_i должны аннулироваться относительно U ; поэтому они являются линейными комбинациями α .

2. Известно, что между нормальными периодами двух абелевых интегралов есть билинейное соотношение

$$\sum (\omega_{2i} \omega'_{2i+1} - \omega'_{2i} \omega_{2i+1}) = 0,$$

* Действительно, для $i=1, \dots, q$ (индексы u_i без критических значений) коэффициенты C_i уравнений (1) не должны удовлетворять никаким условиям: они могут быть выбраны произвольно. Обратное утверждение установлено на стр. 334. (Р. Г.).

и если, как мы уже делали, взять вместо нормальной системы другую систему периодов, получим билинейную форму F периодов двух интегралов, которая должна быть нулевой. Соотношение

$$F=0$$

можно записать

$$\sum a_i \varepsilon'_i + \sum \beta_i \zeta'_i = 0;$$

α_i и β_i — периоды первого интеграла, ε_i и ζ_i — линейные комбинации этих периодов; α'_i , β'_i , ε'_i , ζ'_i — соответствующие периоды второго интеграла.

Когда y описывает замкнутый контур, α_i и β_i заменяются на $\alpha_i + \gamma_i$ и $\beta_i + \delta_i$ и, аналогично, ε_i и ζ_i — на $\varepsilon_i + \theta_i$ и $\zeta_i + \eta_i$; γ , δ , θ и η — линейные комбинации α . Точно так же α'_i , β'_i , ε'_i , ζ'_i заменяются на $\alpha'_i + \gamma'_i$, $\beta'_i + \delta'_i$, $\varepsilon'_i + \theta'_i$, $\zeta'_i + \eta'_i$. Билинейная форма F должна оставаться неизменной. Она становится равной

$$\sum \alpha_i \varepsilon'_i + \sum \gamma_i \varepsilon'_i + \sum \alpha_i \theta'_i + \sum \gamma_i \theta'_i + \sum \beta_i \zeta'_i + \sum \delta_i \zeta'_i + \sum \beta_i \eta'_i + \sum \delta_i \eta'_i.$$

Коэффициент при β_i должен оставаться тем же самым, ибо γ и δ зависят только от α , но не от β ; имеем, поэтому

$$\zeta'_i = \zeta_i + \eta'_i,$$

т. е. η'_i — тождественный нуль; это значит, что ζ_i однозначны, и так как периоды являются нормальными функциями, ζ_i будут рациональными функциями y , и это так для всех интегралов U или V .

3. Я утверждаю теперь, что для интеграла U все ζ не могут одновременно обратиться в нуль. Действительно, форма F должна принимать вещественные положительные значения, если заменить переменные первого линейного ряда периодами абелева интеграла, а второго ряда — сопряженными к периодам того же самого интеграла. Поэтому

$$\sum \alpha_i \varepsilon_i^0 + \sum \beta_i \zeta_i^0 > 0,$$

ε_i^0 и ζ_i^0 — сопряженные к ε_i и ζ_i . Для U α нулевые; если все ζ_i , а следовательно, и все ζ_i^0 нулевые, то неравенство нарушается.

4. Обозначим через ζ_{ik} период ζ_i интеграла u_k (где u_k — интеграл U , если $k \leq q$, и интеграл V , если $k > q$) и рассмотрим системы рациональных функций от y

$$\zeta_{i1}, \zeta_{i2}, \dots, \zeta_{ip}.$$

Я утверждаю, что среди них всегда найдется по крайней мере q линейно независимых систем (я их буду снабжать индексами $i=1, 2, \dots, q$). Иначе говоря, нельзя для всех индексов k найти соотношение вида

$$\sum_{i=1}^{i=q} a_i \zeta_{ik} = 0, \quad (1)$$

где a_i — q коэффициентов. В противном случае можно было бы найти линейную комбинацию интегралов U , для которой все периоды ζ были бы нулевыми. В самом деле, мы могли бы найти постоянные коэффициенты b_k , которые удовлетворяли бы уравнениям

$$\sum_{k=1}^{k=q} b_k \zeta_{ik} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, q-1). \quad (2)$$

Если теперь выполнено (1), то соотношение (2) было бы верно и для $i = q$, и интеграл $\sum b_k U_k$ имел бы все периоды ζ нулевыми.

Отсюда вытекает, что система

$$\sum \lambda_i \zeta_{ik},$$

где λ — произвольные постоянные коэффициенты, представляет непрерывную q раз бесконечную систему нормальных функций; но именно существование подобной системы мы и предполагали установить.

Обращение требует больших усилий. Предположим, что существует непрерывная алгебраическая q раз бесконечная система алгебраических кривых. Мы можем задать эту систему (поскольку она алгебраическая) $q+1$ параметрами

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{q+1},$$

связанными алгебраическим соотношением

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{q+1}) = 0, \quad (1)$$

так что любой системе значений ξ , удовлетворяющей соотношению (1), соответствует одна и только одна кривая непрерывной системы. Рассмотрим теперь непрерывную систему соответствующих нормальных функций. В предыдущем разделе мы видели, что можно выбрать интегралы

$$u_1, u_2, \dots, u_p$$

таким образом, что эта система нормальных функций запишется так:

$$v_1 = \gamma_1, \quad v_2 = \gamma_2, \quad \dots, \quad v_q = \gamma_q, \quad v_{q+1} = v_{q+2} = \dots = v_p = 0,$$

где γ — произвольные постоянные. Рассмотрим γ как функции ξ :

1. γ не могут становиться бесконечными, ибо этим свойством обладают u_i , являясь интегралами первого рода, а потому и v_i .

2. Когда ξ возвращаются к первоначальным значениям по любому циклу, $p\gamma_i$ воспроизводятся с точностью до периода.

3. Следовательно, частные производные γ относительно ξ являются рациональными функциями ξ ; иначе говоря, γ являются интегралами полных дифференциалов первого рода на многообразии (1).

4. Периоды этих интегралов полных дифференциалов являются не зависящими от y константами, поскольку γ — постоянные, не зависящие от y .

5. Поэтому, если ξ описывают произвольный замкнутый контур, либо $p\gamma_i$ остаются при прежних значениях, либо $p\gamma_i$ увеличиваются на ω_i , где ω_i — период u_i , который должен быть не зависящей от y постоянной;

6. $p\gamma_i$ имеют по крайней мере $2q$ различных эффективных периода; действительно, представим множество вполне различных систем значений $p\gamma_i$ (две системы не вполне различны, если они отличаются периодом). Представление должно производиться в $2q$ -мерном пространстве, так как наши координаты — q вещественных и q мнимых частей γ . Область этого пространства, занимаемая нашим множеством, будет ограничена $2h$ плоскими попарно параллельными многообразиями, если существуют h периодов; однако она не может уходить в бесконечность, так как γ_i не могут становиться бесконечными; значит, это замкнутый *призматойд*, который должен быть ограничен $4q$ плоскими многообразиями, так что мы имеем $2q$ периодов.

7. Когда ξ описывают замкнутый контур, алгебраическая кривая непрерывной системы возвращается в первоначальное положение. Если она протыкает плоскость $y = \text{const}$ в точках

$$M_1, M_2, \dots, M_p$$

и если $u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(p)}$ — соответствующие значения u_i , то в начальном положении

$$p\gamma_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)} + \dots + u_i^{(p)}.$$

В конечном положении точки M как-то меняются местами, так что $u_i^{(p)}$ воспроизводится с точностью до порядка и периода. Поэтому $p\gamma_i$ заменится на $p\gamma_i + \omega_i$, ω_i — период. Таким образом,

$$p\gamma_1, p\gamma_2, \dots, p\gamma_p$$

заменяются на

$$p\gamma_1 + \omega_1, \quad p\gamma_2 + \omega_2, \quad \dots, \quad p\gamma_p + \omega_p;$$

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ — соответствующие периоды.

Может случиться, что все эти периоды нулевые; может случиться также, что

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q$$

не нулевые и по теореме, полученной выше (см. п. 6), это происходит $2q$ линейно независимыми способами. В этом случае, согласно 4 и 5,

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q$$

постоянны. С другой стороны, так как $p\gamma_{q+1}, p\gamma_{q+2}, \dots, p\gamma_p$ нулевые, то

$$\omega_{q+1} = \omega_{q+2} = \dots = \omega_p = 0.$$

Итак: существуют по крайней мере $2q$ различных периодов, которые постоянны для $u_1, u_2, \dots, u_q$ и нулевые для $u_{q+1}, u_{q+2}, \dots, u_p$.

8. Это показывает нам, что мы находимся в случае редукции абелевых интегралов. Интегралы $u_{q+1}, u_{q+2}, \dots, u_p$ приводимые, поскольку они обладают только $2p-2q$ различными периодами; отсюда следует, что существует q других приводимых интегралов. Вот как можно их образовать.

Обозначим $\omega_i^{(h)}$ h -й период u_i ; согласно предшествующему, $\omega_i^{(h)}$ постоянны, если $i \leq q$, $h \leq 2q$, и нулевые, если $i > q$, $h \leq 2q$; для этого нужно выбрать и надлежащим образом упорядочить основные периоды, не ограничивая себя выбором нормальных периодов; мы получим тогда между периодами соотношение вида

$$F(\omega_i^{(1)}, \omega_i^{(2)}, \dots, \omega_i^{(2p)}; \omega_j^{(1)}, \omega_j^{(2)}, \dots, \omega_j^{(2p)}) = 0,$$

F — билинейная форма относительно ω_i и ω_j ; эта форма играет для наших не нормальных периодов ту же роль, что и форма

$$\sum (\omega_i^{(2h)} \omega_j^{(2h+1)} - \omega_j^{(2h)} \omega_i^{(2h+1)})$$

для нормальных периодов.

Пусть

$$U = \sum \lambda_i u_i$$

— произвольный интеграл, и $\Omega^h = \sum \lambda_i \omega_i^{(h)}$ — его периоды; мы должны иметь

$$F(\Omega^{(h)}, \omega_j^{(h)}) = 0.$$

Положим $j > q$, так что для $h \leq 2q$ $\omega_j^{(h)}$ — нулевые; имеется поэтому только $2p-2q$ отличных от нуля периодов; запишем

$$F(\Omega^{(h)}, \omega_j^{(h)}) = \sum \omega_j^{(h)} \Pi^{(h)},$$

$\Pi^{(h)}$ — линейные многочлены с целыми коэффициентами относительно Ω ; приводимые интегралы получают, записывая

$$\Pi^{(2q+1)} = \Pi^{(2q+2)} = \dots = \Pi^{(2p)} = 0, \quad (2)$$

т. е. приравнивая нулю коэффициенты тех $\omega_j^{(h)}$, которые отличны от нуля. Это даст $2p-2q$ уравнений между Ω , т. е. между λ . Эти уравнения обладают $2q$ линейно независимыми решениями. Для конкретизации этих решений мы предположим, что $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ все нулевые, кроме одного из них, который равен 1; остальные λ определяются из уравнений (2). Мы получим таким способом q приводимых интегралов

$$U_1, U_2, \dots, U_q,$$

где U_k характеризуется тем, что q первых λ равны нулю, кроме λ_k , равного 1; имеем тогда

$$\Omega_k^{(h)} = \omega_k^{(h)} \quad (k \leq q, h \leq 2q),$$

так как, кроме члена $\lambda_k \omega_k^{(h)} = \omega_k^{(h)}$, все члены $\lambda_i \omega_i^{(h)}$ обращаются в нуль, ибо $\lambda_i = 0$ при $i \leq q$ и $\omega_i^{(h)} = 0$ при $i > q$.

Другие периоды U_k связаны с периодами $\Omega_k^{(h)}$ соотношениями (2), которые линейны и с целыми коэффициентами. Поэтому $\Omega_k^{(h)}$ (или их кратные) являются единственными различными периодами U_k . Следовательно, *все периоды U_k постоянны.*

9. Тогда U_k есть функция от x, y, z , которая не обращается в бесконечность и которая воспроизводится с точностью до постоянного периода, когда x, y, z описывает произвольный замкнутый контур.

Значит, ее производные по x и y являются рациональными функциями x, y, z .

И потому это интеграл полного дифференциала первого рода. Следовательно, наша поверхность обладает q интегралами полных дифференциалов первого рода, что и требовалось доказать.

VII. Линейные системы

Теперь рассмотрим более общим образом кривые C , соответствующие произвольному значению числа m (т. е. пересекающие плоскость $y = \text{const}$ в m подвижных точках), не ограничиваясь уже требованием $m = p$. Рассмотрим две кривые C и C' , соответствующие одному и тому же значению m . Я предполагаю, кроме того, что различные точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ пересечения поверхности с прямой $y = t = 0$ являются кратными точками кривых C и C' одного и того же порядка кратности.

Если две кривые C и C' принадлежат одной линейной системе, теорема Абеля немедленно показывает, что функции v_i одни и те же для обеих кривых. И мы можем, в частности, заключить, что *если существует непрерывная система нормальных функций в смысле двух предыдущих разделов, то непрерывная система соответствующих алгебраических кривых не является линейной системой.* До сих пор мы считали это почти очевидным.

Пусть теперь C и C' — две произвольные кривые; пусть

$$m, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$$

— число подвижных точек пересечения кривой C с $y = \text{const}$ и степени кратностей этой кривой в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$; пусть

$$m', \mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_n$$

— соответствующие числа C' . Пусть v_i и v'_i — функции v для C и C' .

Пусть $a_i^{(k)}$ — значение u_i в точке A_k ; если кривые принадлежат линейной системе, то

$$\begin{aligned} m + \sum \mu_k &= m' + \sum \mu'_k, \\ m v_i + \sum \mu_k a_i^{(k)} &= m' v'_i + \sum \mu'_k a_i^{(k)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Осталось показать, что обратно, если эти условия (1) выполнены, кривые принадлежат одной линейной системе [17]. Обе кривые C и C' имеют тогда одну степень

$$M = m + \sum \mu_k = m' + \sum \mu'_k.$$

С другой стороны, данная поверхность имеет степень n , а ее двойная кривая — степень d . Через кривую C и двойную кривую я проведу поверхность достаточно большой степени q ; пусть

$$F = 0$$

— уравнение этой поверхности; ее пересечение с данной поверхностью будет иметь степень qn и распадется на кривую C , двойную кривую и кривую Q степени

$$qn - M - 2d.$$

Пусть K — кривая пересечения плоскости $y = \text{const}$ с поверхностью $f = 0$.

Поверхность $F = 0$ пересекает плоскость $y = \text{const}$ вдоль кривой степени q , которая проходит через d двойных точек K , через m подвижных точек пересечения C , через $qn - M - 2d$ точек пересечения плоскости с Q , и имеет в точке A_k контакт с кривой K порядка $\mu_k - 1$.

Согласно теореме Абеля, второе уравнение (1) означает, что можно найти кривую S в плоскости K , которая будет иметь степень q , будет проходить через m' подвижных точек пересечения K с C' , через d двойных точек K , через $qn - M - 2d$ точек пересечения Q с K , и которая в точках A_k имеет контакт с K порядка $\mu'_k - 1$. Более того, если $q \geq n$, таких кривых можно найти бесконечно много, и можно наложить

$$\frac{(q - n + 1)(q - n + 2)}{2}$$

произвольных условий. Мы завершим определение кривой S , заставив ее пересечь $\frac{(q - n + 1)(q - n + 2)}{2}$ заданных пространственных прямых.

Когда y варьируется, эта кривая S порождает некоторую поверхность $\Phi = 0$; эта поверхность будет алгебраической, однако она может иметь степень больше q , например $q + h$. Ее пересечение с данной поверхностью $f = 0$ состоит тогда из кривой C' , кривой Q , двойной кривой и h плоских кривых

$$K_1, K_2, \dots, K_h,$$

имеющих уравнениями соответственно

$$f = y - y_1 = 0, \quad f = y - y_2 = 0, \quad \dots, \quad f = y - y_h = 0.$$

Образуем тогда следующую линейную систему алгебраических поверхностей степени $q + h$:

$$(y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_h) F + \lambda \Phi = 0,$$

где λ — произвольный параметр.

Эти поверхности пересекают данную поверхность $f=0$ по некоторому числу неподвижных кривых, а именно, по $Q, K_1, K_2, \dots, K_h$ и двойной кривой, и по подвижной кривой C'' степени M , которая превращается в C при $\lambda=0$ и в C' при бесконечно большом λ ; поэтому C и C' принадлежат одной линейной системе, что и требовалось доказать.

Укажем в заключение процедуру, способную облегчить изучение этих линейных систем. Добавим к p интегралам первого рода

$$u_1, u_2, \dots, u_p$$

$m - p$ произвольных интегралов третьего рода

$$u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_m.$$

Образуем теперь m функций $v_1, v_2, \dots, v_m$ относительно этих m интегралов. Придадим y постоянное значение; любой системе значений m функций $v_1, v_2, \dots, v_m$ соответствует система m точек кривой K пересечения $f=0$ и $y=\text{const}$, и эта система единственна; это результат из анализа, который Клебш и Гордан называют *обобщенной проблемой обращения*. Кривая, пересекающая K в m подвижных точках, будет определяться этими m функциями, и понятно, что изучение функций $v_1, v_2, \dots, v_m$, аналогичное проделанному для функций $v_1, v_2, \dots, v_p$ в разделах III и IV, может дать сведения об этих линейных системах. Я собираюсь сделать это в следующей статье.

VIII. Число критических значений

Начнем с замечания, что если поверхность не имеет конических точек, то кажущиеся критические значения отсутствуют. Действительно, если y_0 — кажущееся критическое значение, то найдется функция R_i , которая делится на $y - y_0$, тогда как соответствующий интеграл

$$u_i = \int \frac{R_i dx}{f'_z}$$

имеет ненулевые периоды; отсюда вытекает, что интеграл $\int \frac{R_i dx}{(y - y_0) f'_z}$ будет иметь бесконечные периоды. Это может произойти только в случае, когда кривая K пересечения $f=0$ и $y=y_0$ вырождается; для этого необходимо, чтобы плоскость $y=y_0$ проходила через коническую точку или касалась поверхности. Во втором случае достаточно слегка изменить оси, чтобы все касательные плоскости, проведенные через $y=t=0$, стали обыкновенными касательными; в этом случае мы уже видели, как обстоят дела и что кажущихся критических значений нет. Подобные значения могут существовать только при наличии конической точки. Согласно известной теореме Пикара, всегда можно добиться того, чтобы поверхность не имела других особенностей, кроме двойной кривой с тройными точками и, следовательно, не имела конических точек; этим вопросом мы больше заниматься не будем.

Пусть теперь

$$R_i = \frac{P_i}{Y},$$

где Y — целый однородный многочлен степени ν по y и t , а P_i — однородный многочлен степени $n + \nu - 2$ по x, y, z и t , куда x и z входят только в степени $n - 3$. Корни $Y=0$ — критические значения второго сорта; чтобы найти критические значения первого сорта, нужно найти значения y , для которых p многочленов P_i линейно зависимы.

Постараемся образовать непрерывную систему нормальных функций, как в разделах V и VI; будем иметь

$$v_i = \frac{X_i}{Y}, \quad (1)$$

где X_i — однородные многочлены степени ν по y и t . В формулу (1) входят p многочленов X_i степени ν ; всего будет $p(\nu + 1)$ коэффициентов; однако эти коэффициенты не совсем произвольные. Если y_0 — критическое значение первого сорта, то $\sum \alpha_i P_i$ [делится] на $y - y_0$, так что для $y = y_0$

$$\sum \alpha_i v_i = 0, \quad (2)$$

что даст нам столько соотношений между коэффициентами X_i , сколько имеется критических значений первого сорта, пусть μ ; останется q независимых коэффициентов, которые дадут непрерывную q раз бесконечную систему нормальных функций, и

$$q \geq p(\nu + 1) - \mu. \quad (3)$$

Я пишу $\geq$, потому что соотношения (2) могут не быть различными.

Эта непрерывная q раз бесконечная система не совсем та, которую мы изучали в разделе VI и где (вследствие специального выбора интегралов u_i) все нормальные функции сводятся к нулю или постоянным; однако рассуждения раздела VI (при доказательстве обращения) применимы здесь почти без изменений.

Пусть

$$v_i = \sum \gamma_k \varphi_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, q) \quad (4)$$

— наша система нормальных функций; γ — произвольные коэффициенты, φ — рациональные функции от y ; между v_i имеется по крайней мере $p - q$ линейных соотношений, коэффициенты которых будут рациональными функциями y ; эти соотношения получаются исключением γ в уравнениях (4); пусть $p - q'$ — точное число этих соотношений, $q \geq q'$. Пусть

$$\sum v_i \psi_{ik}(y) = 0 \quad (5)$$

— рассматриваемые $p - q'$ соотношений.

Коэффициенты γ будут функциями переменной ξ соотношения (1) из раздела VI. Для нахождения этих функций достаточно, согласно разделу VI, установить значения v_i , придавая y определенные значения. Для этого нужно найти v_i для некоторого числа значений y , большего $v + 1$; пусть $y_1, y_2, \dots$ — эти значения.

Проверяется, как и в разделе VI, что γ не могут становиться бесконечными, потому что v могут обращаться в бесконечность только для критических значений второго сорта; но выбор значений $y_1, y_2, \dots$ произволен, и мы всегда можем предположить, что $y_1, y_2, \dots$ не являются критическими значениями. Отсюда выводится, что γ — интегралы полных дифференциалов первого рода на многообразии (1) раздела VI.

Если ξ описывают замкнутый контур, γ_j увеличивается на период ω_k , а v_i — на $\frac{1}{p} \Omega_i$, и значит $\frac{1}{p} \Omega_i = \sum \omega_k \varphi_{ik}$ (Ω_i — период u_i).

С другой стороны, согласно соотношениям (5)

$$\sum \Omega_i \psi_{ik}(y) = 0. \quad (6)$$

Проверяется, как и в разделе VI, что число рассматриваемых периодов не меньше $2q$. Итак, $p - q'$ интегралов $\sum u_i \psi_{ik}(y)$ имеют $2q$ периодов. Значит $q = q'$, так как если бы было $q > q'$, определитель из $2p$ строк и $2p$ столбцов, образованный вещественными и мнимыми частями $2p$ периодов наших p интегралов u_i , был бы нулевой, а мы видели в разделе VI, что это невозможно для невырожденных абелевых интегралов.

Установив это, рассмотрим различные критические значения первого сорта; сказать, что $y = y_k$ — критическое, значит сказать, что существуют постоянные коэффициенты α_{ik} , такие, что $\sum \alpha_{ik} P_i$ тождественно равно нулю при $y = y_k$; тогда верно одно из двух:

1. Либо среди выражений $\sum \alpha_{ik} P_i$ можно найти p линейно независимых; тогда можно положить

$$\sum \alpha_{ik} u_i = u'_k \frac{y - y_k}{y - b} \quad (i, k = 1, 2, \dots, p),$$

где b — некоторое критическое значение второго сорта; в таком случае

$$P'_k = (y - b) \frac{\sum \alpha_{ik} P_i}{y - y_k}$$

будет целым многочленом, так как $\sum \alpha_{ik} P_i$ делится на $y - y_k$, и этот многочлен будет делиться на $y - b$, так что b не будет больше критическим значением второго сорта для u'_k . Следовательно, число v критических значений второго сорта уменьшается на единицу.

2. Либо среди выражений $\sum \alpha_{ik} P_i$ есть только $p - h$ линейно независимых; положим тогда

$$\sum \alpha_{ik} u_i = u'_k \quad (i = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, p - h),$$

остальные u'_k определены произвольно. Иначе говоря, можно предполагать, что в выражениях $\sum \alpha_{ik} u_i$ фигурируют только u_i с индексами $i \leq h$. Но коэффициенты многочленов X_i удовлетворяют условиям

$$\sum \alpha_{ik} X_i = 0 \quad \text{для } y = y_k.$$

В этих условиях h последних многочленов X не участвуют, т. е. $h(\nu + 1)$ коэффициентов этих многочленов произвольны. Имеем тогда $q = h(\nu + 1) + l$ произвольных коэффициентов γ , где l — число произвольных коэффициентов первых $p - h$ многочленов X . Если вернуться к уравнениям (4), то видно, что в $p - h$ первых уравнений l коэффициентов γ различны, и в последних h уравнениях $h(\nu + 1)$ коэффициентов γ различны по предыдущему. Если исключить l коэффициентов в этих $p - h$ уравнениях, останется $p - h - l$ соотношений между соответствующими v_i ; возвращаясь к числу, обозначенному ранее через q' , имеем

$$p - q' \geq p - h - l,$$

или

$$q \geq h\nu + q', \quad q > q',$$

что, как мы видели, невозможно. Значит последнее предположение должно быть отвергнуто; и всегда можно уменьшать число ν критических значений второго сорта. Следовательно, всегда можно предполагать, что это число равно нулю.

Пусть поэтому $\nu = 0$; тогда уравнение $P_i = 0$ будет поверхностью степени $n - 2$, проходящей через двойную кривую и прямую $y = t = 0$. Пусть Θ_h — число поверхностей порядка h , проходящих через двойную кривую. Многочлены X_i сводятся здесь к константам, и нужно узнать, сколько среди соотношений

$$\sum \alpha_{ik} X_i = 0 \tag{7}$$

различных; это число и есть $p - q$. Уравнение (7) означает, что $\sum \alpha_{ik} X_i$ делится на $y - y_k$, и тогда уравнение

$$S_k = \frac{\sum \alpha_{ik} P_i}{y - y_k} = 0$$

является уравнением поверхности порядка $n - 3$, проходящей через двойную кривую. Если уравнения (7) не все различны, это означает, что между α_{ik} есть соотношение вида

$$\sum \lambda_k \alpha_{ik} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p), \tag{8}$$

которое приводит к тождеству

$$\sum \lambda_k (\sum \alpha_{ik} P_i) = \sum \lambda_k (y - y_k) S_k = 0. \tag{9}$$

Уравнение (8) является тождеством, поэтому выражение $\sum \lambda_k (y_0 - y_k) S_k$ делится на $y - y_0$ и уравнение

$$\frac{\sum \lambda_k (y_0 - y_k) S_k}{y - y_0} = 0 \quad (10)$$

будет уравнением поверхности степени $n - 4$, проходящей через двойную кривую.

Число различных соотношений (7) равно числу поверхностей $S_k = 0$, т. е. Θ_{n-3} , минус число соотношений вида (8). Но любому соотношению вида (8) соответствует, как мы видели, присоединенная поверхность порядка $n - 4$.

Число соотношений (8) равно, следовательно, Θ_{n-4} , и

$$q = p - \Theta_{n-3} + \Theta_{n-4}.$$

Число $\Theta_{n-3} - \Theta_{n-4}$ представляет число плоских линейно независимых кривых, которые появляются как сечения плоскости $y = \text{const}$ присоединенной поверхностью порядка $n - 3$.

Предыдущий результат совпадает поэтому с результатом Пикара (*Fonction algébriques*, t. II, p. 438).

Вернемся более детально к некоторым вопросам.

Нужно сначала установить, что любая присоединенная поверхность порядка $n - 3$ есть комбинация поверхностей $S_k = 0$. Пусть, действительно, $S = 0$ — подобная поверхность. Ее пересечение с плоскостью $y = \text{const}$ будет присоединенной порядка $n - 3$ к кривой K ; для этого значения y будем иметь, поэтому,

$$S = \sum \alpha_i P_i,$$

где α_i — конечные коэффициенты, если значение не критическое. Эти коэффициенты — очевидным образом рациональные функции y , обращающиеся в бесконечность только при критических значениях. Если Π — однородный многочлен порядка μ от y и t , аннулирующийся для критических значений y_k и только для них, то

$$\Pi S = \sum \varphi_i(y) P_i,$$

где φ_i — однородные многочлены порядка $\mu - 1$ от y и t ; при $y = y_k$ получим

$$\sum \varphi_i(y_k) P_i = 0,$$

откуда $\varphi_i(y_k) = \epsilon_k \alpha_{ik}$, ϵ_k — постоянный коэффициент.

Получаем тождество

$$\sum \varphi_i(y_k) P_i = \epsilon_k (y - y_k) S_k.$$

Но φ_i имеют степень меньше, чем Π , и

$$\frac{\varphi_i(y)}{\Pi} = \sum \frac{\varphi_i(y)}{y - y_k},$$

откуда

$$S = \sum \varepsilon_k S_k,$$

что и требовалось доказать.

Нужно, наконец, доказать, что все присоединенные порядка $n - 4$ можно представить в форме (10). Действительно, пусть $T=0$ — подобная присоединенная поверхность; положим, согласно предыдущей теореме,

$$tT = \sum \varepsilon_k S_k, \quad yT = \sum \varepsilon'_k S_k;$$

получим тождество

$$\sum (\varepsilon_k y - \varepsilon'_k t) S_k = \sum \frac{\varepsilon_k y - \varepsilon'_k t}{y - y_k t} \left(\sum \alpha_{ik} P_i \right) = 0.$$

Однако для всех значений y , кроме критических, P_i , рассматриваемые как функции x и z , линейно независимы. Поэтому все коэффициенты предыдущего соотношения нулевые, иначе говоря (полагая, например, $t=1$)

$$\sum \alpha_{ik} \frac{\varepsilon_k y - \varepsilon'_k}{y - y_k} = 0,$$

и это выполнено тождественно для всех y . Последнее возможно, только если $\frac{\varepsilon_k y - \varepsilon'_k}{y - y_k}$ сводится к постоянной λ_k , и тогда получаем

$$\sum \lambda_k \alpha_{ik} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

т. е. соотношение вида (8), что и требовалось доказать.

Мы уже видели в разделе V, что можно получить все кривые, расположенные на поверхности, из некоторого числа примитивных кривых; мы дали оценку сверху числа этих кривых и сказали, что эта оценка действительно достигается, если некоторое соотношение (2) раздела V сводится к равенству,

$$\mu = p(v + 1). \quad (11)$$

В общем же случае максимум не достигается. Согласно предыдущему, условие (11) эквивалентно следующему:

$$\Theta_{n-4} = 0.$$

Таким образом, максимум числа p примитивных кривых будет достигаться для поверхностей нулевого геометрического рода и не будет достигаться, вообще говоря, для поверхностей с геометрическим родом больше нуля*.

* См.: S. L e f s c h e t z. Trans. Amer. Math. Soc., 1921, 22, 348. (Р. Г.).

О КРИВЫХ НА АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ*

Я уже опубликовал в «Annales scientifiques de l'École normale supérieure» статью под таким же названием [18], однако мне хотелось бы вернуться здесь к некоторым местам, которые в той статье не были обсуждены достаточно детально.

1. Критические значения

Пусть $F(x, y, z, t) = 0$ — алгебраическая поверхность n -го порядка, уравнение которой выражено в однородных координатах; это поверхность S ; мы пересекаем ее переменной плоскостью $y/t = \text{const}$, которая пересечет S по кривой K_y . Прямая $u=t=0$ протыкает поверхность S в n точках $A_1, A_2, \dots, A_n$, которые принадлежат всем кривым K_y . Пусть p — род кривой K_y ; мы можем образовать p абелевых интегралов первого рода относительно этой кривой

$$u_i = \int \frac{P_i dx}{Q F'_z} \quad (i = 1, 2, \dots, p), \quad (1)$$

где F'_z — частная производная F по z , Q — однородный многочлен степени ν от y и t (один и тот же для всех интегралов u_i) и, наконец, P_i — однородные многочлены степени $n + \nu - 2$ от x, y, z, t , имеющие степень $n - 3$ относительно x и z . Многочлены P_i должны обращаться в нуль во всех двойных точках кривой K_y , кроме дополнительных двойных точек, которые эта кривая может приобретать при некоторых значениях y , для которых ее род понижается. Иными словами, поверхность $P_i = 0$ должна проходить через двойную кривую поверхности S .

Интеграл берется при переменных x и z , когда $F = 0$, а y и t постоянны; нижний предел — точка A_1 , верхний предел — переменная точка M кривой K_y . Интеграл u_i является тогда функцией координат x, y, z, t переменной точки M на поверхности S , и эта функция определена с точностью до периода. Мы сохраним за собой возможность, когда это уместно, отказываться от однородных координат, полагая $t = 1$.

* Sur les courbes tracées sur une surface algébrique. — Sitzungsber. Berlin. math. Ges., 1911, 10, 28—55.

Назовем критическими значениями второго рода значения y (или y/t), которые аннулируют знаменатель Q . Критические значения первого сорта — те, для которых можно найти p коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, таких, что

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_p P_p$$

обращается в нуль тождественно при всех x и z . Я назову *особыми значениями* y те из них, для которых род кривой K_y понижается; они соответствуют плоскостям $y/t = \text{const}$, которые касаются S или проходят через коническую точку поверхности.

Для значения y (или y/t), которое не является особым или критическим второго сорта, функция u_i (как и периоды интеграла u_i) конечна. Если значение особое, но не критическое, интеграл u_i может обращаться в бесконечность, только когда путь интегрирования проходит через новую двойную точку. Если значение критическое второго сорта, то u_i , вообще говоря, бесконечно во всех точках кривой K_y .

Предположим, что значение y — критическое первого сорта, но не является особым или критическим второго сорта; комбинация

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_p u_p$$

обращается в нуль для этого значения y , причем для всех точек M кривой K_y .

Легко видеть, что происходит, если значение одновременно критическое первого и второго сорта. Пусть y_0 — подобное значение; тогда для $y = y_0 t$ знаменатель, как и $\sum \alpha_i P_i$, тождественно нулевые; очевидно, что, вообще говоря, интегралы u_i становятся бесконечными, в то время как комбинация $\sum \alpha_i u_i$ остается конечной.

Уточним теперь случай особого некритического значения. Он подразделяется на несколько случаев, из которых мы обсудим только следующие:

1. Плоскость $y/t = \text{const}$, соответствующая особому значению, является обыкновенной касательной плоскостью. Пусть $\omega_{1i}, \omega_{2i}, \omega_{3i}, \dots$ — периоды интеграла u_i ; можно считать, что эти периоды выбраны так, что все они, за исключением ω_{1i} , являются голоморфными функциями y в окрестности рассматриваемого особого значения y_0 , не обращающимися к тому же в нуль при $y = y_0$ (я полагаю для краткости $t = 1$). Что же касается ω_{1i} , то его можно представить в виде [19]

$$\omega_{1i} = \varphi(y) + \frac{\omega_{2i}}{2\pi\sqrt{-1}} \ln(y - y_0),$$

где $\varphi(y)$ голоморфна при $y = y_0$. Одно из значений u_i , которое я обозначу u_i^* , остается голоморфным при $y = y_0$, и общее значение записывается как

$$u_i = u_i^* + \sum m_k \omega_{ki} = \psi(y) + \frac{m_1 \omega_{2i}}{2\pi\sqrt{-1}} \ln(y - y_0),$$

где m — целое, $\psi(y)$ — голоморфная при $y=y_0$. Таким образом, это общее значение становится логарифмически бесконечным в точке $y=y_0$. Оно меняется на $u_i + m_1 \omega_{2i}$, когда y обходит вокруг особого значения y_0 .

2. Плоскость $y/t=\text{const}$ проходит через коническую точку S , и эта коническая точка обладает неособым конусом второго порядка.

Результат снова тот же самый, только

$$\omega_{1i} = \varphi(y) + \frac{2\omega_{2i}}{2\pi\sqrt{-1}} \ln(y-y_0),$$

$$u_i = \psi(y) + \frac{2m_1\omega_{2i}}{2\pi\sqrt{-1}} \ln(y-y_0),$$

так что когда y обходит вокруг y_0 , ω_{1i} и u_i меняются на $\omega_{1i} + 2\omega_{2i}$ и $u_i + 2m_1\omega_{2i}$, а не на $\omega_{1i} + \omega_{2i}$ и $u_i + m_1\omega_{2i}$, как раньше.

Рассмотрим точки контакта кривой K_y с касательными, параллельными заданному направлению; в двух рассмотренных выше случаях две из этих точек, A и B , сливаются в одну при $y=y_0$; однако в первом случае A и B меняются между собой, когда y оборачивается вокруг y_0 ; во втором случае A и B возвращаются в прежние положения, но после того, как они обернулись одна вокруг другой.

3. Плоскость $y/t=\text{const}$ проходит через коническую точку S , и эта коническая точка обладает касательным конусом третьего порядка без других особенностей.

Тогда есть шесть точек контакта, которые сливаются в одну при $y=y_0$; четыре периода ω_{ki} (а именно те, которые получаются интегрированием вдоль контуров, мало отклоняющихся от этих шести точек контакта) остаются однозначными функциями y в окрестности $y=y_0$; однако они могут обращаться в бесконечность первого порядка при $y=y_0$; другие периоды могут перестать быть однозначными.

Мы будем различать три сорта периодов: те, о которых только что шла речь и контуры которых мало уклоняются от наших шести точек контакта; те, контуры которых все время остаются далекими от этих шести точек; те, контуры которых проходят между этими шестью точками и затем удаляются от них.

Аналогично, будем различать три сорта интегралов: те, в которых P_i обращаются в нуль в конической точке; те, где P_i не зависят от x и z ; те, которые не удовлетворяют двум предыдущим условиям. Если поверхность S имеет только конические точки в качестве своих особенностей, интегралы третьего сорта являются комбинациями двух первых.

Тогда периоды второго сорта ведут себя регулярно; как мы видели, периоды первого сорта выглядят как $\frac{1}{y-y_0}$; это же происходит с интегралами второго и третьего сорта. Периоды интегралов первого сорта остаются голоморфными функциями y .

Что же касается периодов третьего сорта, то видно, что они ведут себя как $\frac{1}{y - y_0}$ для интегралов первого сорта, что они становятся логарифмически бесконечными для интегралов второго сорта; для интегралов третьего сорта эти особенности могут объединяться, т. е. их разложение может содержать члены $\frac{1}{y - y_0}$, $(y - y_0)^m$, $\ln(y - y_0)$, $(y - y_0)^m \ln(y - y_0)$.

Как же ведут себя сами интегралы u_i ? Это зависит от того, будет точка M совпадать с конической точкой или нет; во втором случае одно из значений u_i , которое я обозначу u_i^* , ведет себя регулярно; общее же значение

$$u_i = u_i^* + \sum m_k \omega_{ki}$$

ведет себя так же, как периоды; когда y обходит вокруг y_0 , u_i увеличивается на период.

Что теперь произойдет, если при стремлении y к y_0 точка M будет бесконечно приближаться к конической точке? Интегралы первого сорта станут логарифмически бесконечными, второго сорта — будут вести себя как $\frac{1}{y - y_0}$; третьего сорта — представятся комбинациями этих двух особенностей.

Вернемся снова к двум первым случаям, чтобы уточнить поведение u_i при приближении точки M к новой двойной точке.

Пусть, например, $x=y=z=0$ — новая двойная точка, которую кривая K_y приобретает при обращении y в нуль. В первом случае (обыкновенная касательная плоскость) мы предположим, что точка M приближается к новой двойной точке таким образом, что $x/\sqrt{y}$, $z/\sqrt{y}$ остаются ограниченными. Тогда u_i будут иметь вид

$$\psi(y) + \mu \frac{\omega_{2i}}{2\pi \sqrt{-1}} \ln(y - y_0) \quad (\text{здесь } y_0 = 0),$$

где ψ — голоморфна, а μ — полуцелое число. Во втором случае (коническая точка второго порядка) мы предположим, что x/y и z/y стремятся к конечным пределам; u_i снова будут иметь тот же вид, только μ на этот раз — целое нечетное.

Этот разговор на тему особых значений поможет понять и то, что касается *кажущихся критических* значений.

Пусть

$$u_i = \int \frac{P_i dx}{Q F'_z}.$$

Я предполагаю, что P_i делится на y , так что y — критическое значение первого сорта, а точка $x=y=z=0$ — коническая точка третьего порядка на поверхности S , так что $y=0$ будет *в то же время* особым значением, соответствующим третьему случаю, разобранному выше. Кроме того, P_i не зависит от x и z , так что наш интеграл будет второго сорта.

Наконец, Q не обращается в нуль при $y=0$. В этих условиях интеграл tu_i/y конечен при $y=0$, если точка M не совпадает с конической точкой, и становится бесконечным подобно $1/y$ в противном случае. Следовательно, интеграл u_i обращается в нуль при $y=0$, если точка M не проходит через коническую точку, но он будет конечным в противном случае. Значение $y=0$ будет поэтому только кажущимся критическим значением, поскольку интеграл u_i не обращается в нуль при $y=0$.

Эта трудность не угрожает в двух других случаях, рассмотренных выше, а именно: обыкновенной касательной плоскости и конической точки второго порядка. Действительно, tu_i/y растет логарифмически, откуда u_i — нулевое.

Пикар доказал, что бирациональным преобразованием можно заменить произвольную поверхность на поверхность S , имеющую в качестве особенностей только двойную кривую и некоторые тройные точки с различными касательными плоскостями, которые являются тройными точками этой двойной кривой [20]. Можно поэтому всегда предполагать, что поверхность S не имеет конических точек; с другой стороны, выбор координатных осей произволен, и мы можем предполагать, что прямая $y=t=0$ не касается поверхности и не лежит ни на особых касательных плоскостях к этой поверхности, ни на плоскостях, касающихся поверхности в двух или более точках. Единственные особые значения, которые мы будем рассматривать, соответствуют, следовательно, обыкновенным касательным плоскостям.

Далее, мы можем достаточно произвольно выбирать интегралы u_i . В самом деле, если положить

$$X'_k = \sum_{i=1}^p \rho_{ik} \frac{P_i}{Q} \quad (k=1, 2, \dots, p), \quad (2)$$

где ρ_{ik} — p^2 рациональных функций, однородных нулевой степени по y и t , получим $X'_k = P'_k/Q'$, Q' — однородный многочлен степени ν' по y и t , P'_k — однородный многочлен степени $n + \nu' - 2$ от x, y, z, t , содержащий x и z самое большее в степени $n - 3$. Иными словами, интегралы

$$u'_k = \int \frac{P'_k dx}{Q' F'_z} = \sum \rho_{ik} u_i$$

могут играть ту же роль, что и u_i .

Какие упрощения могут быть получены за счет преобразования (2)? Во первых, можно принять [21] $\rho_{ik} = Q/Q'$, где Q' — многочлен того же вида, что и Q ; тогда ν критических значений второго сорта, задаваемых ранее условием $Q=0$, будут задаваться теперь условием $Q'=0$; многочлен Q' произволен, так что ν критических значений второго сорта могут быть выбраны произвольно. Мы можем поэтому считать, что они не совпадают ни с критическими значениями первого сорта, ни с особыми значениями. И что они все различны и соответствуют простым бесконечностям.

Во-вторых, мы можем предположить, что критические значения первого сорта не совпадают с особыми значениями. В самом деле, пусть $y = y_0 t$ — особое значение, и оно же является критическим первого сорта. Оно может быть критическим значением высокого порядка. Если, например, среди комбинаций $\sum \alpha_i P_i$ есть μ_3 штук, делящихся на $(y - y_0 t)^3$, μ_2 — делящихся на $(y - y_0 t)^2$ и μ_1 — делящихся на $(y - y_0 t)$, это будет критическое значение порядка $3\mu_3 + 2\mu_2 + \mu_1$. Достаточно рассмотреть частный случай; предположим поэтому для определенности, что на $(y - y_0 t)^2$ делится только $\sum \beta_i P_i$, что $\sum \gamma_i P_i$ делится на $y - y_0 t$, и что любая комбинация, делящаяся на $y - y_0 t$, имеет вид $B \sum \beta_i P_i - C \sum \gamma_i P_i$. Положим тогда в качестве первого преобразования

$$P'_1 = \sum \beta_i P_i, \quad P'_2 = \sum \gamma_i P_i, \quad P'_3 = \sum \delta_i P_i, \quad \dots, \quad P'_p = \sum \theta_i P_i,$$

чтобы определитель постоянных коэффициентов $\beta, \gamma, \delta, \dots, \theta$ был не нулевой. Тогда P'_1 делится на $(y - y_0 t)^2$, а P'_2 — на $(y - y_0 t)$. Сделаем теперь второе преобразование, полагая

$$P''_1 = \frac{(y - y_1 t)(y - y_2 t)}{(y - y_0 t)^2} P'_1, \quad P''_2 = \frac{y - y_3 t}{y - y_0 t} P'_2, \quad P''_k = P'_k \quad (k > 2).$$

Для многочленов P'' тройное критическое значение y_0 исчезает и заменяется на три простых критических значения y_1, y_2, y_3 , которые выбираются произвольно. Можно поэтому всегда предполагать, что все критические значения просты, различны между собой и отличны от особых значений.

Можно также воспользоваться преобразованием (2), чтобы уничтожить все критические значения второго сорта; однако это то место, которое мы сможем полностью доказать только несколько позже и которое потребует некоторых уточнений.

Пусть

$$y = y_1 t, \quad y = y_2 t, \quad \dots, \quad y = y_\mu t$$

— различные критические значения первого сорта. Пусть

$$\sum \alpha_i^1 P_i, \quad \sum \alpha_i^2 P_i, \quad \dots, \quad \sum \alpha_i^\mu P_i \quad (3)$$

— линейные комбинации P_i , обращающиеся в нуль при этих критических значениях. Комбинации (3) могут быть линейно выражены через какие-то h из них; h меньше или равно p . Если $h = p$, нашу теорему легко доказать; в самом деле, пусть $y = y_0 t$ — критическое значение второго сорта; предположим, что p первых комбинаций (3) линейно независимы, и положим

$$P'_1 = \sum \alpha_i^1 P_i, \quad P'_2 = \sum \alpha_i^2 P_i, \quad \dots, \quad P'_p = \sum \alpha_i^p P_i.$$

Тогда P'_k делится на $y - y_k t$, и мы положим

$$P''_k = \frac{y - y_0 t}{y - y_k t} P'_k;$$

критическое значение $y=y_0t$ исчезнет, и так одно за другим можно все их уничтожить.

Если $h < p$, среди наших P многочленов P_i найдутся такие, которые не являются линейными комбинациями комбинаций (3). Если такое произойдет, мы для краткости будем иногда говорить, что соответствующие интегралы не имеют критических значений первого сорта. Мы увидим ниже, что *это обстоятельство не может произойти, пока существуют критические значения второго сорта*; тем самым, мы завершим доказательство возможности устранения всех критических значений второго сорта.

2. Функции v_i

Пусть C — алгебраическая кривая, лежащая на поверхности S ; плоскость $y/t = \text{const}$ пересекает эту кривую в m подвижных точках $M_1, M_2, \dots, M_m$; пусть $u_i^1, u_i^2, \dots, u_i^m$ — соответствующие значения интеграла u_i ; я положу

$$v_i = u_i^1 + u_i^2 + \dots + u_i^m; \quad (1)$$

стоит отметить, что это не совсем то, что я использовал в упомянутой статье из «Annales de l'École Normale»; там я полагал

$$mv_i = u_i^1 + u_i^2 + \dots + u_i^m;$$

новое обозначение более удобно. Мы получим тогда:

1) что для обыкновенного значения y v_i — голоморфная функция от y ; при $y = \infty$ она голоморфна от $1/y$;

2) что функции v_i могут обращаться в бесконечность первого порядка для критических значений второго сорта (всюду предполагаемых простыми);

3) что для критического значения первого сорта, для которого $\sum \alpha_i P_i$ обращается в нуль, $\sum \alpha_i v_i = 0$;

4) что для особого значения v_i могут иметь логарифмическую особенность; когда y обходит вокруг особого значения, v_i увеличивается на период. Я уточню. Предположим, что u_i^* — значение u_i , являющееся голоморфной функцией от y , и что рассматриваемое значение равно

$$u_i = u_i^* + \sum m_k \omega_{ki},$$

тогда (см. предыдущий раздел)

$$u_i = \psi(y) + \frac{m_1 \omega_{2i}}{2\pi \sqrt{-1}} \ln(y - y_0), \quad (2)$$

и u_i заменяется на $u_i + m_1 \omega_{2i}$, а v_i — на $v_i + \sum m_1 \omega_{2i}$, где $\sum m_1$ — сумма значений m_1 относительно различных интегралов $u_i^1, u_i^2, \dots, u_i^m$. Видно поэтому, что к v_1 добавляется период, а к $v_2, v_3, \dots, v_p$ — соответствующие периоды.

Интересно различать несколько случаев. Предположим сначала, что кривая C не проходит через точку касания; тогда все функции u_i^k имеют вид (2), и

$$v_i = \psi(y) + \sum m_1 \frac{\omega_{2i}}{2\pi \sqrt{-1}} \ln(y - y_0),$$

где $\psi(y)$ голоморфна, а $\sum m_1$ — целое число.

Предположим теперь, что кривая C проходит через точку касания; она касается тогда плоскости $y/t = \text{const}$, так что две из точек M (например M_1 и M_2) совмещаются с точкой касания. Тогда все интегралы u_i^k имеют вид (2), за исключением интегралов u_i^1 и u_i^2 , для которых

$$u_i^1 \text{ или } u_i^2 = \psi(y) + \mu \frac{\omega_{2i}}{2\pi \sqrt{-1}} \ln(y - y_0),$$

где μ — полуцелое. Снова имеем

$$v_i = \psi(y) + K \frac{\omega_{2i}}{2\pi \sqrt{-1}} \ln(y - y_0),$$

где K — целое.

Можно предположить также, что кривая K_y распадается для особого значения y ; предыдущий результат сохранится.

Заметим, что каждому особому значению сопоставляется период, играющий специальную роль [22]; все периоды являются функциями y , которые увеличиваются на кратное этого специального периода, когда y совершает обход особого значения. Этот специальный период мы обозначали выше как ω_{2i} . Можно теперь уточнить условие 4, сказав, что когда y обходит вокруг особого значения, все функции v_i увеличиваются на кратное специального периода, который сопоставляется этому значению.

Любая система функций v_i , удовлетворяющая условиям 1, 2, 3, 4, будет называться системой *нормальных функций*. Любой кривой C соответствует система нормальных функций; можно указать, однако, и другие системы нормальных функций:

- 1) периоды образуют систему нормальных функций;
- 2) пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — точки пересечения S с прямой $y=t=0$; эти точки принадлежат всем кривым K_y ; если a_i^k — значение интеграла u_i в точке A_k , то a_i^k образуют систему нормальных функций. В частности, a_i^1 нулевые, потому что a_i^1 служит нижним пределом интегрирования.

3. Построение нормальных функций

Периоды ω_{ki} удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям с рациональными коэффициентами.

Имеем

$$\Delta_i(\omega) = 0, \tag{1}$$

где Δ_i — дифференциальное выражение, одно и то же для

$$\omega_{1i}, \omega_{2i}, \dots, \omega_{2p,i},$$

но зависящее от индекса i . Это выражение имеет порядок $2p$, т. е. содержит производные от ω до порядка $2p$ включительно. Коэффициенты его — многочлены от y ; коэффициент при члене наивысшего порядка может обращаться в нуль только для особых значений; более того, для каждого особого значения один из периодов перестает быть голоморфным (а именно тот, который мы обозначили в разделе 1 как ω_1) каждое из этих значений — простой корень, так что коэффициент при $\frac{d^{2p}\omega}{dy^{2p}}$ может быть записан как

$$(y - a_1)(y - a_2) \dots (y - a_h),$$

где $a_1, a_2, \dots, a_h$ — различные особые значения. Значит, это многочлен степени h , где h — число особых значений. Кроме того, интегралы уравнения (1) ведут себя регулярно для $y = \infty$, и степени коэффициентов этого уравнения должны убывать таким образом, чтобы коэффициент при $\frac{d^k\omega}{dy^k}$ имел степень $h - 2p + k$, а коэффициент при ω — степень $h - 2p - 1$ (а не $h - 2p$).

Мы имеем p уравнений (1), потому что индекс i может принимать p различных значений; однако эти уравнения очень похожи; например, от уравнения $\Delta_1(\omega)$ простым преобразованием можно перейти к уравнению $\Delta_i(\omega)$; если положить

$$\omega^* = R_0\omega + R_1\frac{d\omega}{dy} + R_2\frac{d^2\omega}{dy^2} + \dots + R^{2p-1}\frac{d^{2p-1}\omega}{dy^{2p-1}},$$

где R — подходящим образом выбранные рациональные функции y , и если $\Delta_1(\omega) = 0$, то ω^* будет удовлетворять уравнению $\Delta_i(\omega^*) = 0$. Уравнение (1) называется *уравнением Пикара*.

Рассмотрим теперь в плоскости y различные особые значения a_k ; соединим их с бесконечностью разрезами Q_k , не пересекающимися друг друга. С каждым из этих значений сопоставим период, играющий специальную роль (обозначенный в разделе 2 как ω_{2i}). Этот период для интегралов $u_1, u_2, \dots, u_p$ будет обозначаться через $\varpi_{k1}, \varpi_{k2}, \dots, \varpi_{kp}$.

Речь идет о построении системы нормальных функций v_i ; поэтому я должен предполагать, что функции v_i остаются однозначными, если разрез не пересекаются, и заменяются на

$$v_i + \lambda_k \varpi_{ki},$$

когда пересекается разрез Q_k (λ_k — целое число, зависящее от k , но не от i). Пусть теперь $b_1, b_2, \dots, b_p$ — критические значения второго сорта. Мы удовлетворим условиям, полагая

$$v_i = \sum_{Q_k} \frac{\lambda_k}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\varpi'_{ki} dY}{Y - y} + \sum \frac{A_{ij}}{y - b_j} + C_i, \quad (2)$$

где Y — переменная, по которой идет интегрирование; $\tilde{\omega}'_{ki}$ получается из $\tilde{\omega}_{ki}$ заменой y на Y ; A и C — произвольные постоянные. Видно, что выражение (2) удовлетворяет объявленным условиям; так как $\tilde{\omega}'_{ki}$ — голоморфная функция от Y при $Y=a_k$, т. е. на краю разреза Q_k (вспомним, в самом деле, сказанное о ω_{2i} в разделе 1), v_i будет логарифмически бесконечной при $y=a_k$; она будет бесконечной первого порядка для критических значений второго сорта и регулярной для всех остальных значений.

Остается посмотреть, что происходит при $y=\infty$. Заметим, что целые числа λ не произвольны; необходимо, чтобы когда мы описываем окружность достаточно большого радиуса, пересекающую все разрезы, v_i возвращались к своему первоначальному значению. Если периоды $u_i = \omega_{1i}, \omega_{2i}, \dots, \omega_{2pi}$, то

$$\tilde{\omega}_{ki} = \sum \mu_{kj} \omega_{ji},$$

где μ_{kj} — целые. Кроме того, ω_{ji} меняются на $\omega_{ji} + v_{ki} \tilde{\omega}_{kj}$, когда пересекается разрез Q_k , где v_{kj} — целые. Когда же последовательно пересекаются разрезы $Q_1, Q_2, \dots, Q_l$, занумерованные в порядке пересечения с окружностью достаточно большого радиуса, v_i заменяются на

$$v_i + \sum \rho_{lj} \omega_{ji},$$

где ρ — целые, которые мы сейчас уточним. Во-первых,

$$\rho_{1j} = \lambda_1 \mu_{1j}.$$

Затем

$$\rho_{kj} - \rho_{k-1,j} = \mu_{kj} (\lambda_k + \sum \rho_{k-1,l} v_{kl});$$

согласно этим уравнениям, ρ зависит от неизвестных целых чисел λ и определенных чисел μ и v ; это линейная и однородная функция целых λ . Но так как v_i должны вернуться к исходному значению, когда пересекаются все h разрезов, мы должны иметь

$$\rho_{h,1} = \rho_{h,2} = \dots = \rho_{h,2p} = 0. \quad (3)$$

Этим $2p$ линейным уравнениям и должны удовлетворять λ .

Если это условие выполнено, v_i — однозначная функция от y в окрестности $y=\infty$; более того, эта функция конечна; действительно, каждый член в (2) конечен, за исключением интегралов, а эти интегралы могут стать только логарифмически бесконечными, потому что ω_{ki} конечны для $Y=\infty$. Логарифмические члены, единственно возможные в бесконечности, должны уничтожаться, так как v_i однозначна; следовательно, v_i конечна.

Условия (3) не единственные, которые должны быть введены. Пусть $c_1, c_2, \dots, c_p$ — критические значения первого сорта, и предположим, что для $y=c_k$

$$\sum a_{ik} P_i = 0,$$

где α_{ik} — постоянные; тогда для $y = c_k$ должны иметь

$$\sum \alpha_{ik} v_i = 0. \quad (4)$$

Предположим, что целые λ удовлетворяют условиям (3); соотношения (4) будут тогда соотношениями между A и C .

Если число критических значений первого сорта меньше, чем $p(\nu + 1)$, число различных соотношений (4) будет *тем более* меньше, чем $p(\nu + 1)$ (я говорю — *тем более*, потому что соотношения (4) могут не быть различными). Можно тогда удовлетворить этим условиям бесконечным числом способов, потому что число неизвестных A и C равно $p(\nu + 1)$. Получается в таком случае *непрерывное* семейство систем нормальных функций, соответствующее, как мы скоро увидим, непрерывному семейству алгебраических кривых, не составляющих линейную систему.

Если, в частности, приравняем все λ нулю, v_i будут однозначными функциями от y , имеющими полюсы первого порядка в критических значениях второго сорта; следовательно, v_i — рациональные функции; мы получим поэтому *бесконечное множество систем рациональных нормальных функций*.

Если число критических значений первого сорта равно $p(\nu + 1)$, соотношения (4) будут в общем случае различны; число неизвестных равно числу уравнений, и мы получим для каждой системы значений λ , удовлетворяющей условиям (3), одну систему нормальных функций. Так как мы можем варьировать λ , то опять получим бесконечное множество нормальных функций, однако эта бесконечность будет уже дискретной. В частности, если все λ нулевые, то все v_i будут равны нулю.

Может случиться, однако, что число соотношений (4) равно $p(\nu + 1)$, но эти соотношения не все различны. Рассмотрим, в частности, случай без критических значений второго сорта, случай, к которому, как мы увидим позже, сводится любой другой. Если соотношения (4) не все различны, для любой системы λ существует бесконечно много систем нормальных функций; беря разность двух произвольных систем, мы получим систему, для которой все λ нулевые; тогда

$$v_i = \sum \frac{A_{ij}}{y - b_j} + C_i;$$

а так как критических значений второго сорта нет, то $v_i = C_i$, т. е. нормальные функции сводятся к постоянным. Соотношения (4) записываются тогда как $\sum \alpha_{ik} C_i = 0$, и их будет, как предполагается, p штук, ибо $\nu = 0$. Если они все различны, все C_i обратятся в нуль; если они не все различны, некоторые из C_i могут быть выбраны произвольно; среди C_i существуют такие, которые нельзя выразить через линейные комбинации правых частей соотношений (4); соответствующие интегралы u_i , по терминологии конца раздела 1, не имеют критических значений первого сорта. Точно так же интегралы, не имеющие критических значений первого сорта, существуют, если число соотношений (4) меньше $p(\nu + 1)$. *Существование системы нор-*

мальных рациональных функций связано с существованием интегралов, лишенных критических значений первого сорта в смысле конца первого раздела.

Если, наконец, число критических значений первого сорта больше, чем $p(\nu + 1)$, вообще говоря, нельзя удовлетворить соотношениям (4). Нормальные функции, соответствующие данным значениям целых λ , вообще говоря, не существуют, и могут быть образованы лишь на специальных поверхностях, удовлетворяющих, так сказать, арифметическим условиям [23].

Рассмотрим теперь выражения $\Delta_i(v_i)$; я утверждаю, что это однозначные функции y . Действительно, когда y описывает произвольный замкнутый контур, v_i заменяются на $v_i + \Omega_i$, где Ω_i — период u_i ; $\Delta_i(v_i)$ заменяется на $\Delta_i(v_i) + \Delta_i(\Omega_i)$. Но, по условию (1), $\Delta_i(\Omega_i) = 0$, следовательно, $\Delta_i(v_i)$ не меняется, что и требовалось доказать.

Выражение $\Delta_i(v_i)$ конечно для обыкновенных значений y и для критических значений первого сорта. В окрестности особого значения мы имеем

$$v_i = v_i^* + \sum m_k \omega_{ki},$$

где v_i^* голоморфна, а m_k целые. Тогда $\Delta_i(v_i^*)$ голоморфна; $\Delta_i(\omega_{ki})$ нулевые по условию (1); следовательно, $\Delta_i(v_i)$ голоморфна.

Для критического значения второго сорта v_i обращается в бесконечность первого порядка, ее производная порядка q имеет полюс порядка $q + 1$, и $\Delta_i(v_i)$ имеет полюс порядка $2p + 1$.

Для $y = \infty$ v_i конечна, ее производная порядка q имеет нуль порядка $q + 1$; с другой стороны, в $\Delta_i(v_i)$ коэффициент при v_i имеет полюс порядка $h - 2p - 1$, тогда как коэффициент при q -й производной имеет полюс порядка $h - 2p + q$; заключаем поэтому, что $\Delta_i(v_i)$ имеет полюс порядка $h - 2p - 1$.

Резюмирую. Получаем, что $\Delta_i(v_i)$ — рациональная функция от y , и можно написать

$$\Delta_i(v_i) = \frac{N_i}{Q^{2p+1}}, \quad (5)$$

где $Q = (y - b_1)(y - b_2) \dots (y - b_\nu)$ и где N_i — многочлен от y порядка $h + (2p + 1)(\nu - 1)$.

Таково дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет нормальная функция v_i .

4. Введение абелевых функций

Для лучшего понимания существа проблемы, к которой я сейчас приступаю, я ограничусь сначала частным случаем, где $p = 1$ и где, следовательно, рассматриваемые абелевы функции сводятся к эллиптическим функциям. Мы имеем тогда только одну функцию u_i , и «система» нормальных функций сводится к единственной функции, которую я обозначу v , опуская

нижний индекс за ненадобностью. У нас останутся только два периода ω_1 и ω_2 , которые будут функциями от y , определяемыми уравнением Пикара

$$\Delta(\omega) = 0 \quad (1)$$

(уравнение (1) предыдущего раздела), тогда как нормальная функция v будет удовлетворять

$$\Delta(v) = \frac{N}{Q^{2p+1}}$$

(уравнение (5) предыдущего раздела).

Рассмотрим теперь функцию $\wp(u)$ Вейерштрасса; она зависит не только от аргумента u , но и двух периодов ω_1 и ω_2 ; если мы подставим в качестве аргумента нормальную функцию v , определенную уравнением (2), и периоды $2\omega_1$ и $2\omega_2$, определенные как функции от y уравнением (1), функция Вейерштрасса станет функцией от y

$$\wp(v, \omega_1, \omega_2) = G(y), \quad (2)$$

именно ее и предполагается изучать.

Когда y обходит вокруг особого значения, периоды заменяются другими периодами, а v увеличивается на период. В этих условиях функция Вейерштрасса не меняется. Поэтому G является однозначной функцией от y .

Для обыкновенной точки, если к тому же v не равна периоду, G , очевидно, голоморфна и, кроме того, является голоморфной от $1/y$ в окрестности $y = \infty$.

Если $y = b$ — критическое значение второго сорта, мы видим, что v , ω_1 и ω_2 становятся бесконечными, однако $v(y - b)$, $\omega_1(y - b)$, $\omega_2(y - b)$ остаются голоморфными; поэтому

$$\wp(v, \omega_1, \omega_2) = (y - b)^2 \wp[v(y - b), \omega_1(y - b), \omega_2(y - b)]$$

голоморфна при $y = b$ и даже обращается в нуль; вспомним, в самом деле, что функция Вейерштрасса однородна степени -2 по v , ω_1 , ω_2 [24].

Если $y = c$ — критическое значение первого сорта, получается, что v , ω_1 и ω_2 обращаются в нуль; однако $\frac{v}{y - c}$, $\frac{\omega_1}{y - c}$, $\frac{\omega_2}{y - c}$ конечны, и так как

$$\wp(v, \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(y - c)^2} \wp\left(\frac{v}{y - c}, \frac{\omega_1}{y - c}, \frac{\omega_2}{y - c}\right),$$

то G — мероморфная функция y .

Если v равна периоду, функция Вейерштрасса уже не будет голоморфной от v , ω_1 и ω_2 , а только мероморфной функцией с полюсом порядка 2. Так что G останется мероморфной от y , независимо от того, будет ли рассматриваемое значение обыкновенным или критическим.

Остается посмотреть, что происходит для особых значений. Функция Вейерштрасса не зависит от выбора периодов; поэтому можно предполо-

жить, что $2\omega_1$ и $2\omega_2$ — именно те периоды, которые в окрестности рассматриваемого особого значения $y=y_0$ имеют вид

$$\psi(y) + \frac{\theta(y)}{2\pi\sqrt{-1}} \ln(y-y_0), \quad \theta(y),$$

где $\psi(y)$ и $\theta(y)$ голоморфны (и $\theta(y)$ не обращается в нуль); с другой стороны, v будет иметь вид

$$v^* + \lambda \frac{\theta(y)}{2\pi\sqrt{-1}} \ln(y-y_0),$$

где v^* голоморфна, а λ целое. Если вместе с Вейерштрассом (см.: «Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques») положить

$$h = e^{\pi\sqrt{-1}\frac{\omega_1}{\omega_2}}, \quad z = e^{\frac{\pi\sqrt{-1}v}{2\omega_2}},$$

то увидим, что $h(y-y_0)^{-1/2}$, $z(y-y_0)^{-\lambda/2}$ станут голоморфными и не обращающимися в нуль при $y=y_0$. С другой стороны, мы видим (там же, франц. изд., стр. 41), что

$$\sigma(v) = e^{2\tau_2\omega_2\omega^2} \cdot K\vartheta(v),$$

$$\vartheta(v) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \sum (-1)^m h^{\frac{(2m+1)^2}{4}} z^{2m+1},$$

где K — постоянный множитель, откуда

$$\wp(v) = \frac{\sigma'^2 - \sigma\sigma''}{\sigma^2} = -\frac{\tau_2}{\omega_2} + \frac{\vartheta'^2 - \vartheta\vartheta''}{\vartheta^2}$$

(я пишу v вместо u , сохраняя введенные ранее обозначения, и обозначаю через w вейерштрассовское v , т. е. $v/2\omega_2$). Имеем

$$\frac{2\omega_2}{\pi\sqrt{-1}} \vartheta'(v) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \sum (-1)^m (2m+1) h^{\frac{(2m+1)^2}{4}} z^{2m+1},$$

$$\left(\frac{2\omega_2}{\pi\sqrt{-1}}\right)^2 \vartheta''(v) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \sum (-1)^m (2m+1)^2 h^{\frac{(2m+1)^2}{4}} z^{2m+1}.$$

Я утверждаю, что

$$\vartheta(v) = (y-y_0)^{\frac{1}{8} + \frac{\lambda}{2}} H(y),$$

где H голоморфна, или, по крайней мере, мероморфна. В самом деле,

$$h^{\frac{(2m+1)^2}{4}} z^{2m+1} = (y-y_0)^{\frac{(2m+1)^2}{8} + \frac{\lambda}{2}(2m+1)} M(y),$$

где M голоморфна; показатель при $y-y_0$ равен $\frac{1}{8} + \frac{\lambda}{2} + \left[\frac{m^2+m}{2} + \lambda m\right]$;

выражение в скобках целое; каков бы ни был знак λ , это целое число положительно, если только m достаточно велико по абсолютной величине.

Если теперь мы отбросим множитель $(y - y_0)^{\frac{1}{8} + \frac{\lambda}{2}}$, мы увидим, что все члены ряда $\vartheta(v)$ голоморфны, кроме конечного числа мероморфных. Так же доказывается, что

$$\frac{2\omega_2}{\pi\sqrt{-1}}\vartheta'(v), \quad \left(\frac{2\omega_2}{\pi\sqrt{-1}}\right)^2\vartheta''(v)$$

имеют вид

$$(y - y_0)^{\frac{1}{8} + \frac{\lambda}{2}}H(y),$$

с мероморфной H ; так как $2\omega_2 = \theta(y)$ голоморфна и не обращается в нуль, выражение $(\vartheta'^2 - \vartheta\vartheta'')/\vartheta^2$ мероморфно. С другой стороны, согласно Вейерштрассу (там же, § 6, стр. 8, формула (10)), $\eta_2\omega_2$ — голоморфная функция h^2 (при $h=0$) и, следовательно, от y при $y=y_0$. Мы должны поэтому заключить, что для этого значения $\wp(v)$ — мероморфная функция y .

Таким образом, G остается мероморфной функцией от y и для особых значений. Поэтому она мероморфна на всей плоскости комплексных чисел, а также в бесконечности; следовательно, это рациональная функция от y .

Частная производная $\frac{d\wp}{dv}$ также дважды периодическая функция от v , не меняющаяся при замене системы периодов на эквивалентную. Тем же способом можно было бы доказать, что это рациональная функция от y .

Рассмотрим теперь три частные производные

$$\frac{d\wp}{dv}, \quad \frac{d\wp}{d\omega_1}, \quad \frac{d\wp}{d\omega_2}.$$

Когда к v прибавляется период, или система периодов заменяется эквивалентной системой, эти три производные претерпевают такое линейное преобразование, что

$$\begin{aligned} &v \frac{d\wp}{dv} + \omega_1 \frac{d\wp}{d\omega_1} + \omega_2 \frac{d\wp}{d\omega_2}, \\ &\frac{dv}{dy} \frac{d\wp}{dv} + \frac{d\omega_1}{dy} \frac{d\wp}{d\omega_1} + \frac{d\omega_2}{dy} \frac{d\wp}{d\omega_2}, \\ &\frac{d^2v}{dy^2} \frac{d\wp}{dv} + \frac{d^2\omega_1}{dy^2} \frac{d\wp}{d\omega_1} + \frac{d^2\omega_2}{dy^2} \frac{d\wp}{d\omega_2}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (3)$$

остаются инвариантными*. Заключаем (при помощи рассуждений, по-

* Чтобы это установить, используем разложение $\wp(v)$ в двойной ряд, сходящийся равномерно в любой ограниченной области плоскости v и для $R\left(\frac{\omega_2}{i\omega_1}\right) \geq a > 0$, а также разложения этих частных производных, вычисленных почленно, относительно v , ω_1 и ω_2 ; с другой стороны, нужно воспользоваться абсолютной сходимостью этих разложений. Впрочем, первые три соотношения инвариантности следуют из формул однородности.

добных приведенным ранее), что все эти выражения являются рациональными функциями y . Для второго из них это совсем очевидно, потому что это полная производная $\wp$ относительно y , а $\wp$ — рациональная функция от y .

Комбинируя эти выражения, находим, что

$$\Delta v \frac{d\wp}{dv} + \Delta \omega_1 \frac{d\wp}{d\omega_1} + \Delta \omega_2 \frac{d\wp}{d\omega_2}$$

— рациональная функция от y . Однако $\Delta \omega_1$ и $\Delta \omega_2$ нулевые; и согласно уравнению (1), это выражение сводится к $\Delta v \cdot \frac{d\wp}{dv}$.

Впрочем, мы уже знаем, что оба множителя Δv (согласно уравнению (2)) и $\frac{d\wp}{dv}$ — рациональные функции от y .

Перейдем теперь к общему случаю, когда род p кривой K_y больше или равен 1.

Воспользуемся свойствами промежуточных функций (функций Фробениуса) и, в частности, некоторыми из них, доказанными мною в «American Journal of Mathematics», 1886, t. 8, p. 289. Пусть ω_{ki} — k -й период i -го интеграла. Между периодами двух произвольных интегралов существует билинейное соотношение

$$\Phi(\omega_{ki}, \omega_{kj}) = 0, \quad (4)$$

такое, что функция Φ линейна и однородна как относительно

$$\omega_{1i}, \omega_{2i}, \dots, \omega_{2p,i},$$

так и относительно

$$\omega_{1j}, \omega_{2j}, \dots, \omega_{2p,j}$$

и меняет знак при перестановке ω_{ki} с ω_{kj} . Если взять, в частности, нормальные периоды, эта функция Φ примет простую форму. А именно:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{k=p} (\omega_{ki} \omega_{k+p,j} - \omega_{kj} \omega_{k+p,i}) = 0. \quad (4bis)$$

Рассмотрим теперь промежуточную функцию; это целая функция H от $v_1, v_2, \dots, v_p$, которая умножается на экспоненту, когда к переменным прибавляется период, так что

$$H(v_i + \omega_{ki}) = e^{P_k} H(v_i); \quad P_k = \sum_i a_{ki} v_i + \gamma_k.$$

Положим, с другой стороны,

$$\delta_k = \gamma_k - \frac{1}{2} \sum a_{ki} \omega_{ki}.$$

Величины γ_k и δ_k определены, очевидно, только с точностью до кратных $2\pi\sqrt{-1}$. Рассмотрим затем комбинации

$$\Phi(a_{ki}, \omega_{kj}) = \Phi_{ij}.$$

Мы предположим, что

$$\Phi_{ii} = 2m\pi\sqrt{-1}, \quad \Phi_{ij} = 0 \quad (i \neq j); \quad (5)$$

промежуточная функция будет тогда именоваться функцией порядка m ; промежуточная функция первого порядка определена с точностью до постоянного множителя, если известны ее мультипликаторы e^{P_k} . Промежуточная функция первого порядка четная или нечетная, когда все δ_k равны 0 или $\pi\sqrt{-1}$. Для заданных значений коэффициентов α_{ki} существует 2^{2p} четных или нечетных промежуточных функций первого порядка.

Если мы умножим промежуточную функцию H на экспоненту e^Q , где Q — однородный многочлен второй степени относительно v_i , мы получим новую промежуточную функцию H' , для которой Φ_{ij} и δ_k будут те же самые. Можно подобрать многочлен Q так, что α_{ki} аннулируются для всех периодов первого рода, то есть для $k \leq p$. Функция H' и есть тогда функция Θ , однако мы ограничимся четными или нечетными функциями, которых 2^{2p} штук. Среди таких функций Θ существует одна, называемая собственно Θ -функцией, которую мы будем обозначать Θ_0 для отличия от остальных, а именно, та функция, для которой все δ_k равны 0.

Рассмотрим теперь функции Π , являющиеся частными производными третьего порядка (относительно v) логарифма одной из функций Θ первого порядка, четной или нечетной. Таких функций Π будет $\frac{p(p+1)(p+2)}{6} \cdot 2^{2p}$ штук, поскольку имеется 2^{2p} функций $\ln \Theta$, и каждая из них имеет $\frac{p(p+1)(p+2)}{6}$ производных третьего порядка.

1. Частная производная третьего порядка логарифма четной или нечетной промежуточной функции первого порядка H равна одной из функций Π . В самом деле,

$$\ln \Theta = \ln H + Q.$$

Q — многочлен второй степени, и любая третья производная Q нулевая.

2. Когда к v добавляется период, Π не меняется, так как $\ln \Theta$ возрастает на P_k , третьи производные которого равны нулю.

3. Что произойдет теперь, если заменить периоды на эквивалентную систему нормальных периодов? Прежде всего, Φ_{ij} не меняются (см. указ. выше соч., стр. 323); кроме того, если промежуточная функция четная или нечетная, она сохраняет свой характер; если прежние δ_k были равны нулю или $\pi\sqrt{-1}$, такими же будут новые δ_k , хотя вовсе не обязательно, чтобы новое δ_k было равно соответствующему прежнему δ_k . Заключаем, что различные функции Π просто переставляются между собой; производная третьего порядка логарифма Θ заменяется на соответствующую частную производную логарифма другой функции Θ .

4. Если мы произведем с v_i линейное преобразование, произведем соответствующее преобразование с периодами ω_{ki} и контргradientное преобразование с α_{ki} , то $\sum \alpha_{ki} v_i$ не меняется, промежуточная функция H ,

определенная по v , ω , α и δ , не изменится; то же самое верно и для ее логарифма. Частные производные этого логарифма (и, в частности, соответствующие Π) будут подвергнуты линейному преобразованию (контргradientному тому, которому подвергается произведение трех множителей, равных v_i , различных или нет).

Если, например, v_1 умножается на c , ω_{k1} умножаются на c , α_{k1} делятся на c , то функции Π , представленные как

$$\frac{d^3}{dv_1^3} \ln \Theta, \quad \frac{d^3}{dv_1^2 dv_2} \ln \Theta, \quad \frac{d^3}{dv_1 dv_2^2} \ln \Theta, \quad \frac{d^3}{dv_2^3} \ln \Theta, \quad \dots$$

умножатся соответственно на

$$\frac{1}{c^3}, \quad \frac{1}{c^2}, \quad \frac{1}{c}, \quad 1, \quad \dots$$

Я предполагаю теперь заменить ω_{ki} их значениями как функций от y , и v_i — на систему нормальных функций от y ; функция Π превратится тогда в функцию $G(y)$, которую и предполагается изучить.

Когда y описывает замкнутый контур, v увеличивается на период; система периодов заменяется эквивалентной системой. В этих условиях функции G могут только переставляться между собой. Я уточню: условимся для краткости говорить, что две функции $G = \Pi$ принадлежат одной *системе*, если они происходят из разных $\ln \Theta$ при помощи одного и того же способа дифференцирования; и что они принадлежат одной *группе*, если они являются частными производными одного $\ln \Theta$. Тогда функции G из одной системы переставляются между собой. Следовательно, *любая симметрическая функция различных функций G из одной системы является однозначной функцией от y .*

Для обыкновенного значения y G — мероморфные функции y .

Для критического значения второго сорта $y = b$ произведения $v_i (y - b)$ и $\omega_{ki} (y - b)$ голоморфны; поэтому

$$\Pi(v_i, \omega_{ki}) = (y - b)^3 \Pi[v_i (y - b), \omega_{ki} (y - b)]$$

остаются мероморфными.

Для критического значения первого сорта $y = c$, такого, что $\sum \alpha_i v_i = 0$, сделаем линейную замену переменных $v'_1 = \sum \alpha_i v_i$, остальные v'_i — какие-то линейные функции v . Разумеется, ту же замену мы делаем с ω_{ki} , так что, например, $\omega'_{k1} = \sum \alpha_i \omega_{ki}$.

Тогда $\Pi(v'_i, \omega'_{ki})$ будут линейными функциями от $\Pi(v_i, \omega_{ki})$, и обратно. Я выделю v'_1 и ω'_{k1} , записывая

$$\Pi(v'_1, v'_i; \omega'_{k1}, \omega'_{ki}),$$

индекс i принимает значения $2, 3, \dots, p$; в этом случае v'_1 и ω'_{k1} обращаются в нуль при $y = c$, но $\frac{v'_1}{y - c}$ и $\frac{\omega'_{k1}}{y - c}$ ограничены. Тогда

$$\Pi(v'_1, v'_i; \omega'_{k1}, \omega'_{ki}) = \frac{1}{(y - c)^\lambda} \Pi\left(\frac{v'_1}{y - c}, v'_i; \frac{\omega'_{k1}}{y - c}, \omega'_{ki}\right)$$

(где $\lambda=0, 1, 2, 3$ в зависимости от рассматриваемой системы функций Π) снова остаются мероморфными. Следовательно, это верно и для Π .

Нам остается проверить случай особых значений. Пусть $y=y_0$ — такое значение; в окрестности этого значения

$$v_i = \psi_i(y) + \frac{\lambda \bar{\omega}_i}{2\pi \sqrt{-1}} \ln(y - y_0),$$

$$\omega_{ki} = \psi_{ki}(y) + \frac{\lambda_k \bar{\omega}_i}{2\pi \sqrt{-1}} \ln(y - y_0),$$

где ψ голоморфны, $\bar{\omega}_i$ — период, сопоставляемый особому значению в смысле раздела 2 и являющийся голоморфной функцией y , λ и λ_k — целые. Как мы видели, функции G из одной системы просто переставляются между собой, когда периоды заменяются на эквивалентную систему нормальных периодов; поэтому мы можем принять произвольную эквивалентную систему, и ее всегда можно выбрать так, что $\bar{\omega}_i = \omega_{1i}$; в этих условиях все λ_k нулевые, кроме λ_{p+1} , равного 1. В самом деле, форма

$$\sum_k (\omega_{ki} \omega_{k+p, j} - \omega_{k+p, i} \omega_{kj})$$

не должна изменяться, когда ω_{ki} заменяются на $\omega_{ki} + \lambda_k \omega_{1i}$ и ω_{kj} на $\omega_{kj} + \lambda_k \omega_{1j}$, что происходит при обходе y вокруг y_0 ; для этого все λ_k , кроме λ_{p+1} , должны быть нулевыми.

Мы видим затем, что когда особое значение y_0 соответствует обыкновенной касательной плоскости, а мы это предполагаем, существует период (линейная комбинация ω_{ki}), который увеличивается на $\bar{\omega}_i$, откуда $\lambda_{p+1} = \pm 1$. Наконец, мы предположим $\lambda_{p+1} = 1$, так как если λ_{p+1} отрицательно, достаточно заменить $\bar{\omega}_i$ на $-\bar{\omega}_i$.

Воспользуемся теперь линейным преобразованием переменных, полагая

$$v'_i = \sum \alpha_{ij} v_j, \quad \omega'_{ki} = \sum \alpha_{ij} \omega_{kj}. \quad (6)$$

В этих условиях $\Pi' = \Pi(v'_i, \omega'_{ki})$ являются линейными функциями $\Pi(v_i, \omega_{ki})$, и коэффициенты этих линейных функций будут мероморфными функциями от y , если коэффициенты α_{ij} также будут мероморфными функциями y .

Мы можем теперь выбрать такую замену переменных (6), что

$$\omega'_{ki} = 0 \quad (k \leq p, k \neq i), \quad \omega'_{kk} = 2\pi \sqrt{-1} \quad (k \leq p);$$

коэффициенты α_{ij} будут мероморфными функциями y , поскольку все ω_{ki} , где $k \leq p$, и даже более общо, все ω_{ki} , кроме $\omega_{p+1, i}$, являются голоморфными функциями от y . Запишем тогда

$$\Theta = \sum e^{P_1 + P_2 + P_3},$$

где

$$P_1 = \sum m_i v'_i, \quad P_2 = \sum m_i \varepsilon_i, \quad P_3 = \frac{1}{2} \sum m_i m_k a_{ik},$$

и где

1) $2m_1, 2m_2, \dots, 2m_p$ целые; $2m_k$ либо четные, либо нечетные, в зависимости от значения δ_k , т. е. от той из 2^{2p} функций Θ , которая рассматривается;

2) ε_i равны 0 или $\pi\sqrt{-1}$, в зависимости от рассматриваемой функции Θ ;

3) $a_{ik} = a_{ki} = \omega'_{k+p,i} = \omega'_{i+p,k}$. Все ω'_{ki} — голоморфные функции от y , кроме, быть может, $\omega'_{p+1,i}$; кроме того, $\omega'_{p+1,i}$ равна голоморфной функции от y плюс

$$\frac{\omega'_{1i}}{2\pi\sqrt{-1}} \ln(y - y_0).$$

Но $\omega'_{1i} = 0$ для $i \neq 1$; поэтому все a_{ik} — голоморфные функции от y , кроме a_{11} ; однако $e^{a_{11}}$ — голоморфная функция от y , обращающаяся в нуль для $y = y_0$.

Точно так же

$$v'_i = \psi'_i(y) + \frac{\lambda\omega'_{1i}}{2\pi\sqrt{-1}} \ln(y - y_0)$$

— голоморфная функция от y , если $i \neq 1$; экспонента $e^{v'_i}$ — голоморфная или мероморфная от y , делящаяся на $(y - y_0)^\lambda$. Поэтому каждый из членов Θ равен произведению голоморфной функции от y , не обращающейся в нуль при $y = y_0$, на множитель

$$(y - y_0)^{m_1\lambda + 1/2 m_1^2}.$$

Показатель $m_1\lambda + 1/2 m_1^2$ может быть отрицательным только для конечного числа m_1 ; кроме того, если m_1 заменить на $m_1 + 1$, он увеличивается на $\lambda + m_1 + 1/2$.

Поэтому, если $2m_1$ четно, он увеличивается на целое плюс $1/2$; если $2m_1$ нечетно, он увеличивается на целое. Если $2m_1$ нечетно, все члены равны голоморфной или мероморфной функции, умноженной на $(y - y_0)^{\lambda/2 + 1/8}$. Если $2m_1$ четно, они равны голоморфной или мероморфной функции, умноженной на $(y - y_0)^{\lambda + 1/2}$ или на $(y - y_0)^\lambda$. Поэтому, когда y обходит вокруг y_0 , в первом случае функция Θ умножается на постоянный множитель; во втором — две из функций Θ меняются между собой, а именно те, которые отличаются друг от друга заменой значения ε_1 . В любом случае это алгеброидные функции.

Те же рассуждения применимы к частным производным различных порядков функций Θ относительно v'_1 ; в самом деле, каждый член сводится к соответствующему члену функции Θ умножением на постоянный множитель, зависящий только от целых m . Отсюда следует, что Π' являются алгеброидными функциями y при $y = y_0$, и что когда y обходит y_0 , функции из одной системы переставляются друг с другом. Это же верно, следовательно, и для Π , которые являются линейными функциями от Π' с мероморфными коэффициентами. Резюмируя, мы видим, что для любого значения y Π являются алгеброидными функциями от y , заменяющимися

только на функции из своей системы. Любая симметрическая функция от функций $\Pi = G$ из одной системы является поэтому мероморфной функцией при всех значениях y , конечных или бесконечных. Следовательно, она рациональная функция. Любая из функций G является, следовательно, алгебраической функцией от y .

Мы можем распространить этот результат на тот случай, когда v_i заменяются не нормальной функцией от y , а только половиной нормальной функции. В самом деле, в предыдущем анализе все останется без изменения, за исключением того, что λ , вместо того чтобы быть целым, может быть полуцелым. Если теперь m_1 заменяется на $m_1 + 1$, показатель $m_1\lambda + \frac{1}{2}m_1^2$ увеличивается на $\lambda + m_1 + \frac{1}{2}$; если λ — половина нечетного числа, то, когда $2m_i$ четно, наш показатель увеличивается на целое число, и функция Θ воспроизводится с точностью до множителя; когда же $2m_1$ нечетно, то этот показатель увеличивается на целое плюс $\frac{1}{2}$, и функция Θ меняется на другую.

Может случиться, что функция G не только алгебраическая, но и рациональная; это произойдет, например, если v_i — половина нормальной функции, для которой все λ нечетные, и если G происходит из функции Θ , у которой все $2m_i$ четные.

Заметим, что тот факт, что система нормальных функций v_i удовлетворяет условию $\sum \alpha_i v_i = 0$ для критического значения первого сорта, играет существенную роль. Теорема уже не будет верна, если в Π заменить v_i системой функций, удовлетворяющих тем же самым условиям, что и система нормальных функций, кроме вышеупомянутого условия.

5. Классификация кривых

Рассмотрим систему нормальных функций v_i , образованную методом раздела 3. Всегда ли такой системе соответствует алгебраическая кривая? На каждой кривой K_y найдется единственная группа из p точек $M_1, M_2, \dots, M_p$, такая, что

$$v_i = u_i^1 + u_i^2 + \dots + u_i^p,$$

где v_i — рассматриваемые нормальные функции, а u_i^k — значения интеграла u_i в точке M_k . Когда y меняется, множество этих точек порождает кривую C . Точки пересечения S с прямой $y=t=0$ обозначим $A_1, A_2, \dots, A_n$, и пусть a_i^k — значение u_i в точке A_k ; напомним, что, согласно нашей договоренности, a_i^1 равны нулю.

Я предполагаю выяснить, сколько раз кривая C проходит через A_k , т. е. для скольких значений y одна из точек M совпадает с A_k . Для этого я напому теорему Римана*; согласно этой теореме

$$\Theta_0(u_i^1 + u_i^2 + \dots + u_i^{p-1} - h_i) = 0, \quad (1)$$

* См. примечание на стр. 327 (уравнение (β)). (Р. Г.).

где Θ_0 — функция Θ , у которой все δ равны нулю, u_i^k — значения u_i в произвольных $p-1$ точках K_y , h_i — постоянные (зависящие только от y). Более того,

$$u_i^1 + u_i^2 + \dots + u_i^{2p-2} = 2h_i, \quad (2)$$

где u_i^k представляют на этот раз значения u_i в $2p-2$ точках пересечения K_y с произвольной присоединенной кривой порядка $n-3$, причем двойные точки не учитываются.

Для каждой двойной точки имеем два значения u_i , соответствующие двум ветвям K_y , пересекающимся в двойной точке. Я обозначу через d_i сумму всех таких значений u_i , число которых в два раза больше числа двойных точек. Заметим, что d_i образуют систему нормальных функций. В самом деле, мы видели в разделе 2, что любой алгебраической кривой, лежащей на поверхности, соответствует система нормальных функций; достаточно применить этот результат к двойной кривой поверхности S .

По теореме Абеля сумма u_i^k постоянна для точек пересечения K_y с произвольной кривой порядка m . Применим его к двум кривым порядка $n-3$, а именно: с одной стороны — к присоединенной, с другой — к $(n-3)$ -кратной прямой $y=t=0$. Это нам дает

$$u_i^1 + u_i^2 + \dots + u_i^{2p-2} + d_i = (n-3)(a_i^1 + a_i^2 + \dots + a_i^n),$$

где u_i^k — именно те, которые фигурируют в левой части (2); поэтому получим

$$2h_i = (n-3) \sum a_i^k - d_i.$$

Так как a_i^k и d_i нормальные функции, такими же будут $2h_i$.

Для того, чтобы точка M_p совпала с A_k , нужно чтобы

$$v_i - a_i^k = u_i^1 + u_i^2 + \dots + u_i^{p-1};$$

тогда

$$\Theta_0(v_i - a_i^k - h_i) = 0.$$

Но $v_i - a_i^k - h_i$ — половина нормальной функции. Если функция Θ_0 обращается в нуль, ее логарифм становится бесконечным, и следовательно, становится бесконечной по крайней мере одна из частных производных этого логарифма. Поэтому одна из функций G обращается в бесконечность; однако G — алгебраическая функция от y и обращаться в бесконечность может только конечное число раз. Следовательно, кривая C может проходить через A_k только конечное число раз, скажем q_k . Поэтому она будет алгебраической кривой степени

$$p + q_1 + q_2 + \dots + q_n.$$

Алгебраическая кривая C всегда существует; в некоторых случаях она может редуцироваться к сколько-то раз взятым точкам A_k . Я отсылаю к цитированной статье из «Annales de l'École Normale» по поводу исключи-

тельного случая, когда кривая C встречается с плоскостью $y/t = \text{const}$ в $p - 1$ подвижной точке (цит. выше соч., стр. 83).

Кривая C , которую мы только что рассматривали, определяется однозначно; однако той же системе нормальных функций соответствует бесконечно много алгебраических кривых, пересекающих плоскость $y/t = \text{const}$ более чем в p подвижных точках (тогда как C пересекает эту плоскость только в p подвижных точках).

Мы скажем, что все эти кривые принадлежат одному *семейству*. Однако эта классификация по семействам неестественна. Пусть, в самом деле, оси координат выбраны так, что прямая $y=t=0$ заменяется другой прямой D . Функция v_i есть сумма u_i по всем *подвижным* точкам пересечения кривой C с плоскостью, проходящей через $y=t=0$. Неподвижные точки пересечения, т. е. точки A_k , не учитываются. Однако если заменить прямую $y=t=0$, пересекающую кривую C в некотором числе q_k точек A_k на произвольную прямую D , эта прямая, вообще говоря, не будет пересекать C . Пусть теперь v_i — нормальные функции, соответствующие C и прямой $y=t=0$, а v'_i — нормальные функции, соответствующие C и прямой D . Когда D бесконечно близко к $y=t=0$, v'_i будут бесконечно близки не к v_i , а к $v_i + \sum q_k a_i^k$.

С другой стороны, v_i определены с точностью до периодов, так что две системы нормальных функций v_i и $v_i + \omega_{ki}$ соответствуют одной и той же кривой C . Это позволяет нам заменить классификацию по семействам более естественной классификацией по *классам*.

Система нормальных функций характеризуется множеством целых чисел λ_k , соответствующих, согласно разделу 3, различным особым значениям $y=y_k$; среди нормальных функций мы отдельно выделяли периоды ω_{ji} и функции a_j^i , соответствующие точкам A_j ; пусть тогда μ_{jk} и μ'_{jk} — целые λ_k относительно ω_{ji} и a_j^i . Пусть две системы нормальных функций характеризуются соответственно целыми λ_k и λ'_k . Две системы и две соответствующие кривые принадлежат одному семейству, если

$$\lambda_k = \lambda'_k;$$

они принадлежат одному классу, если

$$\lambda_k = \lambda'_k + \sum m_j \mu_{jk} + \sum m'_j \mu'_{jk},$$

где m и m' — целые. Относительно других деталей классификации алгебраических кривых, числа примитивных кривых и способа сведения любых кривых к примитивным я отсылаю к упоминавшейся статье.

Можно спросить, что произойдет, если непрерывным образом менять прямую D . Особые значения соответствуют касательным плоскостям к S , проведенным из D . Два из этих значений меняются местами, когда D оборачивается вокруг положения, в котором она касается поверхности S . В это же время две точки A_j и, следовательно, две функции a_j^i также меняются местами.

Что же тогда произойдет? Целое λ_k , которое, согласно разделу 3, привязано к каждому особому значению y_k , зависит от двух вещей: 1) от значения v_i , которое рассматривается, 2) от формы, или, лучше сказать, от относительного расположения разрезов Q_k , которые в разделе 3 мы проводили от y_k до бесконечности в плоскости y . Когда прямая D меняется непрерывным образом, числа λ_k остаются постоянными; однако в это же время наши разрезы деформируются и их взаимное расположение может изменяться. Предположим, например, что в первоначальной ситуации разрезы Q_k прямолинейные и направлены по продолжениям радиус-векторов из начала координат в y_k ; в последующей позиции разрезы Q_k перестанут быть прямолинейными, и если заменить их на новые прямолинейные разрезы Q'_k , идущие из новых особых значений в бесконечность по продолжениям радиус-векторов, выходящих из начала координат, может случиться, что новые разрезы Q'_k не эквивалентны старым разрезам Q_k , и что целые λ'_k относительно Q'_k не равны λ_k .

Пусть D_0 — особое положение прямой D , т. е. положение, в котором D_0 касается S ; мы предполагаем, что D обходит вокруг D_0 , очень мало удаляясь от нее. Тогда два особых значения y_1 и y_2 остаются близкими и меняются между собой. Разрезы Q_1 и Q_2 , первоначально прямолинейные, деформируются непрерывным образом и переходят в криволинейные разрезы, примыкающие первый к y_2 , а второй к y_1 , так как эти особые значения поменялись местами. Проверка этой деформации показала бы, что целые числа λ_1 и λ_2 поменялись местами, и так как кривая не изменилась, нужно заключить, что $\lambda_1 = \lambda_2$. Так как в общем случае, непрерывно варьируя D способом, переводящим эту прямую в первоначальное положение, можно переходить от одного особого значения к произвольному другому, то можно было бы заключить, что все λ_k равны между собой. Однако это ошибочно: целые λ относительно двух прямолинейных разрезов, примыкающих к двум особым значениям в точке обмена, равны; однако при вариации D происходит то, что одно из этих значений, например y_2 , будет в точке обмена с третьим особым значением y_3 ; разрезы Q_k не останутся прямолинейными, и если мы заменим их новыми прямолинейными разрезами Q'_k , значения чисел λ_k также претерпят изменение. Если λ_2 и λ_3 — целые относительно Q_2 и Q_3 , а λ'_2 и λ'_3 — целые относительно Q'_2 и Q'_3 , мы получим не $\lambda_2 = \lambda_3$, а только $\lambda'_2 = \lambda'_3$. Более детальное изучение изменения этих целых чисел могло бы представить некоторый интерес.

6. Уравнения кривых C

Для получения уравнения кривой C , соответствующей заданной системе v_i нормальных функций и пересекающей K_y в p переменных точках, можно использовать следующую процедуру.

Пусть $P=0$, $Q=0$ — уравнения двух произвольных плоскостей; пусть $M_1, M_2, \dots, M_p$ — p подвижных точек пересечения C и K_y ; пусть P_i

и Q_i — результат подстановки координат M_i в P и Q ; рассмотрим следующее произведение:

$$\frac{P_1 P_2 \dots P_p}{Q_1 Q_2 \dots Q_p} = H(y, C).$$

Это симметрическая функция координат $M_1, M_2, \dots, M_p$, и так как коэффициенты многочленов произвольны, все остальные симметрические функции могут быть так получены. Это произведение $H(y, C)$ является функцией от y и зависит также от кривой C .

Пусть $B_1, B_2, \dots, B_n$ — точки пересечения $P=0$ с K_y ; пусть $C_1, C_2, \dots, C_n$ — точки пересечения $Q=0$ с K_y . Пусть b_i^k и c_i^k — значения интеграла u_i в точке B_k и точке C_k ; по теореме Абеля

$$\sum b_i^k = \sum c_i^k = \sum a_i^k. \quad (3)$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{\Pi \Theta_0(v_i - b_i^k - h_i)}{\Pi \Theta_0(v_i - c_i^k - h_i)} = G(y, C).$$

Конечно, $v_i = u_i^1 + u_i^2 + \dots + u_i^p$, и произведение, обозначенное знаком Π , должно быть распространено на все b_i^k в числителе и на все c_i^k в знаменателе. Если рассмотреть на момент y фиксированным, и варьировать кривую C , т. е. точки $M_1, M_2, \dots, M_p$ на кривой K_y , то видно, при каких условиях G обращается в нуль или бесконечность; оно обращается в нуль, когда*

$$v_i - b_i^k = u_i^1 + u_i^2 + \dots + u_i^{p-1},$$

т. е. когда точка M_p совпадает с B_k , т. е. когда одна из точек M совпадает с одной из точек B , т. е. когда одно из P_i обращается в нуль. Точно так же G обращается в бесконечность, когда одно из Q_i обращается в нуль. Следовательно, G и H одновременно обращаются в нуль или бесконечность; поэтому они отличаются на постоянный множитель. Итак,

$$\frac{H(y, C)}{G(y, C)} = \frac{H(y, C_0)}{G(y, C_0)},$$

* Функция Θ_0 четная, $\Theta_0(v_i - b_i^k - h_i)$ обращается в нуль тогда же, когда $\Theta_0(b_i^k - v_i + h_i)$, т. е. одновременно с

$$\Theta_0 \left[u_i(B_k) - \sum_{j=1}^p u_i(M_j) + h_i \right].$$

По теореме Римана, приведенной раньше (примечание на стр. 327), это происходит только тогда, когда B_k совпадает с одной из точек M_j ($j=1, \dots, p$), по крайней мере, когда M_j не образуют специальной группы, для которой Θ_0 тождественно нулевая. (Р. Г.).

где C_0 — другая кривая; за C_0 примем кривую, сводящуюся к p раз взятой точке A_1 , так что для C_0

$$v_i = p \cdot a_i^1 = 0,$$

$$G(y, C_0) = \frac{\Pi \Theta_0(-b_i^k - h_i)}{\Pi \Theta_0(-c_i^k - h_i)}, \quad H(y, C_0) = \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)^p,$$

где P_0 и Q_0 — результат подстановки координат A_1 в P и Q . Я покажу, что если v_i — нормальные функции, отношение

$$\frac{H(y, C)}{H(y, C_0)} = \frac{G(y, C)}{G(y, C_0)}$$

является рациональной функцией y ; для начала я утверждаю, что это однозначная функция y ; это видно непосредственно, так как она равна

$$\frac{P_1 P_2 \dots P_p}{Q_1 Q_2 \dots Q_p} \left(\frac{Q_0}{P_0}\right)^p.$$

С другой стороны, это алгеброидная функция y ; в самом деле, она равна

$$\frac{\Pi \Theta_0(v_i - b_i^k - h_i) \Theta_0(-c_i^k - h_i)}{\Pi \Theta_0(v_i - c_i^k - h_i) \Theta_0(-b_i^k - h_i)}.$$

Для обычных значений y , а также для критических значений обеих сортов, можно проверить, как и в разделе 3, что это мероморфная функция; нужно еще отдельно рассмотреть значения, для которых два из b_i^k (или из c_i^k) меняются друг с другом; для этих значений b_i^k — алгеброидные функции от y , и так как наше выражение симметрично относительно b_i^k , оно остается мероморфным.

Остаются особые значения; мы видели, что ω_{ki} , v_i , b_i^k , h_i логарифмически бесконечны для особого значения, и в разделе 3 заключили, что Θ_0 алгеброидная. Когда y обходит вокруг особого значения, аргументы Θ_0 могут возрасти на полпериода, а периоды — замениться эквивалентной системой.

Каждое из Θ_0 заменяется на $e^P \Theta$, где P — многочлен первой степени, а Θ — одна из 2^{2p} функций Θ ; экспоненты взаимно уничтожаются, и наше произведение превращается в

$$\frac{\Pi \Theta(v_i - b_i^k - h_i) \Theta(-c_i^k - h_i)}{\Pi \Theta(v_i - c_i^k - h_i) \Theta(-b_i^k - h_i)}.$$

Так как оно должно быть однозначной функцией y , функция Θ не должна отличаться от Θ_0 . Мы уже видели в конце раздела 4 условие, при котором это так. Это доказывает, что $2h_i$ — нормальная функция, для которой все целые числа λ нечетны.

Резюмируем: наше отношение — однозначная и алгеброидная функция от y . Поэтому она мероморфна при всех конечных значениях y . Следовательно, она рациональна.

Таким методом можно показать, что кривая C алгебраическая, но он ничего не говорит о ее степени; я считаю поэтому полезным сообщить другой подход, подобный приведенному в параграфе II упомянутой выше статьи. Пусть

$$u_i = \int \frac{P_i dx}{QF'_z}$$

— интеграл первого рода; положим

$$U_i = \frac{\partial u_i}{\partial y} = \int \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P_i}{QF'_z} \right) F'_z - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P_i}{QF'_z} \right) F'_y \right] \frac{dx}{F'_z}.$$

Я пишу $\frac{\partial u_i}{\partial y}$ с круглым ∂ для выражения того, что я дифференцирую по y , предполагая x постоянным, а z связанным с y и x уравнением поверхности (t положено равным 1). Видно, что U_i — абелев интеграл второго рода. Аналогично, частная производная $\frac{\partial U_i}{\partial y}$ есть интеграл второго рода; но любой абелев интеграл второго или первого рода можно выразить как линейную функцию $2p$ из них плюс рациональная функция; имеем поэтому

$$\frac{\partial U_i}{\partial y} = \sum \rho_{ik} u_k + \sum \rho'_{ik} U_k + \Pi,$$

где Π — рациональная функция x, y, z , а ρ и ρ' — рациональные функции y . Предположим теперь, что точка (x, y, z) — верхний предел нашего интеграла — вместо того, чтобы перемещаться таким образом, что $x = \text{const}$, перемещается по кривой C ; мы будем иметь

$$\frac{du_i}{dy} = \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{dx}{dy}, \quad \frac{dU_i}{dy} = \frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial U_i}{\partial x} \frac{dx}{dy}.$$

Заметим, что $\frac{\partial u_i}{\partial x}$ и $\frac{\partial U_i}{\partial x}$ — рациональные функции x, y, z ; это как раз величины, стоящие под знаком $\int$ абелевых интегралов u_i и U_i . Аналогично, найдем

$$\frac{d^2 u_i}{dy^2} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{d^2 x}{dy^2}.$$

Частные производные $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y}$ — снова рациональные функции x, y, z . Отсюда

$$\frac{d^2 u_i}{dy^2} - \sum \rho_{ik} u_k - \sum \rho'_{ik} \frac{du_k}{dy} = \frac{dx}{dy} \left[2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} - \sum \rho'_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{d^2 x}{dy^2} + \Pi. \quad (4)$$

Левую часть (4) можно записать как $\Delta_i(u_i)$; символ Δ_i имеет смысл, отличный от того, который ему приписывался до сих пор. Что касается правой части, которую мы запишем как $\Phi_i\left(x, y, z, \frac{dx}{dy}, \frac{d^2 x}{dy^2}\right)$, то это ра-

циональная функция от своих аргументов; впрочем, z связано с x и y уравнением поверхности.

Тогда для нашей кривой C

$$\Delta_i(v_i) = \Phi_i^1 + \Phi_i^2 + \dots + \Phi_i^p,$$

где Φ_i^k — результат подстановки в Φ_i координат точки M_k вместо x, y, z , а также соответствующих производных $\frac{dx}{dy}$ и $\frac{d^2x}{dy^2}$.

Имеем, впрочем,

$$\Delta_i(\omega_{ki}) = 0,$$

и это одна из форм дифференциального уравнения, определяющего периоды. Когда y описывает замкнутый контур, v_i увеличиваются на период, скажем ω_{ki} ; тогда $\Delta_i(v_i)$ заменяется на $\Delta_i(v_i) + \Delta_i(\omega_{ki})$, т. е. не меняется. Следовательно, $\Delta_i(v_i)$ — однозначная функция y ; можно было бы проверить, как в разделе 3, что это рациональная функция от y ограниченной степени; пусть $R_i(y)$ — эта рациональная функция; тогда

$$\sum \Phi_i^k = R_i(y). \quad (5)$$

Это дифференциальные уравнения, определяющие x как функцию y , т. е. определяющие уравнение кривой C . Этих уравнений p штук, так как индекс i может принимать p значений; и столько же неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_p$.

Зная, что эти дифференциальные уравнения имеют алгебраический интеграл, было бы нетрудно определить степень.

7. Исключение критических значений второго сорта

Существование нормальных рациональных функций влечет, с одной стороны, существование алгебраической нелинейной системы алгебраических кривых, а с другой — существование абелевых интегралов полных дифференциалов первого рода. Это теорема Кастельнуово, Энрикеса и Севери. Я не буду приводить здесь доказательство, которое дал в цитированной статье. Я ограничусь напоминанием результата. В этом случае кривая K_y обладает q приводимыми абелевыми интегралами первого рода, т. е. имеющими только $2q$ различных периодов. Пусть $u_1, u_2, \dots, u_q$ — эти интегралы; известно, что если кривая рода p обладает q приводимыми интегралами, она имеет еще $p - q$ других интегралов, обладающих $2p - 2q$ различными периодами. Я обозначу эти $p - q$ интегралов $u_{q+1}, u_{q+2}, \dots, u_p$. Это соответствует специальному выбору интегралов u_i ; я рассмотрю еще другой выбор этих интегралов, уже без всяких условий, и обозначу $u'_1, u'_2, \dots, u'_p$ мои p интегралов первого рода; если существует q раз бесконечная система нормальных рациональных функций v'_i , мы будем иметь между ними $p - q$ линейных соотношений вида

$$\sum \alpha_{ki} v'_i = 0 \quad (k = q + 1, q + 2, \dots, p),$$

где α_{ki} — рациональные функции y . Тогда интегралы

$$u_k = \sum \alpha_{ki} u'_i \quad (k = q + 1, q + 2, \dots, p)$$

и будут $p - q$ приводимыми интегралами. Это влечет существование алгебраической q раз бесконечной системы алгебраических кривых, соответствующей нашей системе нормальных рациональных функций, и, с другой стороны*, существование q других приводимых интегралов $u_i = \sum \alpha_{ki} u'_i$ ($k = 1, 2, \dots, q$), где α_{ki} — снова рациональные функции y . Мы можем выбрать эти новые функции α_{ki} так, что нормальные функции $\sum \alpha_{ki} v'_i$ станут постоянными. В этом случае интегралы u_k являются интегралами дифференциалов первого рода.

Есть еще одно место, на котором я хотел бы остановиться более детально. Я сформулировал в конце раздела 1 и хотел бы теперь доказать теорему, согласно которой существование интегралов, лишенных, в смысле конца раздела 1, критических значений первого сорта, несовместимо с существованием критических значений второго сорта. Действительно, пусть $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ — критические значения второго сорта и

$$Q = (y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_\nu).$$

Пусть $u_1, u_2, \dots, u_q$ — q интегралов, лишенных критических значений первого сорта в смысле конца раздела 1, таких, что для произвольного критического значения первого сорта имеем линейное соотношение

$$\alpha_{q+1} v_{q+1} + \alpha_{q+2} v_{q+2} + \dots + \alpha_p v_p = 0,$$

в котором участвуют только функции v с индексом, бóльшим q . Функции v с индексами, меньшими q , не связаны поэтому никакими условиями относительно критических значений первого сорта. Мы получаем, следовательно, систему нормальных функций, записывая

$$v_{q+1} = v_{q+2} = \dots = v_p = 0, \quad v_i = \frac{X_i}{Q} \quad (i = 1, 2, \dots, q),$$

где X_i — произвольные многочлены степени ν по y ; я обозначу через γ коэффициенты этих многочленов X . Этих коэффициентов будет $q(\nu + 1)$ штук; поэтому наша система нормальных функций $q(\nu + 1)$ раз бесконечна.

Пусть теперь $a_1, a_2, \dots, a_{\nu+1}$ — $\nu + 1$ значения y , обыкновенные, но в остальном произвольные. Пусть C — кривая, соответствующая значениям, определенным коэффициентами γ ; пусть $M_{k1}, M_{k2}, \dots, M_{kp}$ — p подвижных точек пересечения C с плоскостью $y = a_k$. Пусть $\xi_{1ki}, \xi_{2ki}, \xi_{3ki}$ — три координаты точки M_{ki} . ξ встретятся в числе $3p(\nu + 1)$. Если мы рассмотрим их как координаты точки N в пространстве $3p(\nu + 1)$ измерений и станем менять γ , эта точка будет оставаться на алгебраическом многообразии V размерности $q(\nu + 1)$.

* Н. P o i n c a r é. Bull. Soc. math. France, 1884, 12, p. 125.

Вместо ξ мы можем рассмотреть систему симметрических функций от

$$\xi_{hk1}, \xi_{hk2}, \dots, \xi_{hkp}.$$

Пусть η — эти симметрические функции, которые я возьму в числе $3p(\nu + 1)$; если мы рассмотрим η как координаты точки N' в пространстве размерности $3p(\nu + 1)$, то, когда η меняется, эта точка заметает алгебраическое многообразие V' размерности $q(\nu + 1)$. Любой точке V' соответствует система значений η , и обратно. Когда точка N' описывает замкнутую кривую на V' , γ воспроизводятся с точностью до периода более точно.

Если задана точка N' , определяются точки M_{ki} , это определяет с точностью до периода значения v_i для $y = a_1, y = a_2, \dots, y = a_{\nu+1}$; если известны v_i , то имеются линейные уравнения с ненулевым детерминантом, которые полностью определяют коэффициенты γ . Когда точка N' описывает замкнутый контур, значения v_i для $y = a_j$ возрастают на величину Ω_{ji} , равную периоду абелева интеграла u_i для $y = a_j$. γ увеличивается на ϵ , и нормальные функции $\frac{X_i}{Q}$ заменяются на $\frac{X_i}{Q} + \frac{X'_i}{Q}$, где многочлен X'_i отличается от многочлена X_i подстановкой коэффициентов ϵ вместо γ ; коэффициенты ϵ определяются тогда из уравнений

$$\frac{X_i}{Q} = \Omega_{ji} \quad \text{для} \quad y = a_j.$$

Эти ϵ являются периодами γ , потому что они являются величинами, прибавляющимися к γ , когда N' описывает замкнутый контур.

Я утверждаю теперь, что $\frac{X_i}{Q}$ является периодом u_i , каким бы ни было y . В самом деле, система кривых C , определенная нашими рациональными нормальными функциями, является алгебраической. Поэтому точка N' определяет либо конечное число кривых C , либо непрерывное семейство кривых C . Последнее предположение должно быть отброшено; действительно, точка N' определяет γ с точностью до периода, поэтому она определяет бесконечную дискретную систему значений γ и, следовательно, дискретное множество, конечное или бесконечное, кривых C . Теперь можно заменить $\frac{X_i}{Q}$ на $\frac{X_i}{Q} + \lambda \frac{X'_i}{Q}$, где λ — произвольное целое; мы должны получить только конечное число кривых C ; это возможно только в случае, если для любого y выражение X'_i/Q равно дробно-кратному периоду, т. е. $\frac{h}{h'} \omega_{ki}$, где h и h' — целые. Если менять y непрерывным образом, целые h и h' , которые могут меняться только скачками, остаются постоянными. Но для $y = a_i$ h/h' — целое; поэтому это же верно для всех значений y ; итак, X'_i/Q — период для всех значений y , что и требовалось доказать.

Для $i = q + 1, q + 2, \dots, p$ также можно положить $v_i = X_i/Q$; однако на этот раз все коэффициенты X_i должны быть нулевыми. Поэтому и соответствующие ϵ также нулевые. Следовательно, каждому периоду γ соот-

ветствует период u_i , который является рациональной функцией y при $i \leq q$ и равен нулю при $i > q$.

Если теперь мы зададимся некоторым γ , то η определяются явным образом, так что это — однозначные функции от γ . С другой стороны, v_i , а следовательно и γ , всегда конечны.

Если мы изобразим вещественные и мнимые части $q(\nu + 1)$ коэффициентов γ в пространстве $2q(\nu + 1)$ измерений, мы сможем сконструировать *призматойд* периодов. Этот призматойд должен быть ограниченным, поскольку γ не могут становиться бесконечными; имеется поэтому $2q(\nu + 1)$ различных периодов.

Получаем, следовательно, $2q(\nu + 1)$ периодов p абелевых интегралов u_i , которые являются нулевыми для $p - q$ из этих интегралов (а именно, для тех, где $i > q$).

Образуем определитель из вещественных и мнимых частей $2p$ периодов наших p интегралов. В $2p - 2q$ последних строках этого определителя элементы $2q(\nu + 1)$ последних столбцов равны нулю. Поэтому определитель нулевой, если

$$(2p - 2q) + 2q(\nu + 1) > 2p,$$

т. е. если ν отлично от нуля. Но мы знаем, что подобный определитель не может обращаться в нуль для невырожденной кривой рода p ; следовательно, $\nu = 0$, т. е. критические значения второго сорта отсутствуют. Именно это мы и хотели установить.

С помощью рассуждений раздела 1 мы видим, что всегда можно уничтожить критические значения второго сорта.

Это же можно выразить, сказав, что через двойную кривую всегда можно провести p различных поверхностей порядка $n - 2$, не считая различными те поверхности $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_p = 0$, для которых существует линейное соотношение между $f_1, \dots, f_p$ с коэффициентами, являющимися однородными многочленами от y и t .

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ЗАМЕЧАНИЯ О КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ*

1. Введение

В кинетической теории газов имеется еще много вопросов, вызывающих затруднения у тех, кто привык к математической строгости. Много результатов, недостаточно четко сформулированных, предстают в парадоксальной форме и порождают противоречия, впрочем, чисто внешние. Так, понятие системы молекул — *molar geordnet*, или *molekular geordnet*, не определено с достаточной точностью.

Один из пунктов, наиболее трудных для меня, был следующий: требуется доказать, что энтропия уменьшается [¹], но соображения Гиббса, по-видимому, предполагают, что после изменения внешних условий, до того как изменять их снова, следует подождать, пока установится режим. Это существенное допущение. Можно ли, иными словами, прийти к результатам, противоречащим принципу Карно, изменяя внешние условия слишком быстро для того, чтобы стационарный режим успел установиться? Я хотел выяснить этот вопрос, если не для общего случая, то хотя бы для некоторых частных, более простых, чем те, которые происходят в природных условиях. Ниже мы увидим, что представляют собой эти простые системы, которые я называю одномерными газами и изучение которых, менее сложное, чем изучение обычных газов, позволяет понять причину и значение некоторых парадоксальных результатов.

Перед тем как пойти дальше, я хотел бы определить смысл интеграла, посредством которого обычно выражают энтропию, и сделать по его поводу некоторые уточнения, необходимые в дальнейшем.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — величины, определяющие состояние материальной системы, а

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (1)$$

— дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют эти величины. Предположим, что переменные x выбраны таким образом, что

$$\sum \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2)$$

Это верно, если переменные — прямоугольные координаты разных материальных точек и составляющие их импульсов [²].

* Journal de Physique théorique et appliquée, 4 série, 1906, 5, 369—403.

Набор значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ представляет собой то, что Гиббс называет *фазой*. Совокупность всех фаз, удовлетворяющих некоторым неравенствам, называется областью; n -мерный интеграл

$$\int dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

распространенный на эту область, Гиббс называет *фазовым объемом* этой области. Я буду писать далее $d\tau$ вместо $dx_1 dx_2 \dots dx_n$.

Пусть $Pd\tau$ — вероятность того, что система находится в некоторой бесконечно малой области, фазовый объем которой $d\tau$. Тогда энтропия обычно выражается в виде интеграла [1]

$$\int P \log P d\tau^*, \quad (3)$$

распространенного на все фазы. А интеграл

$$\int P d\tau,$$

распространенный на произвольную конечную область, представляет вероятность того, что система находится в этой области. Отсюда

$$\int P d\tau = 1, \quad (4)$$

если интеграл распространен на все фазы. Точно так же, если φ — произвольная функция нескольких переменных, вероятное значение этой функции будет выражаться интегралом

$$\int \varphi P d\tau, \quad (5)$$

распространенным по всем фазам.

Нужно остановиться на смысле функции P и интегралов (3), (4) и (5). Мы можем для начала предположить, что имеется очень большое число подобных систем. Это верно для случая одномерных газов, где каждую молекулу можно считать такой системой. Кроме того, это верно для случая обычных газов, где можно представить себе большое число систем, отличающихся друг от друга только тем, что различные молекулы газа там произвольно перемешаны. Мы можем также предположить, что начальные условия движения полностью известны для каждой из этих систем и, следовательно, это же относится и к системе в произвольный момент времени.

В этом случае вероятность того, что система находится в заданный момент в заданной области, — не что иное, как отношение числа систем, которые находятся в этот момент в этой области, к их полному числу. Я назову это *прерывной (discontinue) гипотезой*.

Я могу, напротив, предположить, что для каждой системы начальные условия движения не полностью известны и что мы можем только оценить

* Пуанкаре обозначает обычно через $\log$ функцию $\ln$. (Прим. ред.).

вероятность того, что в начальный момент времени система находится в определенной области. Поэтому состояние системы в последующий момент тоже будет не полностью известно. Все, что мы можем сделать, — это оценить вероятность того, что в этот момент система находится в данной, очень малой области, фазовый объем которой $d\tau$. Мы выразим эту вероятность через $p d\tau$, где p , как правило, — непрерывная функция x . Если вместо одной системы у нас очень большое число подобных систем, вероятность того, что система находится в области $d\tau$, будет

$$P d\tau = \frac{\sum p}{N} d\tau,$$

где N — полное число систем, а P — непрерывная функция x . Эта вероятность будет, следовательно, выражаться отношением *вероятного* числа систем, которые в данный момент находятся в этой области, к полному числу систем. Это то, что я назвал бы *непрерывной (continue) гипотезой*.

Положим теперь, что имеется конечная область D , фазовый объем которой δ . Пусть $\Pi\delta$ — вероятность того, что система находится в этой области. Если область δ все время уменьшается так, что в конечном счете превращается в бесконечно малую область $d\tau$, то что произойдет с Π ? Результат будет в обеих гипотезах разный. По прерывной гипотезе Π будет стремиться к 0 или к $+\infty$, в зависимости от того, будет или не будет находиться система в центре области $d\tau$. Среднего значения не будет. По непрерывной гипотезе Π будет стремиться к непрерывной функции P , которую мы только что определили. Интегралы (3), (4), (5), по определению, являются пределами сумм

$$\sum \Pi \log \Pi\delta, \quad \sum \Pi\delta, \quad \sum \varphi \Pi\delta,$$

распространенных на некоторое число областей, которые вместе содержат все возможные фазы. Здесь δ представляет собой фазовый объем одной из этих областей, а $\Pi\delta$ — соответствующую вероятность. Интегралы — это пределы, к которым стремятся все суммы, когда области становятся все меньше и меньше.

В прерывной гипотезе этот предел *бесконечен* для интеграла (3), т. е. энтропии, тогда как два других ведут себя как обычные интегралы.

Примем поэтому непрерывную гипотезу, хотя нам встретятся случаи, когда сумма $\sum \Pi \log \Pi\delta$ будет существенно отличаться от своего предела, тогда как две другие суммы будут отличаться от своих пределов очень мало. Предположим, что области δ очень малы, и что, тем не менее, в каждой из них функция P , хотя она и непрерывна, принимает существенно разные значения. Так, например, если a очень мало, то функция $\sin \frac{x}{a}$, хотя она и непрерывна, может принимать существенно разные значения в области, определенной неравенством $x_0 < x < x_0 + b$, если b , очень малое в абсолютном смысле, велико по отношению к a . В этом случае выражение

$\Pi \log \Pi \delta$, относящееся к одной из этих областей, может намного отличаться от интеграла

$$\int P \log P d\tau,$$

распространенного на эту область. С другой стороны, для той же области мы имеем, по определению.

$$\Pi \delta = \int P d\tau,$$

и если область достаточно мала, чтобы функция φ в ней не очень менялась, то $\varphi \Pi \delta$ будет почти равна

$$\int \varphi P d\tau.$$

Таким образом, мы пришли к необходимости отличать *грубую* (*grossière*) энтропию от *тонкой* (*fine*) энтропии.

Заставим уменьшаться область δ . Пределом $\sum \Pi \log \Pi \delta$ будет *тонкая энтропия* [3]. По непрерывной гипотезе она конечна.

Если же мы остановимся, когда области δ станут так малы, что наши обычные средства исследования не дадут нам возможности отличать две внутренние фазы в одной области, мы будем иметь *грубую энтропию*. В физике обычно рассматривается *грубая энтропия*.

Грубая энтропия всегда меньше, чем тонкая.

Действительно, если разделить область δ на две, δ_1 и δ_2 , и если соответствующие вероятности будут $\Pi \delta$ для всей области, а $\Pi_1 \delta_1$ и $\Pi_2 \delta_2$ для отдельных областей, то

$$\delta = \delta_1 + \delta_2, \quad \Pi \delta = \Pi_1 \delta_1 + \Pi_2 \delta_2$$

и, следовательно,

$$\Pi \log \Pi \delta < \Pi_1 \log \Pi_1 \delta_1 + \Pi_2 \log \Pi_2 \delta_2.$$

Значит, сумма $\sum \Pi \log \Pi \delta$ все время возрастает при разбиении области δ .

Известно, что *грубая энтропия физиков* все время уменьшается, *по крайней мере, если дать режиму время установиться*. Напротив, *тонкая энтропия*, как мы увидим, *остается всегда постоянной*. И действительно, функция P удовлетворяет дифференциальным уравнениям [4], в силу соотношения (2), очевидно, эквивалентным друг другу:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum X_i \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum \frac{\partial P X_i}{\partial x_i} = 0;$$

тогда

$$S = \int P \log P d\tau = \int f(P) d\tau$$

— тонкая энтропия.

Получим

$$\frac{dS}{dt} = \int f'(P) \frac{\partial P}{\partial t} d\tau,$$

или

$$\frac{dS}{dt} = - \sum \int f'(P) X_i \frac{\partial P}{\partial x_i} d\tau,$$

или, в силу (2),

$$\frac{dS}{dt} = - \sum \int f'(P) X_i \frac{\partial P}{\partial x_i} d\tau - \sum \int f'(P) \frac{\partial X_i}{\partial x_i} d\tau,$$

$$\frac{dS}{dt} = - \sum \int \frac{\partial}{\partial x_i} [X_i f(P)] dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Интегрирование по частям показывает, что этот последний интеграл равен нулю. Это и требовалось доказать.

Свойства тонкой энтропии сильно отличаются от свойств грубой. Ниже мы покажем, как этим можно воспользоваться.

2. Задача малых планет

Начнем с рассмотрения вопроса, подобного теории газов, но гораздо более простого.

Предположим, что имеется большое число малых планет, описывающих круговые орбиты (без эксцентриситета и склонения и, разумеется, без какого-либо возмущения). Пусть l — долгота одной из них, а ω — ее угловая скорость. Поэтому

$$l = l_0 + \omega t, \quad \omega = \text{const.}$$

Таким образом, фазовый объем определяется интегралом

$$\int dl d\omega = \int dl_0 d\omega.$$

Нужно показать, что через какое-то достаточно длительное время долготы этих малых планет распределятся равномерно.

Действительно, пусть в момент времени $t=0$

$$f(l_0, \omega) dl_0 d\omega$$

будет число малых планет, долгота которых находится между l_0 и $l_0 + dl_0$, а угловая скорость — между ω и $\omega + d\omega$. Так как предполагается, что число малых планет очень велико, мы можем считать, что dl_0 и $d\omega$ — бесконечно малые дифференциалы, а f — непрерывная функция.

Тогда пусть

$$J = \int \cos(ml + h) f(l_0, \omega) dl_0 d\omega$$

— интеграл, равный числу планет, умноженному на *среднее* значение $\cos(ml+h)$. Требуется доказать, что J стремится к нулю, если t бесконечно возрастает. Имеем

$$\cos (ml + h) = \cos (ml_0 + m\omega t + h) = \frac{d}{d\omega} \frac{\sin (ml_0 + m\omega t + h)}{mt}.$$

Следовательно, интегрируя по частям по ω , получим

$$J = -\frac{1}{mt} \int \sin (ml + h) \frac{df}{d\omega} dl_0 d\omega.$$

Но $df/d\omega$ конечно, поскольку мы полагаем, что функция f непрерывна, и J стремится к нулю, если t возрастает, что и требовалось доказать.

Попробуем согласовать этот вывод с обычными законами механики. Прежде всего, они учат нас, что при известных условиях, если система прошла через какое-то состояние, она еще множество раз пройдет бесконечно близко от этого состояния. Это и происходит в нашем случае. Предположим, что все угловые скорости ω соизмеримы между собой и что в нулевой момент времени все долготы l_0 равны нулю, а все планеты находятся в совпадении. Пусть все скорости ω кратны ϵ . Тогда в моменты времени $\frac{2\pi}{\epsilon}, \frac{4\pi}{\epsilon}, \dots$ все планеты снова окажутся в совпадении.

Если ω несоизмеримы, то *точное совпадение* планет может произойти только раз, но теория непрерывных дробей показывает, что сколь угодно приближенное совпадение может произойти бесчисленное количество раз.

Если планет очень много, угловые скорости ω соизмеримы, то ϵ очень мало и, таким образом, отрезок времени между двумя последовательными совпадениями, равный $2\pi/\epsilon$, будет очень большим. Также, если ω несоизмеримы, то промежуток времени между двумя *приближенными* последовательными совпадениями будет тем больше, чем планет больше и чем выше требуемое приближение.

Проведенный анализ показал, что J всегда стремится к нулю и, следовательно, совпадение, даже приближенное, может произойти только раз. Но это потому, что анализ предполагает *бесконечное* число планет. Как бы многочисленны они ни были, всегда возникает повторное совпадение. Но так как срок, когда должно произойти повторение, возрастает вместе с числом планет, он становится бесконечным, если само это число считать бесконечным. Следовательно, здесь нет противоречия.

Вернемся к обратимости. Если начальная долгота равна $-l_0$ вместо l_0 , то долгота в момент времени $-t$ должна быть

$$-l_0 - \omega t = -l.$$

Рассмотрим четную функцию от l и в выражении J выберем $h=0$, так что

$$J = \int f \cos mldl_0 d\omega.$$

Возьмем, кроме того, другую функцию J' , считая

$$J' = \int f' \cos mldl_0 d\omega, \quad f' = f(-l_0, \omega).$$

Из предыдущего видно, что

$$J'(t) = J(-t),$$

так что J' пройдет в обратном порядке через те же фазы, что и функция J . В этом и состоит обратимость занимающей нас задачи.

Противоречит ли она полученным результатам? Достаточно вернуться к данному выше выражению J , содержащему t в знаменателе. Мы видим, что J стремится к нулю при t , стремящемся к $-\infty$, и при t , стремящемся к $+\infty$.

Кривая J как функция t будет иметь пик в средней части и мало отличаться от графика $J=0$, за исключением значений t , близких к нулю. Симметрия этой кривой говорит о ее обратимости, что согласуется со всем предыдущим. Если число молекул не бесконечно, а лишь велико, то будет несколько пиков, разделенных интервалами, где кривая очень мало отличается от $J=0$, но интервалы эти так длинны, что, практически, это то же самое, как если бы был один пик. Эти данные интервалы я назвал *временем возвращения*.

Вместо того, чтобы выражать функцию J через $\cos(ml+h)$, мы можем выразить ее с помощью некоторой функции от l и ω (назовем ее $F(l, \omega)$), связанной лишь условиями

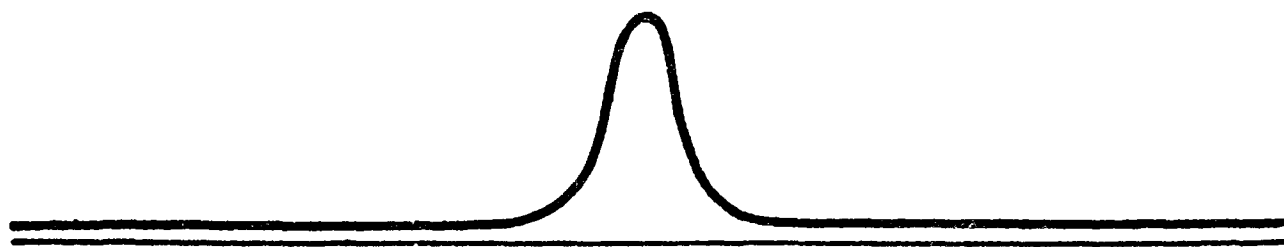
$$F(l + 2\pi, \omega) = F(l, \omega), \quad \int_0^{2\pi} F(l, \omega) d\omega = 0.$$

Тогда

$$J = \int F(l, \omega) f(l_0, \omega) dl_0 d\omega.$$

Положим, например, что

$$F(l, \omega) = \cos(ml + h) \varphi(\omega).$$



Интегрирование по частям даст нам

$$J = -\frac{1}{mt} \int \sin(ml + h) \left[f \frac{d\varphi}{d\omega} + \varphi \frac{df}{d\omega} \right] dl_0 d\omega,$$

так что J опять стремится к нулю при $t = \pm\infty$, и общий вид кривой останется прежним. То же будет, если взять

$$F(l, \omega) = \cos ml \varphi(\omega) + \sin ml \psi(\omega).$$

Но может случиться, что пик сместится. Предположим, например, что планеты находятся в приблизительном совпадении в момент времени нуль,

так что $f(l_0, \omega)$ гораздо больше при l_0 , близком к нулю, чем при других его значениях. Тогда, если $F(l, \omega) = \cos ml$, пик придется на $t=0$, но если

$$F(l, \omega) = \cos ml \cos m\omega\tau + \sin ml \sin m\omega\tau,$$

он придется на $t=\tau$. Таким образом, при очень большом t распределение планет *кажется* однородным. Это означает, что J близко к нулю, какова бы ни была функция $F(l, \omega)$, если только она удовлетворяет следующему условию:

Нужно, чтобы производные функции F были конечными и поэтому малыми по сравнению с t .

Однако здесь однородность только кажущаяся, так как J не равно нулю, если F не удовлетворяет этому условию. Поэтому на первый взгляд распределение кажется однородным, и *видимая упорядоченность* отсутствует. Тем не менее имеется *скрытая упорядоченность*, так как, если принять $\tau=t$ и

$$F(l, \omega) = ml \cos m\omega\tau + \sin ml \sin m\omega\tau,$$

мы увидим, что J не равно нулю. Планеты, которые в момент $t=0$ находились почти на прямой, распределены теперь по спирали, но витки этой спирали слишком сжаты, чтобы можно было их различить.

Можно также рассуждать иначе. Пусть N — число планет, таких, что l и ω удовлетворяют некоторым неравенствам

$$\Phi_i(l, \omega) > 0.$$

Рассмотрим теперь *обратные* неравенства, т. е.

$$\Phi_i(-l, \omega) > 0,$$

и пусть N' — число планет, удовлетворяющих им.

Нам известно, что в момент $t=0$ планеты находились почти в совпадении. Из предшествующего следует, что в момент t , если t положительно и достаточно велико, вероятное значение N будет равно вероятному значению N' , если только производные функций Φ_i были конечны и малы по сравнению с t .

Однако не следует из этого заключать, что состояние (l, ω) точно так же вероятно, как и *обратное* состояние $(-l, \omega)$, потому что вероятные значения N и N' равны между собой, только если Φ_i выбраны таким образом, что их производные имеют тот же порядок, что и t . Мы еще вернемся к этому.

3. Одномерный газ

Можно непосредственно перейти от предыдущей задачи к случаю, уже несколько более близкому к кинетической теории газов. Представим себе газ, состоящий из молекул, заключенных в сосуд, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда. Все траектории этих молекул вначале параллельны между собой и одному из ребер параллелепипеда, которое мы

примем за ось x . В этих условиях молекулы никогда не соударяются и не встречаются на пути стенок сосуда, кроме стенок, перпендикулярных оси x . А при таком столкновении соударения происходят по нормали и траектории молекул после отражения будут такими же, как до отражения, но направленными в обратную сторону.

Мы можем также предположить, что центры всех молекул находятся на одной прямой, которая и будет осью x . В этом случае они будут сталкиваться, но это ничего не изменит в состоянии газа, потому что после столкновения они обмениваются скоростями; каждая из них получит скорость, которую имела другая перед столкновением. Таким образом, в конечном счете все произойдет так, как если бы вместо того, чтобы столкнуться, они прошли бы одна сквозь другую. Обе картины одинаковы. Вторая соответствует тому, что можно назвать *одномерным газом*.

Пусть

$$x = 0, \quad x = \pi$$

— две стенки, от которых происходит отражение. Пусть x — абсцисса какой-то молекулы. Нам требуется определить *долготу*, и для этого мы сделаем следующее допущение: одной и той же точке, находящейся внутри сосуда, мы можем приписать либо долготу x , равную ее абсциссе, либо долготу $-x$, либо $2\pi \pm x$, либо, наконец, $2K\pi \pm x$. Точка будет полностью определена долготой и условием, что ее абсцисса заключена между нулем и π .

При этом допущении долгота l молекулы будет равна ее абсциссе x , если молекула не испытала еще никакого отражения с момента времени $t=0$. Мы получим $l=-x$, если она испытала отражение от стенки $x=0$, и $l=2\pi-x$, если она испытала отражение от стенки $x=\pi$. После какого-то числа отражений

$$l = 2K\pi + \varepsilon x;$$

$\varepsilon = \pm 1$, а K — целое число, причем ε меняет знак при каждом отражении, а K не меняется после отражения от $x=0$ и превращается в $K-\varepsilon$ после отражения от $x=\pi$; ε — значение этой величины до отражения.

В этих условиях, так как скорость произвольной молекулы остается постоянной по величине и меняет знак при каждом отражении, производная

$$\frac{dl}{dt} = \omega$$

остается постоянной для каждой молекулы. (Разумеется, если принять вторую картину одномерного газа, где молекулы, сталкиваясь, обмениваются скоростями, предыдущее предположение будет верно, только если мы условимся приписывать каждой молекуле индивидуальность, которой она будет обмениваться с соседней молекулой в момент удара, так же, как они обмениваются скоростями.)

Фазовый объем по-прежнему определяется $\int dl d\omega$.

Итак, законы движения наших молекул те же, что и законы движения планет, о которых говорилось в предыдущем разделе; возвращаться к ним не стоит. Мы видим, кроме всего прочего, что каково бы ни было начальное распределение, в конце достаточно большого отрезка времени газ будет казаться однородным.

Но до сих пор мы считали, что газовые молекулы не подвергаются воздействию никакой внешней силы. Теперь следует рассмотреть влияние такой силы. Предположим, что на каждую молекулу внешняя сила влияет так, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\varphi}{dx},$$

где $\varphi(x)$ — функция силы. Мы можем обозначить ее $\eta'(l)$, условившись, что $\varphi(l) = \eta'(l)$, если l заключена между нулем и π , и что $\eta'(l) = \varphi(2K\pi \pm l)$, если $2K\pi \pm l$ заключено между нулем и π . Тогда уравнение движения будет

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2l}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dl^2},$$

а уравнение живых сил, если считать, что $\theta = -2\eta'$,

$$\omega^2 + \theta(l) = \omega_0^2,$$

где ω_0 — постоянная для каждой молекулы.

Если мы проинтегрируем уравнения движения, то найдем

$$l = \psi(\xi, \omega_0),$$

считая, что

$$\xi = \omega_0 t + \xi_0,$$

где ξ_0 — новая постоянная интегрирования. Пусть тогда $f(\xi_0, \omega_0) d\xi_0 d\omega_0$ — число молекул, для которых обе постоянные интегрирования заключены, соответственно, между ξ_0 и $\xi_0 + d\xi_0$ и ω_0 и $\omega_0 + d\omega_0$.

Напишем интеграл

$$J = \int \cos(m\xi + h) f(\xi_0, \omega_0) d\xi_0 d\omega_0.$$

Интегрирование по частям даст

$$J = -\frac{1}{mt} \int \sin(m\xi + h) \frac{df}{d\omega_0} d\xi_0 d\omega_0,$$

откуда видно, что J стремится к нулю при $t = \pm \infty$. Это означает, что через достаточно долгое время t вероятное число молекул, находящихся внутри какой-то области, будет представлено интегралом

$$N = \int \Omega^{(0)} d\xi_0 d\omega_0,$$

распространенным на эту область; $\Omega^{(0)}$ — функция только ω_0 . В частном случае, когда нет возмущающего тела, а $\theta = 0$, $\omega_0 = \omega$, $\xi = l$, мы можем на-

писать $N = \int \Omega dl d\omega$, где Ω зависит только от ω . Надо преобразовать этот интеграл, вернувшись к переменным l и ω_0 . Находим

$$N = \int \frac{\Omega^{(0)}}{dl/d\xi} dl d\omega_0 = \int \frac{\Omega^{(0)}\omega_0}{\omega} dl d\omega_0 = \int \frac{\Omega^{(0)}\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \theta(l)}} dl d\omega_0.$$

Отсюда выводим также $N = \int \Omega^{(0)} dl d\omega$. Это доказывает, что $\Omega^{(0)}$ не что иное, как с точностью до постоянного множителя функция P раздела 1.

При том же значении ω_0 плотность газа, следовательно, обратно пропорциональна $\sqrt{\omega_0^2 - \theta(l)}$, т. е. тем больше, чем больше $\theta(l)$. Следовательно, газ сгущается в той части, где функция сил максимальна. Например, если действующая сила — сила тяжести, то газ сгущается *вверху*. Это парадоксальное свойство одномерного газа.

Но мы должны заметить, что оно верно, только если все молекулы, по крайней мере большая часть их, движутся от одной стенки к другой. Это было бы не так, если бы ω_0^2 была меньше, чем максимум $\theta(l)$. В данном случае можно было бы придать l лишь такие значения, при которых $\theta(l)$ была бы меньше ω_0^2 . При этом в сосуде окажется такая область, где нет ни одной молекулы, допускающей такое значение ω_0^2 , и другая область (в случае силы тяжести это — нижняя часть сосуда), где такие молекулы имеются, но с переменной плотностью, возрастающей по мере приближения к границе областей.

Все зависит, таким образом, от числа молекул, для которых постоянная интегрирования заключена между ω_0 и $\omega_0 + d\omega_0$. Число это задано предыдущей формулой, которая принимает вид

$$d\omega_0 \int_0^\pi \frac{\Omega^{(0)}\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \theta(l)}} dl.$$

Следовательно, все зависит от функции $\Omega^{(0)}$, и можно выбрать эту функцию таким образом, чтобы газ под влиянием, например, силы тяжести собирался в сосуде внизу, а не вверху.

4. Изменения одномерного газа

Причина, порождающая функцию сил $\theta(l)$, обязана своим происхождением действию внешних тел. Если положение этих внешних тел меняется, функция $\theta(l)$ меняется также, и, следовательно, меняется состояние газа. Для простоты предположим, что имеется одно только внешнее тело C , притягивающее газовые молекулы по закону Ньютона или другому аналогичному закону.

Предположим, что тело C вначале слишком удалено, чтобы оказывать какое-либо влияние. Тогда $\theta(l)$ равна нулю, и через какое-то долгое время распределение молекул станет однородным и плотность его внутри сосуда постоянной.

В момент t_0 я внезапно приближаю тело C . Тогда функция $\theta(l)$ перестает равняться нулю. Через достаточное время молекулы получают новое распределение, в соответствии с уравнениями предыдущего раздела. Если предположить, что все молекулы двигаются с достаточно большими скоростями, то постоянные ω_0^2 больше максимума $\theta(l)$ и тогда, в силу парадоксального результата, полученного в предыдущем разделе, в конечном распределении плотность газа будет тем больше, чем дальше область от тела C .

В момент t_1 я резко удаляю тело C . Тогда функция $\theta(l)$ снова обращается в нуль, и через достаточное время распределение молекул снова становится однородным. Когда мы приблизили тело C , то оно, будучи притянуто газовыми молекулами, проделало положительную работу, стремящуюся увеличить его живую силу.

Когда же в момент t_1 мы отдалили тело, оно проделало отрицательную работу. Но, по абсолютной величине, положительная работа больше отрицательной. Действительно, в момент t_0 плотность газа была однородной, а в момент t_1 она была больше в наиболее отдаленных от C участках сосуда. Газ, в среднем, отделился от C и оказывал на это тело меньшее притяжение.

Полная работа сил, приложенных к C , поэтому положительна и по принципу сохранения энергии температура газа должна понизиться. Следовательно, происходит превращение тепла в работу. Этот вывод как будто противоречит принципу Карно. Но, разумеется, это лишь кажущееся противоречие. В одномерном газе, не подвергающемся внешнему воздействию, молекулы сохраняют начальную скорость ω ; поэтому стремлений к осуществлению закона Максвелла нет. Функция, обозначенная нами Ω в предыдущем разделе, может быть выбрана произвольно, а выбранная раз, она остается неизменной неограниченное время. Если же приблизить, а потом удалить тело C , функция Ω уже не будет прежней. Скорости ω в среднем уменьшаются, поскольку снижается температура, но, кроме того, они стремятся уравниваться, и это создает компенсацию, так как энтропия газа зависит не только от температуры, но и от функции Ω , т. е. от того, как распределены скорости.

Это показывает, что парадоксальные свойства одномерного газа тесно связаны с постоянством скоростей, иначе говоря, с той независимостью молекул, благодаря которой каждая из них сохраняет свою скорость, не стремясь согласовать ее со скоростью соседних молекул.

Хотя явление представляется нам в виде, так сказать, обратном привычному, тем не менее, оно необратимо, и поэтому позволит нам лучше проанализировать причины всеобщей необратимости.

Казалось бы, можно рассуждать так: каково в момент $\frac{t_0 + t_1}{2}$ вероятное число молекул N , долгота l и постоянная ω_0 которых удовлетворяют некоторым неравенствам

$$\Phi_i(l, \omega_0) > 0?$$

Оно выражается интегралом

$$N = \int \frac{\Omega^{(0)} \omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \theta(l)}} dl d\omega_0.$$

распространенным по области, определенной этими неравенствами. Так как $\theta(l) = \theta(-l)$, этот интеграл не изменится, если заменить наши неравенства на обратные

$$\Phi_i(-l, \omega_0) > 0.$$

Можно подумать, что состояние (l, ω_0) точно так же вероятно, как и обратное состояние $(-l, \omega_0)$, при котором молекулы занимают такие же положения при противоположно направленных скоростях. Но, если в момент $\frac{t_0 + t_1}{2}$ переменить все скорости на обратные, газ пройдет через те же состояния, что и при упрощенном предположении, но в обратном порядке. Иначе говоря, состояние, в котором он находился при первом предположении в момент времени $\frac{t_0 + t_1}{2} + h$, будет у него при втором предположении в момент времени $\frac{t_0 + t_1}{2} - h$. В частности, вместо того, чтобы быть теплее в момент времени t_0 , чем в t_1 , он будет холоднее.

Следовательно, обратимость будет, и обратное явление точно так же вероятно, как и прямое. Однако на самом деле это не так. Мы знаем, что в момент времени t_0 газ был однородным. Чтобы состояния (l, ω_0) и $(-l, \omega_0)$ были равновероятными, нужно, чтобы вероятное число N не менялось при замене l на $-l$. Но это верно, только если производные функций Φ_i (первые члены неравенств) конечны, и неверно, если они очень велики, порядка интервала $\frac{t_1 - t_0}{2}$. Мы уже объясняли это в конце раздела 2, и в этом объяснение парадокса. Если бы в момент времени $\frac{t_1 + t_0}{2}$ система не имела ни видимой, ни скрытой упорядоченности, оба противоположные состояния были бы одинаково вероятны. Хотя она быстро теряет видимую упорядоченность, но скрытую упорядоченность сохраняет долго; система теряет ее, только если время $\frac{t_1 - t_0}{2}$ сравнимо с тем, которое в разделе 2 я назвал *временем возвращения*.

5. Полный расчет для одного частного случая

Прежде чем пойти дальше, я постараюсь подробнее рассмотреть, что происходит с распределением скоростей после явления, которое мы описали. В момент t_0 число молекул, удовлетворяющих определенным неравенствам, выражается интегралом

$$\int \Omega dl d\omega,$$

распространенным на область, определенную этими неравенствами; Ω зависит только от ω .

В момент t_1 долгота и скорость молекулы (в момент t_0 они были l и ω) становятся l' и ω' , и мы имеем

$$\omega^2 + \theta(l) = \omega'^2 + \theta(l').$$

Распределение обратно пропорционально скорости ω' . Таким образом, $\Omega dld\omega$ молекул, долгота и скорость которых были в момент t_0 заключены соответственно между l и $l+dl$ и между ω и $\omega+d\omega$, распределены теперь так, что выражение

$$\frac{K}{\omega'} dl' dld\omega$$

представляет число молекул, долготы которых заключены между l' и $l'+dl'$ при постоянной K , зависящей только от l и ω . Имеем

$$K \int_0^{2\pi} \frac{dl'}{\omega'} = \Omega, \quad (1)$$

что определяет K . Тогда число молекул, долгота и скорость которых в момент t_1 заключены между l' и $l'+dl'$ и между ω' и $\omega'+d\omega'$, равно

$$\int \frac{K dl' dld\omega}{\omega'} = \int \frac{K dl' dld\omega'}{\omega}.$$

Нужно проинтегрировать только по l от нуля до 2π . Если мы хотим получить число молекул, скорость которых заключена между ω' и $\omega'+d\omega'$, то нужно проинтегрировать от нуля до 2π по l и по l' . Результат этого интегрирования будет $2\pi\Omega'd\omega'$. Отсюда

$$2\pi\Omega' = \int \int K \frac{dldl'}{\omega}, \quad (2)$$

и мы находим новое распределение скоростей.

Чтобы довести расчет до конца, будем считать, что θ очень мало; напишем θ и θ' вместо $\theta(l)$, $\theta(l')$ и положим

$$\int_0^{2\pi} \theta dl = 0, \quad \int_0^{2\pi} \theta^2 dl = 2\pi A^2,$$

иначе говоря, A^2 будет средним значением θ^2 . При этом

$$\frac{1}{\omega'} = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{2} \frac{\theta - \theta'}{\omega^3} + \frac{3}{8} \frac{(\theta - \theta')^2}{\omega^5},$$

и уравнение (1) дает, следовательно,

$$K \left[\frac{2\pi}{\omega} - \frac{\pi\theta}{\omega^3} + \frac{3\pi}{4} \frac{\theta^2 + A^2}{\omega^5} \right] = \Omega.$$

откуда

$$K = \frac{\Omega\omega}{2\pi} \left[1 + \frac{\theta}{2\omega^2} + \frac{\theta^2}{4\omega^4} - \frac{3}{8} \frac{\theta^2 + A^2}{\omega^4} \right].$$

Но теперь нужно постараться получить K/ω как функцию ω' , l и l' . Известно, что Ω — функция только ω , тогда мы можем написать $\Omega(\omega)$. Положим, что

$$\Omega(\omega') = \Omega_0, \quad \frac{d\Omega(\omega')}{d\omega'} = \Omega_1, \quad \frac{d^2\Omega(\omega')}{d\omega'^2} = \Omega_2.$$

С той же степенью точности мы получим

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1 \frac{\theta' - \theta}{2\omega'} - \frac{\Omega_1}{8} \frac{(\theta' - \theta)^2}{\omega'^3} + \frac{\Omega_2}{2} \frac{(\theta' - \theta)^2}{4\omega'^2},$$

или менее точно

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega'^2} - \frac{\theta' - \theta}{\omega'^4},$$

откуда окончательно

$$\begin{aligned} \frac{K}{\omega} = \frac{\Omega_0}{2\pi} \left[1 + \frac{\theta}{2\omega'^2} - \frac{\theta(\theta' - \theta)}{2\omega'^4} + \frac{\theta^2}{4\omega'^4} - \frac{3}{8} \frac{\theta^2 + A^2}{\omega'^4} \right] + \\ + \frac{\Omega_1}{2\pi} \left[\frac{\theta' - \theta}{2\omega'} - \frac{(\theta' - \theta)^2}{8\omega'^3} + \frac{(\theta' - \theta)\theta}{4\omega'^3} \right] - \frac{\Omega_2}{2\pi} \frac{(\theta' - \theta)^2}{8\omega'^2}. \end{aligned}$$

Далее, из уравнения (2):

$$\Omega' = \Omega_0 - \frac{\Omega_1 A^2}{2\omega'^3} + \frac{\Omega_2 A^2}{4\omega'^2},$$

или, что одно и то же,

$$\Omega' = \Omega_0 + A^2 \frac{d}{d\omega'} \frac{\Omega_1}{4\omega'^2}.$$

Я выписываю это выражение в таком виде, чтобы убедиться, что полное число молекул, как и следовало ожидать, не изменилось.

Пусть V и V' — живая сила в моменты t_0 и t_1 , так что $V = 2\pi \int \Omega \omega^2 d\omega$; заменив ω на ω' и Ω на Ω_0 , что является простой заменой обозначений, получим

$$V = 2\pi \int \Omega_0 \omega'^2 d\omega', \quad V' = 2\pi \int \Omega' \omega'^2 d\omega'.$$

Последовательным интегрированием по частям находим

$$\frac{V' - V}{2\pi A^2} = \int \omega'^2 d \frac{\Omega_1}{4\omega'^2} = - \int \Omega_1 \frac{d\omega'}{2\omega'} = - \int \frac{\Omega_0 d\omega'}{2\omega'^2} < 0.$$

Это подтверждает отмеченный выше парадокс. Заметим все же, что этот результат верен, только если Ω делится на ω'^2 . Иначе интеграл разойдется из-за присутствия ω'^2 в знаменателе.

Рассмотрим в более общем виде другие функции, подобные живой силе. Обозначим через φ некую функцию от ω' . Тогда

$$V = \int \Omega_0 \varphi(\omega') d\omega', \quad V' = \int \Omega' \varphi(\omega') d\omega'.$$

Получаем

$$\frac{V' - V}{A^2} = \int \varphi d \frac{\Omega_1}{4\omega'^2} = - \int \Omega_1 \varphi' \frac{d\omega'}{4\omega'^2} = \int \Omega_0 d\omega' \frac{d}{d\omega'} \frac{\varphi'}{4\omega'^2},$$

так что $V' - V < 0$, если $\frac{d}{d\omega'} \frac{\varphi'}{4\omega'^2}$ все время отрицательно. Например, если

$$\varphi = \omega'^K, \quad \varphi' = K\omega'^{K-1}, \quad \frac{\varphi'}{4\omega'^2} = \frac{K}{4}\omega'^{K-3}, \quad \frac{d}{d\omega'} \frac{\varphi'}{4\omega'^2} = \frac{K(K-3)}{4}\omega'^{K-4}.$$

Если K — четное и > 3 , это выражение все время положительно. Для обобщения построим кривую, взяв за абсциссы ω'^3 , а за ординаты φ . Все будет зависеть от того, повернута ли выпуклость кривой к началу координат, или нет. Все эти функции, хотя и не являются энтропией, обладают в этом частном случае такими же свойствами.

Вычислим теперь энтропию:

$$\int P \log P d\tau = \int P \log P dl d\omega.$$

Так как Ω пропорциональна P и не зависит от l , она связана линейным соотношением с интегралом $\int \Omega \log \Omega d\omega$. Но можно этот интеграл написать в виде

$$\int \Omega_0 \log \Omega_0 d\omega',$$

так как мы переходим от одного к другому, заменив ω на ω' , иначе говоря, при помощи простой замены обозначений.

Его возрастание, считая $\Omega = \Omega_0 + \delta\Omega_0$, будет:

$$\int (1 + \log \Omega_0) \delta\Omega_0 d\omega' = A^2 \int (1 + \log \Omega_0) d \frac{\Omega_1}{4\omega'^2},$$

или, после интегрирования по частям,

$$-A^2 \int \frac{\Omega_1}{4\omega'^2} \frac{d\Omega_0}{\Omega_0} = -A^2 \int \left(\frac{\Omega_1}{2\omega'\Omega_0} \right)^2 \Omega_0 d\omega' < 0,$$

что и требовалось доказать.

6. Изучение энтропии

Итак, энтропия все время изменяется, как и живая сила. Но здесь следует заметить, что вывод, касающийся энтропии, имеет гораздо более общий характер, чем тот, который относится к живой силе. Последний верен, как мы это видели, лишь если предположить, что начальные скорости достаточно велики, чтобы мы были уверены в том, что все молекулы перейдут от одной стенки к другой. Вернемся теперь к энтропии, выразив ее интегралом

$$\iint P \log P dld\omega,$$

распространенным на весь сосуд. P выбрано так, что вероятность для молекул находиться в какой-либо области выражается интегралом

$$\iint P dld\omega = \int P d\tau,$$

распространенным на эту область.

Я полагаю, что P — произвольная функция, которая должна оставаться положительной при одном только условии

$$\iint P dld\omega = \text{const},$$

и отыскиваю минимум интеграла

$$\iint P \log P dld\omega.$$

Предполагается, что оба интеграла распространены на одну и ту же область D . Легко заметить, что этот минимум достигается, если функция P постоянна. Это остается верным и если вместо $P \log P$ мы возьмем произвольную функцию от P , вторая производная которой положительна.

Установив это, предположим, что наш газ не подвергается воздействию возмущающего тела. Если оставить его в покое достаточное время, то функция P , как мы это видели, будет зависеть только от ω . Приблизим теперь возмущающее тело. Получаем, как сказано выше, $\omega^2 + \theta(l) = \omega_0^2$ (где ω_0 — постоянная для каждой молекулы). А для N — вероятного числа молекул, содержащихся в произвольном объеме, — после установления режима, т. е. в момент времени t_1 , о котором говорилось выше, получаем

$$N = \int \frac{\Omega^{(0)} \omega_0}{\omega} dld\omega_0 = \int \Omega^{(0)} dld\omega$$

при $\Omega^{(0)}$, зависящей только от ω_0 . В момент t_1 имеем, следовательно, $P = \Omega^{(0)}/\nu$, где ν — полное число молекул, а P зависит только от ω_0 .

Если мы примем за P значение функции P , которое она имела до приближения возмущающего тела, а за P_0 — ее значение после приближения

тела и установления постоянного режима, то P будет зависеть от ω , а P_0 от

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \theta(l)}.$$

Пусть D — такая область, где ω_0 заключена между двумя бесконечно близкими значениями ω_0 и $\omega_0 + d\omega_0$. Тогда интеграл

$$\iint P dld\omega,$$

выражающий вероятность того, что произвольная молекула находится в этой области, не изменится, поскольку ω_0 — постоянная для каждой молекулы. Поэтому

$$\iint P dld\omega = \iint P_0 dld\omega.$$

Но так как P_0 , зависящая только от ω_0 , будет постоянна в этой области, получим

$$\iint P \log P dld\omega > \iint P_0 \log P_0 dld\omega,$$

где интегралы распространяются на область D . И так как весь сосуд можно разделить на области, такие же, как D , то сохранится то же неравенство, если распространить интегралы на весь объем сосуда. Это означает, что энтропия уменьшилась.

Теперь удалим возмущающее тело и пусть P_1 — значение функции P , которое та получила, после того как газ снова обрел устойчивый режим. Тогда P_1 так же, как и первоначальная функция P , будет функцией только от ω (но не функцией только от ω_0 , как было у P_0). Если D_1 — такая область, где ω заключено между двумя бесконечно близкими значениями ω и $\omega + d\omega$, число молекул, содержащихся в этой области, не изменится. Поэтому, рассуждая, как мы это делали только что, мы увидим, что

$$\iint P_0 \log P_0 dld\omega > \iint P_1 \log P_1 dld\omega;$$

интегралы распространяются либо на область D_1 , либо на весь сосуд, а это означает, что энтропия еще больше уменьшилась. Итак, общие соображения Гиббса применимы и к интересующему нас частному случаю. Исключений нет, и энтропия всегда уменьшается.

7. Трехмерный газ

Из вышеизложенного следует, что энтропия уменьшается во всех случаях, а живая сила — только если функции Ω и θ удовлетворяют некоторым условиям.

Перед тем как пойти дальше, заметим, что можно было бы получить газ со всеми свойствами одномерного газа, если заключить молекулы

в сосуд, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, и если молекулы, имея малый радиус действия, никогда бы не сталкивались. Проекции этих молекул на ось, параллельную одному из ребер параллелепипеда, вели бы себя тогда в точности, как молекула одномерного газа.

Вернемся теперь к трехмерному газу. Предположим, что форма сосуда произвольная и что молекулы могут сталкиваться. В предыдущем случае каждая молекула (по крайней мере, пока не приближалось возмущающее тело) сохраняла живую силу (и также квадрат одной из трех составляющих ее скорости оставался постоянным).

Здесь же не так; при столкновении молекул их скорости изменяются; живая сила каждой из них переменна; лишь *сумма* всех живых сил постоянна. Отсюда и существенная разница между обоими случаями.

Предположим, что мы приближаем возмущающее тело и что θ представляет собой, как и ранее, удвоенную потенциальную энергию, обязанную своим происхождением притяжению возмущающего тела к одной из молекул.

Уравнение живых сил будет тогда выглядеть

$$\sum (\omega^2 + \theta) = \text{const},$$

где суммирование распространено на все молекулы. Мы тогда можем обозначить через $P\delta$ вероятность того, что молекула находится в малой области δ , и получить два уравнения

$$\begin{aligned}\sum P\delta &= \text{const}, \\ \sum P(\omega^2 + \theta)\delta &= \text{const},\end{aligned}$$

из которых второе — уравнение живых сил, а первое говорит о том, что число молекул постоянно. Режим установится, когда энтропия

$$\sum (P \log P) \delta$$

будет минимальной, что произойдет, очевидно, когда

$$P = ae^{-b(\omega^2 + \theta)},$$

где a и b — две положительные постоянные, которые легко вычислить, если знать полную массу и полную энергию. Это уравнение *изотермического* равновесия нашего газа.

Положим теперь, как мы это сделали выше, что в момент времени t_0 возмущающее тело приблизили, а в момент времени t_1 удалили. В момент времени t_0 плотность газа одинакова во всем сосуде, в момент времени t_1 получим

$$P = ae^{-b(\omega^2 + \theta)},$$

и плотность газа будет пропорциональна $e^{-b\theta}$. Она будет, следовательно, тем меньше, чем больше θ . Иначе говоря, для случая тяготения она меньше сверху, чем снизу. Это результат, обратный парадоксальному выводу, к которому привело нас рассмотрение одномерного газа. Отсюда также

следует, что работа, затраченная на удаление возмущающего тела в момент времени t_1 , больше, чем работа, выигранная, когда оно приближалось в момент времени t_0 . Газ нагрелся, а мы затратили работу, что согласуется с принципом Карно.

8. Случай быстрых изменений

До сих пор мы все время предполагали, что, приблизив возмущающее тело, мы, прежде чем снова его удалить, давали режиму время установиться. Останутся ли результаты такими же, если удалить тело, не дожидаясь установления устойчивого режима? Рассуждения Гиббса (раздел 6) не позволяют это утверждать.

Вернемся к одномерному газу. Мы видели, что когда после приближения возмущающего тела опять устанавливается устойчивый режим, живая сила уменьшается. Значит, конечное действие возмущающего тела состоит в уменьшении живой силы, если достаточно долго ждать. Легко заметить, что, напротив, в первые моменты эффект противоположен и стремится увеличить живую силу. Действительно, вернемся к дифференциальному уравнению раздела 3, которое я могу записать в виде

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{d^2 \eta}{dl^2},$$

напомнив, что выше мы положили

$$\theta = -2 \frac{d\eta}{dl}.$$

В начальный момент времени t_0 (я могу предположить, что он был выбран таким образом, чтобы $t_0=0$) значение l будет l_0 , а значение $\frac{dl}{dt}$ будет ω . В момент времени t , если t мало,

$$l = l_0 + \omega t + \frac{1}{2} \frac{d^2 l}{dt^2} t^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3 l}{dt^3} t^3;$$

$$\frac{dl}{dt} = \omega + \delta\omega = \omega + \frac{d^2 l}{dt^2} t + \frac{1}{2} \frac{d^3 l}{dt^3} t^2.$$

Дифференцируя дифференциальное уравнение, находим

$$\frac{d^3 l}{dt^3} = \frac{d^3 \eta}{dl^3} \frac{dl}{dt},$$

или, при $t=0$,

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = \eta''_0, \quad \frac{d^3 l}{dt^3} = \eta'''_0 \omega.$$

где через η_0'' , η_0''' мы обозначили значения $\frac{d^2\eta}{dl^2}$, $\frac{d^3\eta}{dl^3}$ при $l = l_0$. Находим

$$\omega + \delta\omega = \omega + \eta_0''t + \frac{1}{2}\eta_0'''\omega t^2,$$

и в том же приближении

$$(\omega + \delta\omega)^2 = \omega^2 + 2\omega\eta_0''t + \eta_0''^2t^2 + \eta_0'''\omega^2t^2.$$

Число молекул, удовлетворяющее некоторым условиям в момент времени t_0 , определяется интегралом

$$\iint \Omega d\omega dl_0,$$

где Ω зависит только от ω .

Полная живая сила в момент времени t_0 равна

$$\iint \Omega \omega^2 d\omega dl_0,$$

а живая сила в момент t будет

$$\iint \Omega (\omega + \delta\omega)^2 d\omega dl_0,$$

иначе говоря,

$$\iint \Omega \omega^2 d\omega dl_0 + \int 2\Omega \omega \eta_0''t d\omega dl_0 + \int \Omega \eta_0''^2t^2 d\omega dl_0 + \int \Omega \omega^2 \eta_0'''\omega t^2 d\omega dl_0.$$

Второй и четвертый интегралы равны нулю, потому что η_0'' и η_0''' — производные функций η' и η'' , периодических по l_0 . Тогда интеграл, распространенный на целый период, равен нулю. Полное возрастание живой силы равно, следовательно,

$$\int \Omega \eta_0''^2t^2 d\omega dl_0 = t^2 \int \Omega d\omega \int \eta_0''^2 dl_0,$$

и оно существенно положительно, что и требовалось доказать.

Для того чтобы посмотреть, как переходят от одного случая к другому, предположим, что возмущающая функция η' очень мала. Обозначим через l_0 и ω значения l и $\frac{dl}{dt}$ в начальный момент времени t_0 , а через $l_0 + \omega t + \delta l$, $\omega + \delta\omega$ — значения тех же величин в момент t . Получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\delta l}{dt^2} = \frac{d\delta\omega}{dt} = \eta''(l_0 + \omega t + \delta l).$$

Функция η — периодическая по l , а так как она определена только своими производными, то мы можем предположить, что ее среднее значение равно нулю. Разумеется, это же относится к ее производным η' , η'' , ...

Для простоты обозначим через $\eta, \eta', \eta'' \dots$ значения $\eta(l), \frac{d\eta}{dl}, \frac{d^2\eta}{dl^2}$ при $l = l_0 + \omega t$ и через $\eta_0, \eta'_0, \eta''_0 \dots$ — значения тех же функций при $l = l_0$.

Так как η очень мала, мы можем, пренебрегая членами высшего порядка, записать наше дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{d^2 \delta l}{dt^2} = \eta'' + \eta''' \delta l.$$

В первом приближении мы можем пренебречь δl во втором члене, и тогда два последовательных интегрирования дадут

$$\omega \delta \omega = \eta' - \eta'_0,$$

$$\omega^2 \delta l = \eta - \eta_0 - \omega t \eta'_0$$

при условии, что $\delta \omega$ и δl обращаются в нуль при $t = t_0$, иначе говоря, при $t = 0$, если принять момент времени t_0 за начало.

Во втором приближении получим, следовательно,

$$\frac{d \delta \omega}{dt} = \eta'' + \frac{\eta''}{\omega^2} (\eta - \eta_0 - \omega t \eta'_0),$$

или, интегрируя,

$$\delta \omega = \frac{\eta' - \eta'_0}{\omega} + \frac{1}{\omega^3} \left[\eta \eta'' - \frac{\eta'^2}{2} - \eta_0 \eta'' - \omega t \eta'' \eta'_0 + \eta' \eta'_0 - \frac{\eta_0'^2}{2} \right].$$

И действительно, легко проверить, что производная от $\delta \omega$ имеет желаемое значение, и что $\delta \omega$ обращается в нуль при $t = 0$.

Отсюда получаем в том же приближении

$$(\omega + \delta \omega)^2 = \omega^2 + 2(\eta' - \eta'_0) + \frac{2\eta''}{\omega^2} [\eta - \eta_0 - \omega t \eta'_0].$$

Следовательно, полное возрастание живой силы равно

$$2 \int \Omega (\eta' - \eta'_0) d\omega dl_0 + 2 \int \frac{\Omega}{\omega^2} \eta'' [\eta - \eta_0 - \omega t \eta'_0] d\omega dl_0.$$

Первый интеграл равен нулю, поскольку среднее значение η' равно нулю. Нам остается поэтому заняться только вторым. Если t очень мало, мы получим

$$\eta'' = \eta''_0, \quad \eta - \eta_0 - \omega t \eta'_0 = \frac{\omega^2 t^2 \eta''_0}{2}.$$

Возрастание живой силы будет, следовательно,

$$\int \Omega \eta_0''^2 t^2 d\omega dl_0,$$

что подтверждает полученный выше результат.

Предположим, что t , напротив, очень велико. Я утверждаю тогда, что интегралы $\int \frac{\Omega}{\omega^2} \eta'' \eta_0 d\omega dl_0$ стремятся к нулю. Их отличает присутствие под знаком интеграла двух множителей. Первый, η'' — периодическая функция по $l_0 + \omega t$, среднее значение которой равно нулю. Второй, η_0 — периодическая функция по l_0 , среднее значение которой равно нулю.

Тогда общий член η'' будет, например, пропорционален

$$\cos m(l_0 + \omega t + h),$$

а общий член η_0 пропорционален

$$\cos m'(l_0 + h').$$

Произведение этих двух членов дает сумму косинусов $\cos(pl_0 + n\omega t + h'')$, где p и n целые числа и n не равно нулю. Соответствующий член интеграла будет $\int \frac{\Omega}{\omega^2} \cos(pl_0 + n\omega t + h'') d\omega dl_0$; применяя к нему принципы раздела 2, мы увидим, что он стремится к нулю, если t возрастает. Следовательно, возрастающая живая сила будет

$$2 \int \frac{\Omega}{\omega^2} \eta'' \eta d\omega dl_0,$$

или, так как среднее значение величины

$$\eta'' \eta + \eta'^2 = \frac{d}{dl_0} \eta \eta'$$

равно нулю, получим

$$-2 \int \frac{\Omega}{\omega^2} \eta'^2 d\omega dl_0.$$

Но η' — не что иное, как обозначенная выше величина $-\theta/2$, поэтому среднее значение η'^2 — это то, что в разделе 5 мы обозначили $1/4 A^2$. Таким образом, возрастание живой силы сводится к

$$-2\pi \int \frac{\Omega A^2 d\omega}{2\omega^2},$$

что подтверждает вывод раздела 5.

Но вывод этот имеет смысл, только если Ω делится на ω^2 , и, чтобы лучше это понять, мы закончим вычисление для частного случая, предположив, что

$$\Omega = e^{-b\omega^2}, \quad \eta = \cos Kl.$$

Подсчитаем возрастание живой силы

$$U = 2 \int \frac{\Omega}{\omega^2} \eta'' (\eta - \eta_0 - \omega \eta'_0 t) d\omega dl_0$$

как функции t . Интегралы взяты от $-\infty$ до $+\infty$ по ω и от нуля до 2π по l_0 . Тогда

$$\begin{aligned}\eta\eta'' &= -K^2 \cos K(l_0 + \omega t), & \eta''\eta_0 &= -K^2 \cos Kl_0 \cos K(l_0 + \omega t), \\ \eta''\eta'_0 &= +K^3 \sin Kl_0 \cos K(l_0 + \omega t),\end{aligned}$$

и средние значения этих трех периодических функций l_0 будут, соответственно,

$$-\frac{K^2}{2}, \quad -\frac{K^2}{2} \cos K\omega t, \quad -\frac{K^3}{2} \sin K\omega t,$$

что дает нам

$$U = -2\pi K^2 \int \frac{e^{-b\omega^2}}{\omega^2} (1 - \cos K\omega t - K\omega t \sin K\omega t) d\omega.$$

Продифференцируем по t . Тогда

$$\frac{dU}{dt} = 2\pi K^4 t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b\omega^2} \cos K\omega t d\omega.$$

Этот интеграл хорошо известен. Он равен постоянной, не зависящей от t и умноженной на экспоненту $e^{-\frac{K^2 t^2}{4b}}$, так что dU/dt пропорционально

$$te^{-\frac{K^2 t^2}{4b}}.$$

Так как, с другой стороны, U должна обратиться в нуль при $t=0$, получаем

$$U = +C \left(1 - e^{-\frac{K^2 t^2}{4b}}\right),$$

где C — положительная постоянная.

Это показывает, что в данном случае живая сила постоянно возрастает.

Мы пришли бы к такому же результату, если бы, предполагая, что $\Omega = e^{-b\omega^2}$, приняли, что η — произвольная периодическая функция по l (которую продолжали бы, разумеется, считать очень малой). Действительно, пусть

$$\eta = \sum A \cos (Kl + h).$$

Имеем тогда

$$\begin{aligned}\eta\eta'' &= -\sum AA' K^2 \cos (Kl_0 + K\omega t + h) \cos (K'l_0 + K'\omega t + h'), \\ \eta''\eta_0 &= -\sum AA' K^2 \cos (Kl_0 + K\omega t + h) \cos (K'l_0 + h'), \\ \eta''\eta'_0 &= \sum AA' K^2 K' \cos (Kl_0 + K\omega t + h) \sin (K'l_0 + h'),\end{aligned}$$

средние значения которых соответственно

$$-\sum \frac{A^2 K^2}{2}; \quad -\sum \frac{A^2 K^2}{2} \cos K\omega t; \quad \sum \frac{A^2 K^3}{2} \sin K\omega t,$$

что дает

$$U = -2\pi \sum A^2 K^2 \int \frac{e^{-b\omega^2}}{2\omega^2} (1 - \cos K\omega t - K\omega t \sin K\omega t) d\omega.$$

Отсюда с помощью предыдущего получаем

$$U = -2\pi \sum C A^2 \left(1 - e^{-\frac{K^2 t^2}{4b}}\right),$$

где C существенно положительна. Это еще раз указывает, что живая сила постоянно возрастает.

9. Заключение

Мы видели, что если молекулы газа не сталкиваются и если сосуд имеет форму прямоугольного параллелепипеда, этот газ ведет себя как одномерный. Если теперь мы представим себе очень разреженный газ, где столкновения молекул достаточно редки, и сосуд, форма которого близка к прямоугольному параллелепипеду, мы получим нечто вроде промежуточного газа, который, так сказать, займет место между одномерным и трехмерным газом. Через какое-то время, достаточно долгое, чтобы каждая молекула прошла по нескольку раз сосуд по всей длине, но достаточно короткое, чтобы столкновения не были многочисленными, в этом газе установится режим, который удовлетворит условиям равновесия одномерного газа. Но равновесие это не будет окончательным, столкновения будут стремиться его нарушить, и только через еще более длительное время газ достигнет, наконец, окончательного равновесия, которое будет равновесием трехмерного газа. Такой промежуточный газ, очевидно, неосуществим.

Я назову *очень большим временем первого порядка* время, достаточное, чтобы наш промежуточный газ достиг предварительного равновесия, соответствующего одномерному газу, *очень большим временем второго порядка* время, необходимое, чтобы он достиг окончательного равновесия, соответствующего трехмерному газу.

Положим, что в момент t_0 возмущающее тело приближается, а в момент t_1 удаляется. В момент времени t_0 газ достигает своего окончательного равновесия, а так как он до сих пор не подвергался воздействию никакой внешней силы, то функция P зависит только от η и пропорциональна $e^{-b\omega^2}$, согласно закону Максвелла. Если $t_1 - t_0$ — очень большая величина второго порядка, газ в момент t_1 достигает своего нового окончательного равновесия. Он будет вести себя, следовательно, как трехмерный

газ. По тому, что мы видели в разделе 7, его живая сила возрастет и энтропия уменьшится.

Но если время $t_1 - t_0$ — очень большая величина первого порядка, то газ будет вести себя в этот промежуток как одномерный газ. Если в момент t_1 живая сила оказалась меньше, чем в t_0 , то у нас была бы возможность нарушить принцип Карно. Достаточно было бы в t_1 быстро удалить возмущающее тело, и тогда, так как теперь газ не подвергался бы никаким внешним воздействиям, его полная живая сила не могла бы меняться и оставалась бы меньше, чем в t_0 . Таким образом, когда окончательное равновесие было бы снова достигнуто, внутренняя энергия была бы меньше, а энтропия больше, чем в t_0 .

Если в момент t_0 распределение скоростей произвольно, то может случиться так, что через очень большое время $t_1 - t_0$ величины первого порядка живая сила уменьшится. Достаточно для этого, чтобы, согласно разделам 5 и 8, Ω делилась на ω^2 . Но это не так, если в t_0 газ достиг своего окончательного равновесия, так что Ω пропорциональна $e^{-b\omega^2}$. Тогда, если значение функции P в момент t_0 будет P_0 , а в момент t_1 будет P_1 , то

$$P_0 = Ke^{-b\omega^2}, \quad \int P_0 d\tau = \int P_1 d\tau.$$

С другой стороны,

$$\int P_0 \log P_0 d\tau > \int P_1 \log P_1 d\tau,$$

поскольку мы дали предварительному режиму время установиться, и, следовательно, энтропия должна была уменьшаться. Из этого легко заключить, что

$$\int P_0 \omega^2 d\tau < \int P_1 \omega^2 d\tau.$$

Так ли это, если время $t_1 - t_0$ конечно? На этот раз, так как мы не даем времени режиму установиться, соображения Гиббса, иначе говоря, соображения раздела 6 здесь неприменимы, и мы не можем утверждать, что энтропия уменьшилась. Тем не менее из анализа, приведенного в конце раздела 8, следует, что живая сила все же увеличивается, если только возмущающая сила η'' очень мала.

Но можно задать вопрос, так ли это, если возмущающая сила не очень мала? Это еще не все — в разделе 8 мы считали ее постоянной, иными словами, мы считали, что возмущающее тело неподвижно от момента t_0 , когда его быстро приближают, до момента t_1 , когда его быстро удаляют. А что произойдет, если эта возмущающая сила переменна, иначе говоря, если от момента t_0 до t_1 долготы l удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = f(l, t),$$

где f — функция не только l , но еще и t ? Это вполне может осуществиться; достаточно предположить, что возмущающее тело или тела перемещаются в этот промежуток времени. Действителен ли еще в этом случае вывод раздела 8? Это сомнительно, поскольку соображения Гиббса здесь неприменимы, и, значит, возникает опасность прийти к результатам, противоречащим принципу Карно.

Вот как можно было бы рассуждать в этом случае. Мы знаем, что грубая энтропия — энтропия физиков — все время уменьшается, но это можно доказать, только если изменения внешних условий достаточно медленны, чтобы режим мог установиться. Рассмотрим теперь *тонкую энтропию*, как она была определена в разделе 1. Мы знаем, что она все время постоянна, и вывод этот не требует оговорок.

Установив это, положим, что P_0 и P_1 — значения функции P в моменты времени t_0 и t_1 . Тогда

$$P_0 = Ke^{-b\omega^2}, \quad \int P_0 d\tau = \int P_1 d\tau = 1.$$

Энтропии будут

$$S_0 = \int P_0 \log P_0 d\tau, \quad S_1 = \int P_1 \log P_1 d\tau,$$

а живые силы —

$$V_0 = \int \omega^2 P_0 d\tau, \quad V_1 = \int \omega^2 P_1 d\tau.$$

Из теоремы Тейлора, оборвав ряд на втором члене, находим

$$P_1 \log P_1 - P_0 \log P_0 = (P_1 - P_0)(\log P_0 + 1) + \frac{(P_1 - P_0)^2}{2P_2},$$

где P_2 заключено между P_0 и P_1 . Но мы имеем

$$\log P_0 + 1 = \log K + 1 - b\omega^2,$$

что позволяет написать:

$$S_1 - S_0 = (\log K + 1) \int (P_1 - P_0) d\tau - b \int \omega^2 (P_1 - P_0) d\tau + \int \frac{(P_1 - P_0)^2}{2P_2} d\tau.$$

Первый интеграл правой части равен нулю, второй равен $V_1 - V_0$, третий — положителен, так как P_2 существенно положительно.

Следовательно,

$$(S_1 - S_0) + b(V_1 - V_0) > 0.$$

Здесь речь идет о тонкой энтропии, поэтому $S_1 = S_0$. Отсюда

$$V_1 - V_0 = 0.$$

Это показывает, что живая сила возросла, что и требовалось доказать. Это же заключение существует а fortiori, если энтропия уменьшается, т. е. если

$$S_1 < S_0.$$

Следовательно, тот же вывод применим и к грубой энтропии при условии, что возмущающее тело будет перемещаться достаточно медленно, чтобы статическое равновесие успело установиться, так как только в этом случае мы можем утверждать, что грубая энтропия уменьшается. К тонкой энтропии этот вывод применим *без ограничений* — она во всех случаях остается постоянной.

Такое же рассуждение можно применить и к обычным газам. И, таким образом, можно устранить одно из затруднений, которые еще имеются в кинетической теории газов.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И ОПТИКА *

Введение

Когда французский читатель впервые открывает книгу Максвелла**, к испытываемому им восхищению примешивается чувство беспокойства и зачастую даже недоверия, от которых удастся отделаться нескоро и лишь ценой значительных усилий. Некоторые выдающиеся умы сохранили это впечатление навсегда.

Почему же, однако, идеи английского ученого воспринимаются у нас с таким трудом? Причина этого, несомненно, заключается в том, что образование, получаемое большинством французов, развивает в них склонность к тому, чтобы ценить прежде всего логичность и точность.

С этой точки зрения старые теории математической физики вполне нас удовлетворяли. Таков был метод всех наших учителей, начиная от Лапласа и кончая Коши. Исходя из точно сформулированных гипотез, они с математической точностью выводили из них все следствия, которые затем сравнивали с опытом. Они как бы стремились придать всем областям физики точность небесной механики.

Ум, воспитанный на подобных образцах, предъявляет ко всякой теории чрезвычайно строгие требования. Его не только возмущает малейшая видимость противоречия, но он требует также строго логической связи между отдельными частями и минимального числа строго разграниченных гипотез.

Но это не все. Существуют еще и другие требования, которые мне кажутся менее обоснованными. За материей, воздействующей на наши органы чувств и познаваемой путем опыта, подобный ум хотел бы видеть некую другую материю, являющуюся, по его мнению, единственно реальной; материю, которая не имеет других свойств, кроме чисто геометрических, и атомы которой представляют собой математические точки, подчиняющиеся только законам динамики. И, однако, в силу бессознательного противоречия, он будет стремиться наглядно представить себе

* *Électricité et optique. Leçons professées à la Sorbonne en 1888 et 1890 par H. Poincaré. Introduction. Paris, 1890, p. V—XVII.* Русский перевод см. в сб. «Из предистории радио». М., Изд-во АН СССР, 1948, стр. 221—226.

** J. C. M a x w e l l. A treatise on electricity and magnetism, v. 1, 2. Oxford, 1873. (Прим. ред.).

эти неделимые и бесцветные атомы, тем самым приближая их, насколько возможно, к обычной материи.

Только тогда он будет испытывать полное удовлетворение и будет полагать, что проник в тайну мироздания. Как бы обманчиво ни было подобное удовлетворение, от него все же трудно отказаться.

Итак, открывая книгу Максвелла, француз ожидает найти в ней теорию, столь же логичную и строгую, как физическая оптика, основанная на гипотезе о существовании эфира. Его ожидает разочарование. Предвидя это, я хотел бы в некоторой степени подготовить читателя к тому, что он должен искать у Максвелла и чего он у него не сможет найти.

Максвелл не дает механического объяснения электричества и магнетизма. Он ограничивается доказательством того, что такое объяснение возможно.

Он показывает также, что оптические явления — лишь частный случай явлений электромагнитных. Таким образом, из теории электричества может быть непосредственно выведена теория света.

К сожалению, обратное не имеет места. Законченная теория света не всегда позволяет дать объяснение электрическим явлениям. В частности, этой цели нелегко достичь и тогда, когда исходной является теория Френеля. Подобное намерение небезнадежно, но невольно напрашивается мысль — не потребует ли оно отказа от некоторых результатов, которые мы привыкли относить к числу наших бесспорных приобретений. Это представляется шагом назад, и многие лучшие умы не хотят на него согласиться.

Но на этом не кончаются трудности, с которыми столкнется читатель, даже согласный ограничить подобным образом свои ожидания. Английский ученый не ставит себе целью воздвигнуть единое, стройное и законченное здание теории; скорее он возводит множество временных, не зависящих одна от другой построек, сообщение между которыми затруднено, а подчас и совсем невозможно.

Возьмем в качестве примера главу, в которой электростатические притяжения объясняются давлениями и натяжениями в диэлектрической среде. Эта глава может быть вычеркнута без того, чтобы все остальное стало менее ясным и менее полным. С другой стороны, она содержит вполне законченную теорию, которая может быть понята вне всякой связи с предыдущими и последующими главами. Она не только не зависит от остального содержания труда, но ее трудно согласовать с основными идеями книги, как будет более подробно показано ниже. Максвелл и не стремится к этому согласованию; он ограничивается тем, что заявляет: «I have not been able to make the next step, namely, to account by mechanical considerations for these stresses in the dielectric»* (Изд. 2, т. I, стр. 154).

* Мне не удалось сделать следующий шаг, а именно, объяснить механически эти натяжения в диэлектрике.

Этого примера достаточно для иллюстрации моей мысли; я мог бы привести много ему подобных. Например, кому при чтении страниц, посвященных магнитному вращению плоскости поляризации, придет в голову мысль об идентичности магнитных и оптических явлений?

Мы не должны поэтому надеяться избежать противоречий, а скорее должны примириться с ними. Две противоречащие друг другу теории, при условии если мы не будем стремиться их примирить и искать в них основу вещей, все же могут явиться весьма полезными орудиями познания и возможно, что изучение Максвелла было бы менее плодотворным, если бы он не открыл перед нами столько новых различных путей.

Но основная идея книги затемнена и притом настолько, что в большинстве популярных изложений она оказывается единственным, что оставлено без рассмотрения.

Ввиду этого я поставил себе целью объяснить в настоящем введении существо этой основной идеи, и, таким образом, подчеркнуть все ее значение.

Во всяком физическом явлении всегда существует некоторое число параметров, непосредственно доступных опыту и измерению. Я обозначу их через

$$q_1, q_2, \dots, q_n.$$

Наблюдение открывает нам законы изменения этих параметров, и эти законы в большинстве случаев могут быть выражены в форме дифференциальных уравнений, связывающих между собой все q и время.

Что требуется для того, чтобы дать механическое истолкование подобного явления?

Объяснение этого явления ищут либо в движении материи, либо в движении одного или нескольких гипотетических флюидов. Эти флюиды должны рассматриваться, как состоящие из чрезвычайно большого числа отдельных частиц. Пусть $m_1, m_2, \dots, m_p$ — массы этих частиц и пусть x_i, y_i, z_i — координаты частиц m_i . Предполагается, кроме того, что имеет место сохранение энергии и, следовательно, существует определенная функция $—U$ от $3p$ координат x_i, y_i, z_i , которая играет роль силовой функции. Тогда $3p$ уравнений движения будут иметь вид

$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= - \frac{\partial U}{\partial x_i}, \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= - \frac{\partial U}{\partial y_i}, \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= - \frac{\partial U}{\partial z_i}. \end{aligned} \tag{1}$$

Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2).$$

Потенциальная энергия равна U , и уравнение, выражающее сохранение энергии, запишется как $T + U = \text{const.}$

Следовательно, мы будем иметь полное механическое объяснение явления, если, с одной стороны, знаем силовую функцию $-U$, и, с другой стороны, выразим $3r$ координат x_i, y_i, z_i через n параметров q .

Если заменить эти координаты их выражениями через q , то уравнения (1) примут другую форму. Потенциальная энергия U сделается функцией q ; что же касается кинетической энергии T , то она будет зависеть не только от q , но и от производных q' и будет относительно этих производных однородна и квадратична. Законы движения будут выражаться при этом уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0. \quad (2)$$

Если теория справедлива, уравнения (2) должны совпадать с непосредственно наблюдаемым экспериментальным законом.

Таким образом, для того, чтобы механическое объяснение явления было возможно, должны быть найдены две функции U и T , из которых первая зависит только от параметров q , а вторая — от этих параметров и их производных, причем T должна быть однородной и иметь вторую степень относительно этих производных, а выведенные из опыта дифференциальные уравнения должны выражаться в форме (2). Обратное также верно: во всех случаях, когда могут быть найдены такие две функции U и T , можно быть уверенным, что явление допускает механическое объяснение.

Действительно, пусть эти функции будут $U(q_1, q_2, \dots, q_n)$ и $T(q'_1, q'_2, \dots, q'_n; q_1, q_2, \dots, q_n)$, или, проще, $U(q_k)$, $T(q'_k, q_k)$.

Что нужно сделать для того, чтобы получить полное объяснение?

Остается найти p постоянных $m_1, m_2, \dots, m_p$ и $3p$ функций от q

$$\varphi_i(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad \psi_i(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad \theta_i(q_1, q_2, \dots, q_n),$$

где $i=1, 2, \dots, p$, или более кратко

$$\varphi_i(q_k), \quad \psi_i(q_k), \quad \theta_i(q_k),$$

которые можно рассматривать соответственно как массы и как координаты p частиц системы:

$$x_i = \varphi_i, \quad y_i = \psi_i, \quad z_i = \theta_i.$$

Для этого функции должны удовлетворять следующему условию: должно выполняться тождественно

$$T(q'_k, q_k) = \frac{1}{2} \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = \frac{1}{2} \sum m_i (\varphi_i'^2 + \psi_i'^2 + \theta_i'^2)$$

или

$$\varphi'_i = q'_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_1} + q'_2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_2} + \dots + q'_n \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_n} \text{ и т. д.}$$

Так как число p может быть выбрано произвольно большим, этому условию всегда можно удовлетворить и притом бесконечным числом способов.

Таким образом, если функции $U(q_k)$ и $T(q'_k, q_k)$ существуют, то можно найти бесконечное множество механических объяснений данного явления.

Поэтому, если явление допускает какое-либо одно полное механическое объяснение, то оно допускает и бесконечное число других механических объяснений, которые в равной мере будут удовлетворительны в отношении всех особенностей, выявленных на опыте.

Сказанное находит себе подтверждение в истории всех областей физики. В оптике, например, Френель считает, что колебания происходят перпендикулярно к плоскости поляризации, тогда как Нейман полагает, что они параллельны этой плоскости. Долгое время искали *experimentum crucis*, который позволил бы сделать выбор между этими двумя теориями, но так и не смогли его найти.

Подобным же образом мы можем констатировать, что в области электричества все наблюдаемые законы электростатики одинаково удовлетворительно объясняются как теорией одного, так и теорией двух флюидов.

Все эти факты вполне разъясняются свойствами уравнений Лагранжа, на которых я останавливался выше.

Нетрудно понять теперь, в чем состоит основная идея Максвелла.

Для того чтобы доказать возможность механического объяснения электрических явлений, нет необходимости искать самое объяснение; для этого достаточно знать выражения двух функций T и U , представляющих собой две части энергии; составить с помощью этих двух функций уравнения Лагранжа и затем сравнить эти уравнения с экспериментальными законами.

Но как сделать выбор из всех возможных механических объяснений в том случае, когда помощь опыта не является для этого достаточной? Возможно, что наступит время, когда физики перестанут интересоваться подобными вопросами, не доступными для позитивных методов, и представят их рассмотрение метафизикам. Однако время это еще не наступило, человек не так легко отказывается от попыток познать природу вещей. Поэтому мы в своем выборе неизбежно обречены руководствоваться соображениями, в которых доля личной оценки чрезвычайно велика; между тем, некоторые решения будут всеми отвергнуты ввиду их необычности, в то время как другие будут всеми признаны в силу своей простоты.

В вопросах электричества и магнетизма Максвелл воздерживается от какого-либо выбора. Это диктуется, однако, не систематическим нежеланием касаться чего бы то ни было, что недоступно для позитивных

методов; время, отданное им построению кинетической теории газов, свидетельствует об обратном. Добавлю, что если в своем большом труде он не дает никакого законченного объяснения, то попытку дать таковое он сделал раньше в одной статье, опубликованной в «Philosophical Magazine». Странность и сложность гипотез, которые он вынужден был сделать, заставили его, наконец, от них отказаться.

Тот же дух господствует во всей этой книге. Везде подчеркнуто все основное, т. е. все, что должно оставаться во всех теориях, а все, присущее лишь какой-либо частной теории, почти всегда оставлено без внимания. Читателю, таким образом, предлагается пустая форма, почти лишенная содержания, которая с первого взгляда производит впечатление чего-то неопределенного и неуловимого. Однако усилия, которые он, таким образом, вынужден делать, будят его мысль и в конце концов он поймет, насколько зачастую были искусственны те теоретические построения, которыми он иной раз так восхищался.

Как раз в электростатике, где особенно чувствуется отсутствие точности, моя задача была наиболее трудной. Один французский ученый, весьма глубоко изучивший труд Максвелла, однажды сказал мне: «Я понимаю все в его книге за исключением того, что такое наэлектризованный шар». Поэтому я счел нужным особенно подробно остановиться на рассмотрении именно этой области. Я хотел избежать той расплывчатости в определении электрического смещения, которая является причиной всех неясностей. С другой стороны, я боялся, чрезмерно уточняя мысль автора, сказать лишнее и тем самым исказить ее.

Я решил изложить последовательно две законченные, но совершенно различные теории. Я надеюсь, что читатель без труда усмотрит, что является общим для обеих и, следовательно, основным. Кроме того, он предупрежден о том, что ни одна из них не раскрывает сущность вещей.

В первой из этих теорий я допускаю существование двух флюидов — электрического и индукционного, которые могут оказаться столь же полезными, как и два флюида Кулона, но которые обладают не большей объективной реальностью. Подобным же образом гипотеза о ячеечном строении диэлектриков должна лишь облегчить понимание идеи Максвелла, сближая ее с теми, которые нам более знакомы. Поступая так, я ничего не убавляю и не прибавляю к мыслям, высказанным английским ученым, ибо сам Максвелл никогда не рассматривал «what we may call an electrical displacement»* как действительное движение подлинной материи.

* То, что может быть названо электрическим смещением.

ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕНИ *

I. Пока мы не выходим за пределы области сознания, понятие времени относительно ясно. Мы не только легко отличаем ощущение в настоящем от воспоминания ощущения в прошлом или предвидения ощущения в будущем, но также отлично знаем, что хотим сказать, когда утверждаем, что из двух осознанных явлений, о которых мы сохранили воспоминание, одно имело место раньше другого, или что из двух осознанных явлений, которые можно предвидеть в будущем, одно будет иметь место раньше другого.

Когда мы говорим, что два осознанных факта являются одновременными, мы имеем в виду, что они настолько глубоко проникают друг в друга, что анализ не может их разделить, не искажая.

Порядок, в котором мы располагаем осознанные явления, не содержит ничего произвольного. Он нам продиктован, и мы не можем его изменить.

Я хотел бы добавить лишь одно замечание. Чтобы некоторая совокупность ощущений стала воспоминанием, которое можно классифицировать во времени, необходимо, чтобы она перестала относиться к настоящему, чтобы мы потеряли смысл ее бесконечной сложности, которая сохраняет ее актуальность. Необходимо, чтобы она как бы выкристаллизовалась вокруг некоторого центра совокупности идей, который будет служить чем-то вроде метки. И только когда наши воспоминания потеряют всякую жизнеспособность, мы сможем их классифицировать во времени, подобно ботанику, располагающему в определенном порядке засушенные цветы в гербарии.

Но число меток может быть только конечным. С этой точки зрения психологическое время было бы прерывным. Откуда возникает чувство, что между некоторыми двумя мгновениями есть еще и другие мгновения? Мы распределяем наши воспоминания во времени, но знаем, что остаются и пустые промежутки. Как это возможно, если время не было бы формой, ранее существующей в нашем уме? Как бы мы узнали, что есть незаполненные промежутки, если эти промежутки мы обнаруживаем лишь по их содержанию?

* *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1898, VI, 1—13.

II. Но это еще не все; в такой форме мы хотим воспроизвести не только явления нашего сознания, но и явления, для которых сознание является театром. Более того, мы хотим воспроизвести физические факты, то, чем мы заселяем пространство, которое не видит прямо ни одно сознание. Это необходимо, так как иначе наука не могла бы существовать. Одним словом, имея психологическое время, мы хотим создать научное и физическое время. Именно здесь возникает трудность или скорее трудности, так как их две.

Пусть существуют два сознания, представляющие собой два мира, которые не могут проникать один в другой. По какому праву мы хотим заключить их в одну и ту же форму, мерить их одними и тем же аршином? Не равносильно ли это тому, как если бы стали мерить с помощью грамма, а взвешивать с помощью метра?

А впрочем, почему мы говорим об измерении? Мы, быть может, знаем, что некоторый факт предшествует другому, но не знаем *насколько*.

Следовательно, есть две трудности.

1. Можно ли преобразовать психологическое время, которое является качественным, в количественное?

2. Можно ли измерить одной и той же мерой факты, которые происходят в различных мирах?

III. Первая трудность была замечена уже давно, она была объектом длинных дискуссий и можно сказать, что этот вопрос решен.

Мы не можем определить непосредственно, на основе интуиции, равенство двух интервалов времени. Тот, кто считает, что обладает такой интуицией, является жертвой иллюзии.

Когда я говорю, что от двенадцати до часа прошло столько же времени, сколько от двух часов до трех, какой смысл имеет это утверждение?

Простое размышление показывает, что само утверждение не имеет никакого смысла. Оно будет иметь лишь тот смысл, который я ему придам определением, неизбежно содержащим некоторую степень произвола.

Психологи могли бы обойтись без такого определения, физики и астрономы не смогли; посмотрим, как они вышли из этого положения.

Чтобы измерить время, они пользуются маятником и принимают по определению, что все его колебания имеют одинаковую длительность. Но это лишь первое приближение: температура, сопротивление воздуха, атмосферное давление меняют ход маятника. Если бы эти причины были устранены, то приближение было бы намного более точным, но и это все еще было бы приближением. Новые причины, которыми до сих пор пренебрегали, — электрические, магнитные или другие — внесли бы небольшие отклонения.

Фактически самые точные часы должны время от времени проверяться, и поправки производятся с помощью астрономических наблюдений; принято, что звездные часы отмечают час, когда соответствующая звезда пересекает меридиан. Другими словами, именно звездные сутки, т. е. про-

должительность оборота Земли, и принимаются постоянной единицей времени. На основании нового определения, заменяющего определение, полученное при описании колебаний маятника, принимают, что два полных оборота Земли вокруг своей оси имеют одну и ту же длительность.

Однако астрономы не довольствуются этим определением. Многие из них считают, что морские приливы и отливы являются тормозом для нашей планеты, и что вращение Земли постепенно замедляется. Так можно было бы объяснить кажущееся ускорение движения Луны, которое, по-видимому, происходит быстрее, чем предсказывает теория, так как наши часы — Земля — запаздывают.

IV. Могут сказать, что все это является не столь важным. Несомненно, наши измерительные инструменты несовершенны, но достаточно того, что мы могли бы представить некий совершенный инструмент. Этот идеальный вариант не будет достигнут, но достаточно его придумать и, таким образом, внести строгость в определение единицы времени.

К сожалению, такая строгость отсутствует. Какой же постулат мы неявно принимаем, когда пользуемся для измерения времени часами?

Он состоит в том, что *продолжительность двух идентичных явлений одна и та же*; или, если хотите, что одни и те же причины требуют одинакового времени, чтобы произвести одинаковые следствия.

На первый взгляд это хорошее определение равенства двух длительностей.

Однако будем осторожны. Разве не может случиться, что в один прекрасный день опыт опровергнет наш постулат?

Объясняю: предположим, что в некоторой точке мира происходит явление α , приводящее по истечении некоторого времени к следствию α' . В другой точке мира, сильно удаленной от первой, происходит явление β , в результате которого имеет место следствие β' . Явления α и β одновременны, как и их следствия α' и β' .

В последующую эпоху явление α повторяется в почти идентичных условиях, и *одновременно* повторяется явление β в некоторой сильно удаленной точке мира и почти в тех же условиях.

Следствия α' и β' также будут повторяться. Предположим, что следствие α' имеет место значительно раньше следствия β' .

Если бы опыт сделал нас свидетелями такого спектакля, наш постулат оказался бы опровергнутым.

Опыт показал бы нам, что первая длительность $\alpha\alpha'$ равна первой длительности $\beta\beta'$ и что вторая длительность $\alpha\alpha'$ меньше второй длительности $\beta\beta'$. Наш же постулат требовал бы, чтобы обе длительности $\alpha\alpha'$ были равны между собой, как и длительности $\beta\beta'$. Равенство и неравенство, выведенные из опыта, были бы несовместимы с двумя равенствами, взятыми из постулата.

Итак, можем ли мы утверждать, что гипотезы, которые я только что сделал, абсурдны? Они нисколько не противоречат закону противоречия.

Несомненно, они не смогли бы осуществиться без нарушения закона достаточного основания. Но чтобы обосновать такое фундаментальное определение, я предпочел бы некоторую другую гарантию.

V. И это еще не все.

В физической действительности следствие порождается не одной причиной, а множеством причин, причем вклад каждой из них различить невозможно.

Физики стараются выделить вклад каждой из причин; но делают это лишь приближенно, и какой бы ни был достигнут в этом прогресс, они всегда сделают это только приближенно. Почти верно, что колебание маятника зависит только от притяжения Земли; но, строго говоря, нельзя считать, что притяжение Сириуса не действует на маятник.

В этих условиях ясно, что причины, которые однажды вызвали некоторое следствие, смогут повториться в дальнейшем лишь весьма приближенно.

И тогда мы должны внести изменения в наш постулат и наше определение.

Вместо того, чтобы сказать: «Одни и те же причины требуют одного и того же времени, чтобы произвести одни и те же следствия», мы должны сказать: «Почти идентичные причины требуют почти одного и того же времени, чтобы произвести почти одинаковые следствия».

Следовательно, наше определение является лишь приближенным. К тому же, как очень справедливо заметил Калинон в недавней работе (A. Calinon. Etude sur les diverses grandeurs. Paris, Gauthier-Villars. 1897): «Один из факторов какого-либо явления есть скорость вращения Земли; если эта скорость меняется, она представляет собой фактор, который не остается больше идентичным при повторении этого явления. Но принять эту скорость вращения постоянной, значит предположить, что мы умеем измерять время».

Следовательно, наше определение еще не удовлетворительно; т. е., конечно, оно не является тем определением, о котором я говорил выше и которое неявно принимается астрономами, когда они утверждают, что земное вращение постепенно замедляется.

Какой смысл имеет это утверждение в их устах? Мы можем его понять, лишь проанализировав доказательства астрономов.

Прежде всего, они говорят, что трение приливов и отливов, приводящее к нагреванию, должно разрушать живую силу. Они ссылаются, таким образом, на принцип живых сил или закон сохранения энергии.

Затем они говорят, что вековое ускорение Луны, рассчитанное на основании закона Ньютона, было бы меньше ускорения, полученного из наблюдений, если бы не делали относительную поправку на замедление вращения Земли.

Они ссылаются, следовательно, на закон Ньютона.

Другими словами, они определяют длительность следующим образом. Время должно быть определено так, чтобы закон Ньютона и принцип живых сил были справедливы.

Закон Ньютона есть истина, полученная из опыта; как таковая, она является лишь приближенной. Это говорит нам о том, что наше определение также пока еще приближенно.

Если мы предположим теперь, что принимается другой способ измерения времени, то опыты, на которых основан закон Ньютона, по меньшей мере не сохраняют прежний смысл. Изменится формулировка закона, так как теперь он будет выражен на другом языке; очевидно, он будет гораздо менее простым.

Итак, определение, неявно принятое астрономами, можно резюмировать следующим образом.

Время должно определяться так, чтобы уравнения механики были как можно проще.

Другими словами, не существует способа измерения времени, который был бы более правильным, чем другой; тот, который принимается, является лишь более *удобным*.

Сравнивая часы, мы не имеем права сказать, что одни из них идут хорошо, а другие плохо, а можем только сказать, что предпочтение отдается показаниям первых часов.

Трудность, которую мы только что рассмотрели, как я уже говорил, часто отмечалась. Среди самых последних работ, где затрагивался этот вопрос, я назову, помимо работы Калинона, трактат по механике Андрада.

VI. Вторая трудность до сих пор вызывала намного меньший интерес. Однако она совершенно аналогична предыдущей, и с точки зрения логики я должен был сначала говорить о ней.

Два психологических явления происходят в двух разных сознаниях. Когда я говорю, что они одновременны, что я хочу этим сказать?

Когда я говорю, что некоторое физическое явление, которое происходит вне всякого сознания, является предшествующим или последующим по отношению к психологическому явлению, что я хочу этим сказать?

В 1572 году Тихо Браге обнаружил в себе появление новой звезды. Взрыв огромной силы произошел на каком-то очень удаленном небесном светиле, но произошел много раньше, и потребовалось по меньшей мере две сотни лет, прежде чем свет от этой звезды дошел до Земли. Следовательно, этот взрыв предшествовал открытию Америки.

Итак, когда я говорю это, когда я рассматриваю это гигантское явление, которое, может быть, не имело ни одного свидетеля, так как спутники этой звезды, возможно, не были заселены, когда я говорю, что это явление произошло раньше формирования зрительного образа острова Эспаньола в сознании Христофора Колумба, что я хочу этим сказать?

Самого простого рассуждения достаточно для того, чтобы понять — все эти утверждения сами по себе не имеют никакого смысла.

И они могут иметь его лишь при некоторой договоренности.

VII. Сначала мы должны спросить себя, как могла возникнуть идея воспроизвести в одних и тех же рамках столько не проникающих друг в друга миров?

Мы хотели бы представить себе внешний мир, и только такой ценой надеялись бы его познать.

Мы никогда не будем иметь такого представления, мы это знаем: наша немощь слишком велика.

Мы хотим, по крайней мере, чтобы имелась возможность представить бесконечный разум, для которого такое представление было бы доступным, что-то вроде великого сознания, которое бы все видело и все распределяло *в своем времени*, как мы распределяем *в нашем времени* то немногое, что наблюдаем.

Такая гипотеза очень груба и неполна, так как этот высший разум был бы лишь полубогом; бесконечный в одном смысле, он был бы ограничен в другом, так как для него прошлое являлось бы лишь неким несовершенным воспоминанием; и он не мог бы быть ни чем другим, так как в противном случае все воспоминания существовали бы для него в равной мере, и для него не существовало бы времени.

И однако, когда мы говорим о времени для всего, что происходит вне нас, не принимаем ли мы бессознательно эту гипотезу; не ставим ли мы себя на место этого несовершенного бога; и сами атеисты, не ставят ли они себя на то место, которое занимал бы бог, если бы он существовал?

Может быть, все, что я только что сказал, является причиной, которая заставила нас воспроизводить все физические явления в одних и тех же рамках. Но это нельзя считать определением одновременности, так как гипотетический разум, если бы даже он существовал, был бы для нас недоступным.

Следовательно, нужно поискать что-то другое.

VIII. Обычные определения, которые применимы для психологического времени, не смогли бы больше нас удовлетворить. Два одновременных психологических факта настолько тесно связаны друг с другом, что анализ не может их разделить, не искажая. Имеет ли место то же самое для двух физических фактов? Мое настоящее, не является ли оно более близким относительно моего вчерашнего прошлого, чем относительно настоящего Сирнуса?

Принято также, что два факта должны рассматриваться как одновременные, когда порядок их следования может быть по желанию изменен. Очевидно, что это определение не имело бы смысла для двух физических фактов, которые происходят на большом расстоянии друг от друга, и не понятно, что может означать эта обратимость в отношении данных физических фактов. К тому же прежде всего следовало бы определить саму последовательность.

IX. Попытаемся разобраться в том, что подразумевается под одновременностью или предшествованием. Для этого проанализируем несколько примеров.

Я пишу письмо; затем его читает мой друг, которому я его адресовал. Это два факта, арена действия которых — два разных сознания. При написании письма у меня возник определенный зрительный образ;

мой друг, в свою очередь, получил тот же самый образ, читая письмо. Хотя эти два факта существуют в мирах, не проникающих друг в друга, я, не колеблясь, рассматриваю первый факт как предшествующий второму, так как считаю, что он является его причиной.

Я слышу гром и заключаю, что имел место электрический разряд; я, не колеблясь, рассматриваю это физическое явление как предшествующее звуковому образу, получаемому моим сознанием, так как считаю, что оно является причиной. Это и есть правило, которого мы придерживаемся, и оно единственное для нас; когда одно явление нам кажется причиной другого, мы рассматриваем первое как предшествующее.

Таким образом, именно причиной мы определяем время. Но чаще всего, как узнаем мы, какой из двух фактов, кажущихся нам связанными постоянно, является причиной и какой следствием? Мы принимаем, что предшествующий факт, антецедент, является причиной другого, следствия. И тогда через время определяем причину. Как освободиться от этого логического противоречия?

Мы говорим то *post hoc, ergo propter hoc*, то *propter hoc, ergo post hoc**; удастся ли нам когда-нибудь выйти из этого порочного круга?

Х. Посмотрим же не на то, как выходят из такого положения, так как полностью сделать это не удастся, а на то, как пытаются из него выйти.

Я выполняю произвольный акт *A* и в результате получаю ощущение *D*, которое я рассматриваю как следствие акта *A*. С другой стороны, по какой причине я делаю вывод, что это следствие не является непосредственным, а вне моего сознания произошли два факта *B* и *C*, свидетелями которых я не был, и произошли так, что *B* является следствием *A*, *C* — следствием *B* и *D* — следствием *C*?

Но почему так? Если у меня есть основания считать четыре факта *A*, *B*, *C* и *D* связанными между собой причинными связями, почему их нужно расположить в причинном порядке *A B C D* и в хронологическом порядке *A B C D*, а не в каком-либо другом?

Очевидно, что в акте *A* я чувствовал себя активным, тогда как, получая ощущение *D*, я пассивен. Поэтому и рассматриваю *A* как начальную причину, а *D* как окончательное следствие. Поэтому я ставлю *A* в начале цепочки, а *D* в конце; но почему надо ставить *B* перед *C*, а не *C* перед *B*?

Если такой вопрос встает, то обычно на него дают следующий ответ: хорошо известно, что именно *B* является причиной *C*, так как видно, что *B* происходит *всегда* перед *C*. Эти два явления, когда у них есть свидетель, происходят в определенном порядке; когда же аналогичные явления происходят без свидетелей, нет оснований менять этот порядок.

Все это так, но нужно быть осторожным; мы никогда не знаем непосредственно физические явления *B* и *C*; мы знаем лишь ощущения *B'* и *C'*, производимые соответственно *B* и *C*. Наше сознание прямо подсказывает

* После этого, следовательно, по причине этого; по причине этого, следовательно, после этого.

нам, что B' предшествует C' и мы *принимаем*, что B и C следуют друг за другом в том же порядке.

В самом деле, это правило кажется очень естественным. И, однако, его часто приходится нарушать. Мы слышим гром лишь спустя несколько секунд после электрического разряда. Из двух ударов грома, одного отдаленного, а другого более близкого, не может ли первый предшествовать второму, хотя звук второго мы слышим раньше первого?

XI. Другая трудность: имеем ли мы право говорить о причине явления? Если все части мира действуют в какой-то мере согласно, то явление не будет следствием одной причины, а будет результирующей бесконечно большого числа причин. Часто говорят, что оно есть следствие состояния мира в предыдущий момент.

Как сформулировать правила, применимые к таким сложным ситуациям? Ведь только тогда эти правила смогут быть общими и строгими.

Чтобы не запутаться в этой бесконечной сложности, введем более простую гипотезу: рассмотрим три небесных тела, например Солнце, Юпитер и Сатурн. Но для бóльшей простоты будем рассматривать их как материальные точки, изолированные от остального мира.

Положений и скоростей трех тел в данный момент достаточно для определения положений и скоростей этих тел в последующий момент и, следовательно, в любой момент. Их положения в момент t определяют их положения в момент $t + h$, а также их положения в момент $t - h$.

Более того, положение Юпитера в момент t вместе с положением Сатурна в момент $t + a$ определяют положение Юпитера и положение Сатурна в любой момент.

Совокупность положений, занимаемых Юпитером в момент $t + \varepsilon$ и Сатурном в момент $t + a + \varepsilon$, связана с совокупностью положений, занимаемых Юпитером в момент t и Сатурном в момент $t + a$, законами такими же точными, как законы Ньютона, хотя и более сложными.

Тогда почему не рассматривать одну из совокупностей как причину другой, что привело бы к возможности рассматривать момент Юпитера t и момент Сатурна $t + a$ как одновременные?

Здесь мы руководствуемся только соображениями удобства и простоты, которые, в самом деле, очень существенны.

XII. Но перейдем теперь к менее искусственным примерам. Чтобы понять определение, неявно принятое учеными, посмотрим, как они его получают, следуя каким правилам вводят одновременность.

Я возьму два простых примера: измерение скорости света и определение долготы.

Когда астроном мне говорит, что такое-то звездное явление, которое он видит в настоящее время в телескоп, произошло уже 50 лет тому назад, я пытаюсь понять, что он хочет этим сказать, и я его спрашиваю сначала, откуда он это знает, т. е. как он измерил скорость света.

Он начал с того, что *принял* скорость света постоянной и, в частности, одинаковой во всех направлениях. Это и есть постулат, без которого не-

льзя было бы предпринять никакого измерения этой скорости. Данный постулат никогда не может быть проверен прямо на опыте. Он мог бы войти в противоречие с опытом, если бы результаты различных измерений не согласовывались между собой. Мы должны быть счастливы, что этого противоречия нет и что небольшие расхождения, которые могут возникнуть, легко объяснимы.

Во всяком случае, этот постулат, согласующийся с законом достаточного основания, принят всеми. Я хочу отметить, что он дал нам новое правило для поисков одновременности, полностью отличное от того, о котором мы упоминали выше.

Основываясь на этом постулате, посмотрим, как измерялась скорость света. Известно, что Рёмер пользовался затмением спутников Юпитера и определял, насколько запаздывало это событие по сравнению с предсказаниями.

Как же делается такое предсказание? С помощью астрономических законов, например закона Ньютона.

Что же касается наблюдаемых фактов, то нельзя ли их также хорошо объяснить, если приписать скорости света значение, несколько отличное от принятого и считать, что закон Ньютона является лишь приближением? Мы пришли бы только к необходимости замены закона Ньютона другим, более сложным.

Таким образом, для скорости света принимается такое значение, при котором астрономические законы, совместимые с ним, были бы как можно проще.

Когда моряки или географы определяют долготу, они должны решить проблему, которой мы занимаемся; не будучи в Париже, они должны рассчитать парижское время.

Как они это делают?

В одном случае они берут с собой хронометр, показывающий парижское время. И тогда качественная проблема одновременности сводится к количественной проблеме измерения времени. Я не буду возвращаться к трудностям, связанным с последней проблемой, так как они обсуждались достаточно подробно выше.

В другом случае они наблюдают за астрономическим явлением, таким, как лунное затмение, и принимают, что это явление наблюдается одновременно во всех точках земного шара.

Это не совсем правильно, так как свет распространяется не мгновенно; если нужно получить абсолютную точность, необходимо внести поправку, используя некоторое сложное правило.

И, наконец, они пользуются телеграфом. Прежде всего ясно, что получение сигнала в Берлине, например, следует за посылкой того же сигнала из Парижа. Это и есть правило причины и следствия, проанализированное выше. Встает вопрос, насколько позже. Обычно длительностью передачи пренебрегают, и оба события рассматриваются как одновременные. Но, чтобы быть более строгим, необходимо еще внести небольшую по-

правку, сделанную с помощью сложного расчета. Практически этого не делается, так как поправка была бы намного меньше, чем погрешность наблюдения; с нашей точки зрения, это не устраняет теоретической необходимости в ней, она нужна для строгого определения.

В этом обсуждении я хотел бы обратить внимание на два пункта:

1. Применяемые правила очень разнообразны.

2. Трудно отделить качественную проблему одновременности от количественной проблемы измерения времени; используется ли хронометр, или в случае необходимости учитывается скорость передачи, как, например, скорость света — в любом случае невозможно измерить скорость, *не измеряя* времени.

XIII. Пора сделать выводы.

Мы не можем непосредственно, на основе интуиции, определить ни одновременность, ни равенство двух промежутков времени.

Если мы считаем, что у нас есть такая интуиция, мы впадаем в иллюзию.

Мы заменяем ее некоторыми правилами, которые применяем почти всегда, не отдавая себе в том отчета.

Но какова природа этих правил?

Нет общего правила; нет правила строгого; есть множество частных правил, применяемых в каждом отдельном случае.

Эти правила не навязываются нам, и можно было бы позабавиться, придумывая другие. Однако от них нельзя отойти, не усложняя заметно формулировку законов физики, механики, астрономии.

Следовательно, мы выбираем эти правила не потому, что они верны, а потому, что они наиболее удобны, и мы можем их резюмировать следующим образом:

«Одновременность двух событий или порядок их следования, равенство двух длительностей должны определяться таким образом, чтобы формулировка законов природы была бы настолько простой, насколько это возможно. Другими словами, все эти правила, все эти определения являются лишь плодом неосознанного соглашения».

О ДИНАМИКЕ ЭЛЕКТРОНА *

На первый взгляд кажется, что абберация света и связанные с ней оптические и электрические явления дают нам средство для определения абсолютного движения Земли или, вернее, ее движения не по отношению к другим небесным телам, а по отношению к эфиру. На самом деле это не так. Опыты, где принимаются в расчет только члены первого порядка относительно величины абберации, дали сначала отрицательный результат, чему вскоре было найдено объяснение; но и Майкельсон, придумавший опыт, в котором становились уже заметными члены, зависящие от квадрата абберации, в свою очередь, потерпел неудачу. Невозможность обнаружить абсолютное движение Земли представляет, по-видимому, общий закон природы.

Объяснение было предложено Лоренцом, который ввел гипотезу о сокращении всех тел в направлении движения Земли; это сокращение дало бы объяснение опыту Майкельсона и всем другим, произведенным до сих пор в этом направлении опытам. Однако оно оставляло бы место для других опытов, еще более тонких и более простых по замыслу, чем по исполнению, целью которых было бы обнаружение абсолютного движения Земли. Но, рассматривая невозможность подобного утверждения как очень вероятную, можно предвидеть, что эти опыты, если их когда-либо удастся осуществить, снова дадут отрицательный результат. Лоренц старался дополнить и видоизменить гипотезу так, чтобы установить соответствие между нею и постулатом *полной* невозможности определения абсолютного движения. Ему удалось это сделать в своей статье «Электромагнитные явления в системе, движущейся с любой скоростью, меньшей скорости света» (Известия Амстердамской Академии, 27 мая 1904 г.).

Важность этого вопроса побудила меня снова заняться им; результаты, полученные мною, согласуются во всех наиболее важных пунктах с теми, которые получил Лоренц; я стремился только несколько видоизменить и дополнить их.

Идея Лоренца состоит в том, что уравнения электромагнитного поля не изменятся в результате некоторого преобразования (которое я назову именем Лоренца) следующего вида:

$$x' = kl(x + \varepsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz, \quad t' = kl(t + \varepsilon x), \quad (1)$$

* Comptes rendus, 1905, 140, 1504—1508.

где x, y, z — координаты и t — время до преобразования, а x', y', z' и t' — после преобразования. Величина ε — константа, которая определяет преобразование

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}},$$

а l — некоторая функция от ε . В этом преобразовании ось x играет особую роль, но, очевидно, можно построить такое преобразование, в котором эту роль будет выполнять некоторая прямая, проходящая через начало координат. Все эти преобразования вместе со всеми пространственными вращениями должны образовывать группу; но для этого нужно, чтобы $l=1$; следовательно, мы пришли к необходимости предположить, что $l=1$, это и является следствием, которое Лоренц получил другим путем.

Пусть ρ — плотность заряда электрона, ξ, η и ζ — составляющие скорости электрона до преобразования; тогда для тех же величин $\rho', \xi', \eta', \zeta'$ после преобразования мы имеем

$$\rho' = \frac{k}{l^3} \rho (1 + \varepsilon \xi), \quad \rho' \xi' = \frac{k}{l^3} \rho (\xi + \varepsilon), \quad \rho' \eta' = \frac{\rho \eta}{l^3}, \quad \rho' \zeta' = \frac{\rho \zeta}{l^3}. \quad (2)$$

Эти формулы несколько отличаются от тех, которые были найдены Лоренцом.

Пусть теперь X, Y, Z и X', Y', Z' — три компоненты силы до и после преобразования (*сила отнесена к единице объема*); тогда

$$X' = \frac{k}{l^5} \left(X + \varepsilon \sum X \xi \right), \quad Y' = \frac{Y}{l^5}, \quad Z' = \frac{Z}{l^5}. \quad (3)$$

Эти формулы также несколько отличаются от предложенных Лоренцом; дополнительный член в $\sum X \xi$ напоминает результат, полученный в свое время Льенаром.

Если теперь обозначим через X_1, Y_1, Z_1 и X'_1, Y'_1, Z'_1 составляющие силы, отнесенной не к единице объема, а к единице массы электрона, то получим

$$X'_1 = \frac{k}{l^5} \frac{\rho}{\rho'} \left(X_1 + \varepsilon \sum X_1 \xi \right), \quad Y'_1 = \frac{\rho}{\rho'} \frac{Y_1}{l^5}, \quad Z'_1 = \frac{\rho}{\rho'} \frac{Z_1}{l^5}. \quad (4)$$

Лоренц пришел также к необходимости предположить, что движущийся электрон принимает форму сжатого эллипсоида; эту же гипотезу выдвинул Ланжевен, но в то время как у Лоренца постоянными остаются две оси эллипсоида, что находится в согласии с его предположением $l=1$, у Ланжевена, наоборот, объем эллипсоида остается постоянным. Оба автора показали, что эти две гипотезы так же хорошо согласуются с опытами Кауфмана, как и первоначальная гипотеза Абрагама (шаровой электрон). Преимущество гипотезы Ланжевена состоит в ее достаточности, т. е. достаточно рассматривать электрон как деформируемый и несжимаемый для объяснения того, что, находясь в движении, он принимает форму эллипсоида. Но я могу показать, не противореча Лоренцу, что она не может быть совместима с невозможностью опыта, обнаруживающего абсолютное дви-

жение. Как я уже сказал, это происходит от того, что $l=1$ является единственной гипотезой, для которой преобразования Лоренца образуют группу.

Но и в гипотезе Лоренца согласие между формулами не происходит само по себе; его получают одновременно с возможным объяснением сжатия электрона в предположении, что *деформируемый и сжимаемый электрон подвержен постоянному внешнему давлению, работа которого пропорциональна изменению объема этого электрона.*

Применяя принцип наименьшего действия, я могу показать, что при этих условиях компенсация является полной, если предположить, что инерция имеет исключительно электромагнитное происхождение, как это общепризнано после опытов Кауфмана, и, за исключением постоянного давления, о котором я только что говорил и которое действует на электрон, все силы будут электромагнитного происхождения. Таким образом можно объяснить невозможность обнаружения абсолютного движения Земли и сокращения всех тел в направлении движения Земли.

Но это не все. Лоренц в цитированной работе считал необходимым дополнить свою гипотезу допущением, что все силы, какого бы происхождения они ни были, ведут себя при поступательном движении точно так же, как электромагнитные силы, и что вследствие этого влияние преобразования Лоренца на их составляющие определяется уравнениями (4).

Оказалось необходимым более внимательно рассмотреть эту гипотезу и, в частности, исследовать, какие изменения она вынуждает нас вносить в законы тяготения. Это то, что я старался определить; сначала я пришел к необходимости предположить, что распространение сил тяготения происходит не мгновенно, а со скоростью света. Это, кажется, находится в противоречии с результатом, полученным Лапласом, который утверждает, что если это распространение и не является мгновенным, оно, по крайней мере, происходит быстрее, чем распространение света. Однако в действительности вопрос, который поставил перед собой Лаплас, значительно отличается от вопроса, которым мы здесь занимаемся. По Лапласу, введение конечной скорости распространения было *единственным* изменением, которое он внес в закон Ньютона. Здесь же подобное изменение сопровождается многими другими; следовательно, между ними возможна частичная компенсация и она, в самом деле, происходит.

Следовательно, когда мы будем говорить о положении или скорости притягиваемого тела, мы будем иметь в виду положение или скорость в момент, когда *гравитационная волна* вышла из этого тела; когда мы будем говорить о положении или скорости притягиваемого тела, мы будем иметь в виду это положение или эту скорость в момент, когда данное притягиваемое тело настигается гравитационной волной, испускаемой другим телом; ясно, что первый момент предшествует второму.

Следовательно, если x, y, z являются проекциями на три оси вектора, который соединяет оба положения, если составляющие скорости притягиваемого тела есть ξ, η, ζ , а притягиваемого тела — ξ_1, η_1, ζ_1 , три состав-

ляющие притяжения (которые я могу также назвать X_1, Y_1, Z_1) будут функциями $x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$. Спрашивается, можно ли определить эти функции таким образом, чтобы они вели себя при преобразовании Лоренца в соответствии с уравнениями (4) и чтобы обычный закон тяготения имел место во всех случаях, когда скорости $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$ достаточно малы, так что можно пренебречь их квадратами по сравнению с квадратом скорости света?

На этот вопрос следует ответить утвердительно. Найдено, что притяжение, учитывающее поправку, состоит из двух сил, одна из них параллельна составляющим вектора x, y, z , другая — составляющим скорости ξ_1, η_1, ζ_1 .

Расхождение с общепринятым законом тяготения, как я только что отметил, порядка ξ^2 ; если же предположить только, как это сделал Лаплас, что скорость распространения равна скорости света, это расхождение было бы порядка ξ , т. е. в 10 000 раз бóльшим. Следовательно, на первый взгляд не кажется абсурдным предположение, что астрономические наблюдения не являются достаточно точными, чтобы обнаружить такое малое расхождение, какое только мы можем себе представить. Этот вопрос может быть разрешен только в результате глубокого исследования.

О ДИНАМИКЕ ЭЛЕКТРОНА *

Введение

На первый взгляд кажется, что абберация света и связанные с нею оптические и электрические явления дают нам средство для определения абсолютного движения Земли или, вернее, ее движения не по отношению к другим небесным телам, а по отношению к эфиру. Уже Френель пытался сделать это, но скоро обнаружил, что движение Земли не изменяет законов отражения и преломления. Аналогичные опыты, как, например, с трубой, наполненной водою, и все прочие, где принимаются в расчет только члены первого порядка относительно величины абберации, дали отрицательный результат, чему вскоре было найдено объяснение; но и Майкельсон, придумавший опыт, в котором становились уже заметными члены, зависящие от квадрата абберации, в свою очередь, потерпел неудачу.

Эта невозможность показать опытным путем абсолютное движение Земли представляет, по-видимому, общий закон природы; мы естественно приходим к тому, чтобы принять этот закон, который мы назовем *постулатом относительности*, и принять без оговорок. Все равно, будет ли позднее этот постулат, до сих пор согласующийся с опытом, подтвержден или опровергнут более точными измерениями, сейчас во всяком случае представляется интересным посмотреть, какие следствия могут быть из него выведены.

Лоренц и Фицджеральд ввели гипотезу о сокращении всех тел в направлении движения Земли, зависящем от квадрата абберации. Это сокращение, которое мы назовем *лоренцовым сокращением*, дало бы объяснение опыту Майкельсона и всем другим, произведенным до сих пор в этом направлении опытам. Однако, если бы мы пожелали принять постулат относительности во всей его общности, подобная гипотеза оказалась бы недостаточной.

Это заставило Лоренца дополнить и видоизменить гипотезу так, чтобы установить полное соответствие между нею и постулатом относительности.

* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1906, 21, 129—176. Русский перевод см.: Г. А. Л о р е н ц, А. Пу а н к а р е, А. Э й н ш т е й н, Г. М и н к о в с к и й. Принцип относительности. Сборник. М., ОНТИ, 1935, стр. 51—129.

Он достиг этого в своей статье «Электромагнитные явления в системе, движущейся с любой скоростью, меньшей скорости света» (Amsterdam Proceedings, 1904)*.

Важность вопроса побудила меня снова заняться им; результаты, полученные мною, согласуются во всех наиболее важных пунктах с тем, которые получил Лоренц; я стремился только дополнить и видоизменить их в некоторых деталях; некоторые имеющиеся расхождения, как мы увидим дальше, не играют существенной роли.

Идею Лоренца можно резюмировать так: если возможно сообщить общее поступательное движение всей системе без того, чтобы имели место какие-либо видимые изменения в явлениях, то это значит, что уравнения электромагнитного поля не изменятся в результате некоторых преобразований, которые мы будем называть *преобразованиями Лоренца*; две системы, одна неподвижная, другая перемещающаяся поступательно, представляют, таким образом, точное изображение одна другой.

Ланжевен** пытался видоизменить идею Лоренца; у обоих авторов движущийся электрон принимает форму сжатого эллипсоида, но в то время как у Лоренца постоянными остаются две оси эллипсоида, у Ланжевена, наоборот, объем эллипсоида остается постоянным. Оба ученых, впрочем, показали, что эти две гипотезы так же хорошо согласуются с опытами Кауфмана, как и первоначальная гипотеза Абрагама (недеформирующийся шаровой электрон).

Преимущество теории Ланжевена в том, что она вводит только электромагнитные силы и силы связи, но она несовместима с постулатом относительности. Последнее было показано Лоренцом; я также нашел этот результат несколько иным путем, пользуясь основными положениями теории групп.

Следует поэтому вернуться к теории Лоренца; однако, если мы хотим сохранить ее, избегнув явных противоречий, необходимо допустить существование силы, объясняющей одновременно сжатие одной и постоянство двух других осей. Я пытался определить эту силу и нашел, что *она может быть приравнена постоянному внешнему давлению, действующему на деформируемый и сжимаемый электрон, работа которого пропорциональна изменению объема этого электрона*.

Тогда, если инерция материи имеет исключительно электромагнитное происхождение, как это общепризнано после опытов Кауфмана, и, за исключением постоянного давления, о котором я только что говорил, все силы будут электромагнитного происхождения, то постулат относительности может быть установлен со всей строгостью; именно это я и собираюсь по-

* Русск. перев. см.: Г. А. Л о р е н ц, А. П у а н к а р е, А. Э й н ш т е й н, Г. М и н к о в с к и й. Принцип относительности. Сборник. М., ОНТИ, 1935, стр. 16—48. (Д. И.).

** До Ланжевена эту же идею высказал Бухерер в Бонне (см.: В u s h e r e r. Mathematische Einführung in die Elektronentheorie. Teubner, Leipzig, 1904).

казать весьма простыми вычислениями, основанными на принципе наименьшего действия.

Но это не все. Лоренц в цитированной работе считал необходимым дополнить свою гипотезу так, чтобы постулат относительности имел место и при наличии других сил, помимо электромагнитных. Согласно его идее, все силы, какого бы они ни были происхождения, ведут себя благодаря преобразованию Лоренца (и, следовательно, благодаря поступательному перемещению) точно так же, как электромагнитные силы.

Оказалось необходимым более внимательно рассмотреть эту гипотезу и, в частности, исследовать, какие изменения она вносит в законы тяготения.

Прежде всего, очевидно, она вынуждает нас предположить, что распространение сил тяготения происходит не мгновенно, но со скоростью света. Можно было бы подумать, что это является достаточным основанием для того, чтобы отвергнуть подобную гипотезу, так как Лаплас показал, что она не может иметь места. Но на самом деле действие этого распространения уравнивается в большей части другим обстоятельством, так что не существует противоречия между предложенным законом и астрономическими наблюдениями.

Возможно ли найти такой закон, который удовлетворял бы условию, поставленному Лоренцом, и одновременно сводился к закону Ньютона во всех случаях, когда скорости небесных тел достаточно малы для того, чтобы можно было пренебречь их квадратами (а также произведениями ускорений на расстояния) по сравнению с квадратом скорости света?

На этот вопрос, как мы увидим дальше, следует ответить утвердительно.

Согласуется ли видоизмененный таким образом закон с астрономическими наблюдениями?

По-видимому, да, но этот вопрос может быть окончательно разрешен только после более глубокого исследования.

Но, допуская даже, что это обсуждение докажет преимущество новой гипотезы, к какому заключению мы должны будем прийти? Если распространение сил притяжения происходит со скоростью света, то это не может быть результатом каких-либо случайных обстоятельств, а должно быть обусловлено одной из функций эфира; тогда возникает задача глубже проникнуть в природу этой функции и связать ее с другими свойствами эфира.

Недостаточно ограничиться простым сопоставлением формул, согласующихся между собою лишь благодаря счастливой случайности; необходимо, чтобы эти формулы, так сказать, проникали друг в друга. Разум наш не будет удовлетворен до тех пор, пока мы не поверим, что усмотрели причину этого согласования так хорошо, что, как нам кажется, мы могли бы ее предвидеть.

Однако этот вопрос можно представить себе еще с другой точки зрения; лучше всего можно это понять при помощи сравнения. Представим себе астронома, живущего до Коперника и размышляющего над системой Пто-

лемя; он заметил бы, что для всех планет один из двух кругов, эпицикл или деферент — основной круг, проходится в одно и то же время. Так как это не может быть случайностью, то, следовательно, между всеми планетами существует какая-то таинственная связь.

Однако Коперник, изменив лишь оси координат, рассматриваемые ранее как неподвижные, сразу уничтожил эту видимую связь; каждая планета описывает только один круг, и периоды обращения становятся независимыми друг от друга (до тех пор, пока Кеплер установил между ними связь, которую считали уничтоженной).

Возможно, что и в нашем случае имеется нечто аналогичное; если бы мы приняли принцип относительности, то в законе тяготения и в электромагнитных законах нашли бы общую постоянную — скорость света. Точно так же мы встретили бы ее во всех других силах какого угодно происхождения, что можно объяснить только с двух точек зрения: или все, что существует в мире — электромагнитного происхождения, или же это свойство, являющееся, так сказать, общим для всех физических явлений, есть не что иное, как внешняя видимость, что-то связанное с методами наших измерений. Как же мы производим наши измерения? Прежде мы ответили бы: перенося тела, рассматриваемые как твердые и неизменные, одно на место другого; но в современной теории, принимая во внимание сокращение Лоренца, это уже неверно. Согласно этой теории, двумя равными отрезками, по определению, будут такие два отрезка, которые свет проходит в одно и то же время.

Может быть, достаточно только отказаться от этого определения, чтобы вся теория Лоренца была совершенно уничтожена, как это случилось с системой Птолемея после вмешательства Коперника? Во всяком случае, если последнее и произойдет, это еще не докажет, что усилия Лоренца были бесполезными, ибо и Птолемей, какого мнения о нем ни придерживаться, отнюдь не был бесполезен для Коперника.

Поэтому я также нисколько не колебался опубликовать эти частичные результаты, хотя в настоящий момент вся теория кажется поставленной под угрозу, ввиду открытия магнитно-катодных лучей.

§ 1. Преобразование Лоренца

Лоренц ввел особую систему единиц, в которой множитель 4π исчезает во всех формулах. Я поступлю точно так же и кроме того выберу единицы длины и времени таким образом, чтобы скорость света была равна единице. Обозначая через f, g, h составляющие электрического смещения, через α, β, γ — магнитной силы, F, G, H — компоненты векторного потенциала, через ϕ и ρ — скалярный потенциал и плотность электричества, наконец, через ξ, η, ζ — составляющие скорости электрона и через u, v, w — составляющие плотности тока, мы можем представить основные формулы в виде:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{df}{dt} + \rho \xi = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \\
\alpha &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \quad f = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx}, \\
\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{dg}{dz} - \frac{dh}{dy}, \quad \frac{d\rho}{dt} + \sum \frac{d\rho\xi}{dx} = 0, \\
\sum \frac{df}{dx} &= \rho, \quad \frac{d\psi}{dt} + \sum \frac{dF}{dx} = 0, \\
\Box &= \Delta - \frac{d^2}{dt^2} = \sum \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dt^2}, \\
\Box \psi &= -\rho, \quad \Box F = -\rho \xi.
\end{aligned} \tag{1}$$

Элемент объема материи $dx dy dz$ подвергается действию механической силы, составляющие которой $X dx dy dz$, $Y dx dy dz$, $Z dx dy dz$ выводятся из формулы

$$X = \rho f + \rho (\eta \gamma - \zeta \beta). \tag{2}$$

Эти уравнения можно подвергнуть замечательному преобразованию, найденному Лоренцом, значение которого заключается в объяснении того, почему никакой опыт не в состоянии обнаружить абсолютное движение Земли.

Положим

$$\begin{aligned}
x' &= kl(x + \epsilon t), & t' &= kl(t + \epsilon x), \\
y' &= ly, & z' &= lz,
\end{aligned} \tag{3}$$

где l и ϵ — две произвольные постоянные, и пусть

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}.$$

Тогда, если мы обозначим через

$$\Box' = \sum \frac{d^2}{dx'^2} - \frac{d^2}{dt'^2},$$

то получим

$$\Box' = \Box l^{-2}.$$

Рассмотрим сферу, увлекаемую электроном при его равномерном поступательном движении; тогда

$$(x - \xi t)^2 + (y - \eta t)^2 + (z - \zeta t)^2 = r^2$$

есть уравнение этой движущейся сферы, объем которой равен $\frac{4}{3} \pi r^3$.

В результате преобразования вместо сферы получится эллипсоид, уравнение которого нетрудно найти.

В самом деле, из уравнения (3) легко получаем

$$\begin{aligned} x &= \frac{k}{l} (x' - \varepsilon t'), & t &= \frac{k}{l} (t' - \varepsilon x'), \\ y &= \frac{y'}{l}, & z &= \frac{z'}{l}. \end{aligned} \quad (3')$$

Тогда уравнение эллипсоида запишется в виде

$$k^2 (x' - \varepsilon t' - \xi t' + \varepsilon \xi x')^2 + (y' - \eta k t' + \eta k \varepsilon x')^2 + (z' - \zeta k t' + \zeta k \varepsilon x')^2 = l^2 r^2.$$

Этот эллипсоид перемещается, участвуя в равномерном движении; для $t' = 0$ его уравнение имеет вид

$$k^2 x'^2 (1 + \xi \varepsilon)^2 + (y' + \eta k \varepsilon x')^2 + (z' + \zeta k \varepsilon x')^2 = l^2 r^2,$$

и объем его будет равен

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \frac{l^3}{k (1 + \xi \varepsilon)}.$$

Если мы желаем, чтобы заряд электрона не изменялся от преобразования, то, обозначая через ρ' новую плотность электричества, будем иметь

$$\rho' = \frac{k}{l^3} (\rho + \varepsilon \rho \xi). \quad (4)$$

Новые скорости ξ' , η' , ζ' выражаются теперь через старые следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi' &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{d(x + \varepsilon t)}{d(t + \varepsilon x)} = \frac{\xi + \varepsilon}{1 + \varepsilon \xi}, \\ \eta' &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{kd(t + \varepsilon x)} = \frac{\eta}{k(1 + \varepsilon \xi)}, & \zeta' &= \frac{\zeta}{k(1 + \varepsilon \xi)}, \end{aligned}$$

откуда

$$\rho' \xi' = \frac{k}{l^3} (\rho \xi + \varepsilon \rho), \quad \rho' \eta' = \frac{1}{l^3} \rho \eta, \quad \rho' \zeta' = \frac{1}{l^3} \rho \zeta. \quad (4')$$

Здесь я должен отметить первое расхождение с Лоренцом. Лоренц полагает (с некоторой разницей в обозначениях) [см. цитированную выше работу, стр. 813, формулы (7) и (8)]*:

$$\rho' = \frac{1}{kl^3} \rho, \quad \xi' = k^2 (\xi + \varepsilon), \quad \eta' = k \eta, \quad \zeta' = k \zeta.$$

Таким способом также получаются формулы

$$\rho' \xi' = \frac{k}{l^3} (\rho \xi + \varepsilon \rho), \quad \rho' \eta' = \frac{1}{l^3} \rho \eta, \quad \rho' \zeta' = \frac{1}{l^3} \rho \zeta,$$

* Русск. перев. см.: Г. А. Л о р е н ц, А. Пу а н к а р е, А. Э й н ш т е й н, Г. М и н к о в с к и й. Принцип относительности. Сборник. М., ОНТИ, 1935, стр. 21 (Д. И.).

где, однако, значение ρ' уже другое.

Важно отметить, что величины (4) и (4') удовлетворяют условию непрерывности

$$\frac{d\rho'}{dt'} + \sum \frac{d\rho'\xi'}{dx'} = 0.$$

В самом деле, пусть λ — некоторый неопределенный коэффициент и D — функциональный определитель выражений

$$t + \lambda\rho, \quad x + \lambda\rho\xi, \quad y + \lambda\rho\eta, \quad z + \lambda\rho\zeta \quad (5)$$

относительно t, x, y, z .

Имеем

$$D = D_0 + D_1\lambda + D_2\lambda^2 + D_3\lambda^3 + D_4\lambda^4,$$

где

$$D_0 = 1, \quad D_1 = \frac{d\rho}{dt} + \sum \frac{d\rho\xi}{dx} = 0.$$

Полагая $\lambda' = l^2\lambda$, мы видим, что четыре функции

$$t' + \lambda'\rho', \quad x' + \lambda'\rho'\xi', \quad y' + \lambda'\rho'\eta', \quad z' + \lambda'\rho'\zeta' \quad (5')$$

связаны с функциями (5) линейными соотношениями такого же вида, какие связывают новые переменные с прежними. Если же обозначить через D' функциональный определитель функций (5') относительно новых переменных, то

$$D' = D, \quad D' = D'_0 + D'_1\lambda' + \dots + D'_4\lambda'^4,$$

откуда

$$D'_0 = D_0 = 1, \quad D'_1 = l^{-2}D_1 = 0 = \frac{d\rho'}{dt'} + \sum \frac{d\rho'\xi'}{dx'},$$

что и требовалось доказать.

Это условие не было бы выполнено при гипотезе Лоренца, так как ρ' имеет здесь другое значение.

Определим новые потенциалы — векторный и скалярный — так, чтобы удовлетворить уравнениям

$$\square'\psi' = -\rho', \quad \square'F' = -\rho'\xi'.$$

Мы получим затем отсюда

$$\psi' = \frac{k}{l}(\psi + \varepsilon F), \quad F' = \frac{k}{l}(F + \varepsilon\psi), \quad (6)$$

$$G' = \frac{1}{l}G, \quad H' = \frac{1}{l}H. \quad (7)$$

Эти формулы значительно отличаются от соответствующих формул Лоренца, но расхождение происходит здесь, в конце концов, только от различных определений.

Выберем новые поля — электрическое и магнитное — так, чтобы удовлетворялись уравнения

$$f' = -\frac{dF'}{dt'} - \frac{d\psi'}{dx'}, \quad \alpha' = \frac{dH'}{dy'} - \frac{dG'}{dz'}. \quad (8)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} &= \frac{k}{l} \left(\frac{d}{dt} - \varepsilon \frac{d}{dx} \right), & \frac{d}{dx'} &= \frac{k}{l} \left(\frac{d}{dx} - \varepsilon \frac{d}{dt} \right), \\ \frac{d}{dy'} &= \frac{1}{l} \frac{d}{dy}, & \frac{d}{dz'} &= \frac{1}{l} \frac{d}{dz}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} f' &= \frac{1}{l^2} f, & g' &= \frac{k}{l^2} (g + \varepsilon \gamma), \\ h' &= \frac{k}{l^2} (h - \varepsilon \beta), \\ \alpha' &= \frac{1}{l^2} \alpha, & \beta' &= \frac{k}{l^2} (\beta - \varepsilon h), \\ \gamma' &= \frac{k}{l^2} (\gamma + \varepsilon g). \end{aligned} \quad (9)$$

Эти формулы тождественны с формулами Лоренца.

Наше преобразование не изменяет уравнений (1). В самом деле, условие непрерывности, а также уравнения (6) и (8) уже дают нам некоторые из уравнений (1) (за исключением штрихов у букв).

Уравнения (6), будучи подставлены в условие непрерывности, дают

$$\frac{d\psi'}{dt'} + \sum \frac{dF'}{dx'} = 0. \quad (10)$$

Остается установить, что

$$\frac{df'}{dt'} + \rho' \xi' = \frac{d\gamma'}{dz'} - \frac{d\beta'}{dy'}, \quad \frac{d\alpha'}{dt'} = \frac{dg'}{dz'} - \frac{dh'}{dy'}, \quad \sum \frac{df'}{dx'} = \rho';$$

но легко видеть, что это есть не что иное, как следствие уравнений (6), (8) и (10).

Мы должны теперь сравнить силы до и после преобразования. Пусть X , Y , Z будет сила до преобразования, а X' , Y' , Z' — после него, причем обе отнесены к единице объема. Для того чтобы силы со штрихом удовлетворяли таким же уравнениям, как и до преобразования, необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} X' &= \rho' f' + \rho' (\eta' \gamma' - \zeta' \beta'), \\ Y' &= \rho' g' + \rho' (\zeta' \alpha' - \xi' \gamma'), \\ Z' &= \rho' h' + \rho' (\xi' \beta' - \eta' \alpha'). \end{aligned}$$

Заменяя все величины их значениями (4), (4'), (9) и принимая во внимание уравнения (2), получим

$$\begin{aligned} X' &= \frac{k}{l^5} \left(X + \varepsilon \sum X \xi \right), \\ Y' &= \frac{1}{l^5} Y, \\ Z' &= \frac{1}{l^5} Z. \end{aligned} \quad (11)$$

Если мы обозначим через X_1, Y_1, Z_1 составляющие силы, отнесенной уже не к единице объема, но к единице заряда электрона, а через X'_1, Y'_1, Z'_1 — те же величины после преобразования, то будем иметь

$$\begin{aligned} X_1 &= f + \eta\gamma - \zeta\beta, & X'_1 &= f' + \eta'\gamma' - \zeta'\beta', \\ X &= \rho X_1, & X' &= \rho' X'_1, \end{aligned}$$

и, следовательно, получим уравнения

$$\begin{aligned} X'_1 &= \frac{k}{l^5} \frac{\rho}{\rho'} \left(X_1 + \varepsilon \sum X_1 \xi \right), \\ Y'_1 &= \frac{1}{l^5} \frac{\rho}{\rho'} Y_1, \\ Z'_1 &= \frac{1}{l^5} \frac{\rho}{\rho'} Z_1. \end{aligned} \quad (11')$$

Лоренц же нашел, с точностью до обозначений [см. цит. выше работу, стр. 813, формулу (10)]*:

$$\begin{aligned} X_1 &= l^2 X'_1 - l^2 \varepsilon (\eta' g' + \zeta' h'), \\ Y_1 &= \frac{l^2}{k} Y'_1 + \frac{l^2 \varepsilon}{k} \xi' g', \\ Z_1 &= \frac{l^2}{k} Z'_1 + \frac{l^2 \varepsilon}{k} \xi' h'. \end{aligned} \quad (11'')$$

Прежде чем идти дальше, важно отыскать причину этого существенного расхождения. Оно, очевидно, происходит от того, что формулы для ξ', η', ζ' несколько отличаются от соответствующих формул Лоренца, тогда как формулы для электрического и магнитного поля — одни и те же.

Если инерция электронов исключительно электромагнитного происхождения и если, кроме того, они подвержены действию только электромагнитных сил, то условие равновесия требует, чтобы внутри электрона имело место соотношение

$$X = Y = Z = 0.$$

* См.: Г. А. Лоренц; А. Пуанкаре, А. Эйнштейн, Г. Минковский. Принцип относительности. Сборник. М., ОНТИ, 1935, стр. 20. (Д. И.).

В силу же уравнений (11) это соотношение эквивалентно условию

$$X' = Y' = Z' = 0.$$

Следовательно, условия равновесия электронов от преобразования не меняются.

К сожалению, столь простая гипотеза неприемлема. В самом деле, если мы предположим, что $\xi = \eta = \zeta = 0$, то в силу условий $X = Y = Z = 0$ получим

$$f = g = h = 0$$

и, следовательно,

$$\sum \frac{df}{dx} = 0, \quad \text{т. е. } \rho = 0.$$

К аналогичным результатам приходим и в наиболее общем случае.

Таким образом, кроме электромагнитных сил, необходимо допустить еще другие силы, например силы связи. Затем следует искать условия, которым должны удовлетворять эти силы или связи для того, чтобы равновесие электронов от преобразования не нарушалось. Это составит предмет одного из следующих параграфов.

§ 2. Принцип наименьшего действия

Известно, каким образом Лоренц получил свои уравнения, пользуясь принципом наименьшего действия. Однако я снова возвращаюсь к этому вопросу, хотя и не могу прибавить здесь ничего существенного к исследованию Лоренца; я предпочитаю представить его в несколько ином виде, более удобном для моей цели.

Я полагаю

$$J = \int dt d\tau \left[\frac{\sum f^2}{2} + \frac{\sum \alpha^2}{2} - \sum Fu \right], \quad (1)$$

где f , α , F , u и т. д. подчиняются условиям

$$\sum \frac{df}{dx} = \rho, \quad \alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \quad u = \frac{df}{dt} + \rho \xi \quad (2)$$

и другим, получающимся из соображений симметрии.

Что касается интеграла J , то он должен быть распространен:

- 1) относительно элемента объема $d\tau = dxdydz$ по всему пространству;
- 2) относительно времени t на интервал между пределами $t = t_0$, $t = t_1$.

Согласно принципу наименьшего действия, интеграл J должен быть минимумом, если различные входящие в него величины подчинить:

- 1) условиям (2);
- 2) условию, что состояние системы задается для двух предельных моментов $t = t_0$ и $t = t_1$.

Это последнее условие позволяет преобразовать наши интегралы при помощи интегрирования по частям.

В самом деле, если мы имеем интеграл вида

$$\int dt d\tau A \frac{d(B\delta C)}{dt},$$

где C — одна из величин, определяющих состояние системы, и δC — ее вариация, то, интегрируя его по частям относительно времени, получим

$$\int d\tau [AB\delta C]_{t=t_0}^{t=t_1} - \int dt d\tau \frac{dA}{dt} B\delta C.$$

Так как для двух предельных моментов времени состояние системы задано, то $\delta C=0$ при $t=t_0$, $t=t_1$; поэтому первый интеграл обращается в нуль и остается только второй.

Точно так же можно интегрировать по частям и относительно x , y или z .

В самом деле, имеем

$$\int A \frac{dB}{dx} dx dy dz dt = \int AB dy dz dt - \int B \frac{dA}{dx} dx dy dz dt.$$

Так как интегрирования распространяются здесь до бесконечности, то в первом интеграле правой части следует положить $x = \pm \infty$; поэтому, в силу того, что все наши функции предполагаются исчезающими в бесконечности, этот интеграл будет равен нулю, и мы получим

$$\int A \frac{dB}{dx} d\tau dt = - \int B \frac{dA}{dx} d\tau dt.$$

Если предположить, что на систему наложены связи, то к условиям, налагаемым на различные величины, входящие в интеграл J , следует присоединить еще условия связи.

Придадим сначала F , G , H приращения δF , δG , δH , откуда

$$\delta\alpha = \frac{d\delta H}{dy} - \frac{d\delta G}{dz}.$$

Имеем

$$\delta J = \int dt d\tau \left[\sum \alpha \left(\frac{d\delta H}{dy} - \frac{d\delta G}{dz} \right) - \sum u \delta F \right] = 0.$$

или, интегрируя по частям,

$$\begin{aligned} \delta J &= \int dt d\tau \left[\sum \left(\delta G \frac{dx}{dz} - \delta H \frac{dx}{dy} \right) - \sum u \delta F \right] = \\ &= - \int dt d\tau \sum \delta F \left(u - \frac{d\gamma}{dy} + \frac{d\beta}{dz} \right) = 0, \end{aligned}$$

откуда, приравнявая нулю коэффициент при δF , получим

$$u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}. \quad (3)$$

Интегрируя по частям это соотношение, найдем

$$\begin{aligned} \int \sum F u dt &= \int \sum F \left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) d\tau = \\ &= \int \sum \left(\beta \frac{dF}{dz} - \gamma \frac{dF}{dy} \right) d\tau = \int \sum \alpha \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) d\tau \end{aligned}$$

или

$$\int \sum F u d\tau = \int \sum \alpha^2 d\tau,$$

откуда, наконец,

$$J = \int dt d\tau \left(\frac{\sum f^2}{2} - \frac{\sum \alpha^2}{2} \right). \quad (4)$$

Отсюда, а также из соотношения (3) видно, что δJ не зависит от δF , а, следовательно, и от $\delta \alpha$; будем варьировать теперь другие переменные. Возвращаясь к выражению (1), получаем для J :

$$\delta J = \int dt d\tau (\sum f \delta f - \sum F \delta u).$$

Но f, g, h подчинены первому из условий (2), принимающему при этом вид

$$\sum \frac{d\delta f}{dx} = \delta \rho. \quad (5)$$

Поэтому можно написать

$$\delta J = \int dt d\tau \left[\sum f df - \sum F du - \psi \left(\sum \frac{d\delta f}{dx} - \delta \rho \right) \right]. \quad (6)$$

Согласно методам вариационного исчисления, вычисление следует производить так, как если бы ψ была произвольной функцией, а δJ — представлено выражением (6), и вариации не подчинялись бы более условиям (5).

С другой стороны, мы имеем

$$\delta u = \frac{d\delta f}{dt} + \delta \rho \xi,$$

откуда, интегрируя по частям, получаем

$$\delta J = \int dt d\tau \sum \delta f \left(f + \frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx} \right) + \int dt d\tau \left(\psi \delta \rho - \sum F \delta \rho \xi \right). \quad (7)$$

Если предположить сперва, что электроны не подвергаются вариациям, то $\delta \rho = \delta \rho \xi = 0$, и второй интеграл равен нулю.

Так как δJ должна обращаться в нуль, то

$$f + \frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx} = 0. \quad (8)$$

В общем случае будем иметь

$$\delta J = \int dt d\tau (\psi \delta \rho - \sum F \delta \rho \xi). \quad (9)$$

Остается определить силы, действующие на электроны. Для этого предположим, что к каждому элементу электрона приложена дополнительная сила $-X d\tau$, $-Y d\tau$, $-Z d\tau$. Напишем условие равновесия этой силы с электромагнитными силами. Пусть U , V , W будут составляющими перемещения элемента $d\tau$ электрона, причем перемещение отсчитывается от какого-нибудь начального положения. Пусть, далее, δU , δV , δW будут вариации этого перемещения; виртуальная работа, соответствующая дополнительной силе, равна

$$-\int \sum X \delta U d\tau,$$

так что условие равновесия напишется в виде

$$\delta J = - \int \sum X \delta U d\tau dt. \quad (10)$$

Необходимо теперь преобразовать δJ . Для этого попытаемся сначала найти уравнение непрерывности, выражающее неизменяемость заряда при вариации.

Пусть x_0 , y_0 , z_0 — начальное положение электрона. Положение его в данный момент будет

$$x = x_0 + U, \quad y = y_0 + V, \quad z = z_0 + W.$$

Введем, кроме того, вспомогательную переменную ϵ , при помощи которой будем варьировать наши различные функции, так что, например, для какой-нибудь функции A будем иметь

$$\delta A = \delta \epsilon \frac{dA}{d\epsilon}.$$

Действительно, мне необходима возможность перехода от обозначений вариационного исчисления к обозначениям обычного дифференциального исчисления, или обратно.

Наши функции можно рассматривать либо зависящими от пяти переменных x , y , z , t , ϵ , так что при изменении t и ϵ наблюдатель всегда остается на одном и том же месте, — в этом случае их производные будем обозначать обыкновенным d , либо зависящими от пяти переменных x_0 , y_0 , z_0 , t , ϵ , так что при изменении t и ϵ мы следуем всегда за одним и тем же электроном — в этом случае их производные будем обозначать круглым d .

Тогда будем иметь

$$\xi = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dU}{dt} + \xi \frac{dU}{dx} + \eta \frac{dU}{dy} + \zeta \frac{dU}{dz} = \frac{\partial x}{\partial t}. \quad (11)$$

Обозначим теперь через Δ функциональный определитель x, y, z относительно x_0, y_0, z_0 :

$$\Delta = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (x_0, y_0, z_0)}.$$

Сохраняя ϵ, x_0, y_0, z_0 постоянными, дадим t приращение ∂t ; тогда x, y, z получат приращения $\partial x, \partial y, \partial z$ и Δ — приращение $\partial \Delta$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \partial x &= \xi \partial t, \quad \partial y = \eta \partial t, \quad \partial z = \zeta \partial t, \\ \Delta + \partial \Delta &= \frac{\partial (x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z)}{\partial (x_0, y_0, z_0)}, \end{aligned}$$

откуда

$$1 + \frac{\partial \Delta}{\Delta} = \frac{\partial (x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z)}{\partial (x, y, z)} = \frac{\partial (x + \xi \partial t, y + \eta \partial t, z + \zeta \partial t)}{\partial (x, y, z)}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}. \quad (12)$$

Так как заряд каждого электрона остается **постоянным**, то

$$\frac{\partial \rho \Delta}{\partial t} = 0, \quad (13)$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \rho \frac{d\xi}{dx} &= 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dt} + \sum \xi \frac{d\rho}{dx}, \\ \frac{d\rho}{dt} + \sum \frac{d\rho \xi}{dx} &= 0. \end{aligned}$$

Таковы различные формы уравнения непрерывности в отношении переменной t . Аналогичные уравнения мы найдем и для переменной ϵ .

Пусть

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial \epsilon} \delta \epsilon, \quad \delta V = \frac{\partial V}{\partial \epsilon} \delta \epsilon, \quad \delta W = \frac{\partial W}{\partial \epsilon} \delta \epsilon;$$

следовательно,

$$\delta U = \frac{dU}{d\epsilon} \delta \epsilon + \delta U \frac{dU}{dx} + \delta V \frac{dU}{dy} + \delta W \frac{dU}{dz}, \quad (11')$$

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \epsilon} = \sum \frac{\partial U}{\partial \epsilon}, \quad \frac{\partial \rho \Delta}{\partial \epsilon} = 0, \quad (12')$$

$$\delta\epsilon \frac{\partial \rho}{\partial \epsilon} + \sum \rho \frac{d\delta U}{dx} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \epsilon} = \frac{d\rho}{d\epsilon} + \sum \frac{\delta U}{\delta \epsilon} \frac{d\rho}{dx},$$

$$\delta\rho + \sum \frac{d\rho \delta U}{dx} = 0. \quad (13')$$

Отметим различие между определением

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial t} \delta\epsilon$$

и

$$\delta\rho = \frac{d\rho}{d\epsilon} \delta\epsilon;$$

заметим, что именно первое определение более подходит к формуле (10).

Это первое определение позволит нам преобразовать первый член (9).

В самом деле, имеем

$$\int dt d\tau \psi \delta\rho = - \int dt d\tau \psi \sum \frac{d\rho \delta U}{dx},$$

или, интегрируя по частям,

$$\int dt d\tau \psi \delta\rho = \int dt d\tau \sum \rho \frac{d\psi}{dx} \delta U. \quad (14)$$

Попробуем теперь вычислить

$$\delta(\rho\xi) = \frac{d(\rho\xi)}{d\epsilon} \delta\epsilon.$$

Заметим, что $\rho\Delta$ может зависеть только от x_0, y_0, z_0 . Действительно, если рассматривать элемент электрона, начальное положение которого определяется прямоугольным параллелепипедом с ребрами dx_0, dy_0, dz_0 , то заряд этого элемента равен

$$\rho\Delta dx_0 dy_0 dz_0,$$

а так как этот заряд должен остаться постоянным, то

$$\frac{\partial \rho\Delta}{\partial t} = \frac{\partial \rho\Delta}{\partial \epsilon} = 0. \quad (15)$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial^2 \rho\Delta U}{\partial t \partial \epsilon} = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\rho\Delta \frac{\partial U}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho\Delta \frac{\partial U}{\partial \epsilon} \right). \quad (16)$$

Но в силу уравнения непрерывности имеем для какой угодно функции A :

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial A\Delta}{\partial t} = \frac{dA}{dt} + \sum \frac{dA\xi}{dx},$$

а также

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial A \Delta}{\partial \varepsilon} = \frac{dA}{d\varepsilon} + \sum \frac{dA}{dx} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\rho \Delta \frac{\partial U}{\partial t} \right) = \frac{d\rho}{d\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{d \left(\rho \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \right)}{dx} + \frac{d \left(\rho \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \right)}{dy} + \frac{d \left(\rho \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \right)}{dz}, \quad (17)$$

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \Delta \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \right) = \frac{d\rho}{dt} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} + \frac{d \left(\rho \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \right)}{dx} + \frac{d \left(\rho \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \right)}{dy} + \frac{d \left(\rho \frac{\partial W}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \right)}{dz}. \quad (17')$$

Вторые члены (17) и (17') должны быть одинаковы, поэтому, приняв во внимание, что

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \xi, \quad \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon = \delta U, \quad \frac{d\rho \xi}{d\varepsilon} \delta \varepsilon = \delta \rho \xi,$$

получаем

$$\delta \rho \xi + \frac{d(\rho \xi \delta U)}{dx} + \frac{d(\rho \xi \delta V)}{dy} + \frac{d(\rho \xi \delta W)}{dz} = \frac{d(\rho \delta U)}{dt} + \frac{d(\rho \xi \delta U)}{dx} + \frac{d(\rho \eta \delta U)}{dy} + \frac{d(\rho \zeta \delta U)}{dz}. \quad (18)$$

Преобразуем теперь вторую часть (9); имеем

$$\int dtd\tau \sum F \delta \rho \xi = \int dtd\tau \left[\sum F \frac{d(\rho \delta U)}{dt} + \sum F \frac{d(\rho \eta \delta U)}{dy} + \sum F \frac{d(\rho \zeta \delta U)}{dz} - \sum F \frac{d(\rho \xi \delta V)}{dy} - \sum F \frac{d(\rho \xi \delta W)}{dz} \right].$$

После интегрирования по частям правая часть примет вид

$$\int dtd\tau \left[- \sum \rho \delta U \frac{dF}{dt} - \sum \rho \eta \delta U \frac{dF}{dy} - \sum \rho \zeta \delta U \frac{dF}{dz} + \sum \rho \xi \delta V \frac{dF}{dy} + \sum \rho \xi \delta W \frac{dF}{dz} \right].$$

Заметим теперь, что

$$\sum \rho \xi \delta V \frac{dF}{dy} = \sum \rho \zeta \delta U \frac{dH}{dx},$$

$$\sum \rho \xi \delta W \frac{dF}{dz} = \sum \rho \eta \delta U \frac{dG}{dx}.$$

В самом деле, если в обоих членах этих соотношений развернуть суммы $\sum$, то они будут тождествами. Вспомнив же, что

$$\frac{dH}{dx} - \frac{dF}{dz} = -\beta, \quad \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} = \gamma,$$

получим

$$\int dt d\tau \left[- \sum \rho \delta U \frac{dF}{dt} + \sum \rho \gamma \eta \delta U - \sum \rho \beta \zeta \delta U \right].$$

Таким образом, окончательно

$$\delta J = \int dt d\tau \sum \rho \delta U \left(\frac{d\psi}{dx} + \frac{dF}{dt} + \beta \zeta - \gamma \eta \right) = \int dt d\tau \sum \rho \delta U (-f + \beta \zeta - \gamma \eta).$$

Приравнявая коэффициенты при δU в последнем выражении и в (10), получим

$$X = \rho f - \rho (\beta \zeta - \gamma \eta);$$

а это и есть не что иное, как уравнение (2) предыдущего параграфа.

§ 3. Преобразование Лоренца и принцип наименьшего действия

Посмотрим, не указывает ли принцип наименьшего действия на причину успеха преобразований Лоренца. Для этого прежде всего нужно знать, как изменится в результате этого преобразования интеграл (формула (4) § 2):

$$J = \int dt d\tau \left(\frac{\sum f^2}{2} - \frac{\sum \alpha^2}{2} \right).$$

Мы находим сначала, что

$$dt' d\tau' = l^4 dt d\tau,$$

ибо x', y', z', t' связаны с x, y, z, t линейными соотношениями, определитель которых равен l^4 .

Затем получаем

$$\begin{aligned} l^4 \sum f'^2 &= f^2 + k^2 (g^2 + h^2) + k^2 \varepsilon^2 (\beta^2 + \gamma^2) + 2k^2 \varepsilon (g\gamma - h\beta), \\ l^4 \sum \alpha'^2 &= \alpha^2 + k^2 (\beta^2 + \gamma^2) + k^2 \varepsilon^2 (g^2 + h^2) + 2k^2 \varepsilon (g\gamma - h\beta) \end{aligned} \quad (1)$$

(формулы (9) § 1), откуда

$$l^4 (\sum f'^2 - \sum \alpha'^2) = \sum f^2 - \sum \alpha^2.$$

Таким образом, полагая

$$J' = \int dt' d\tau' \left(\frac{\sum f'^2}{2} - \frac{\sum \alpha'^2}{2} \right),$$

получим

$$J' = J.$$

Однако для того, чтобы это равенство имело силу, необходимо, чтобы пределы интегрирования в обоих случаях были одни и те же. До сих пор

мы принимали, что t изменяется от t_0 до t_1 и x, y, z от $-\infty$ до $+\infty$. В результате преобразования Лоренца эти пределы интегрирования будут изменены; однако ничто не мешает нам положить $t_0 = -\infty$ и $t_1 = +\infty$; при этих условиях пределы для J и J' останутся те же.

Сравним теперь два следующих выражения, аналогичных (10) § 2:

$$\begin{aligned}\delta J &= - \int \sum X \delta U d\tau dt, \\ \delta J' &= - \int \sum X' \delta U' d\tau' dt'.\end{aligned}\tag{2}$$

Для этого сравним сначала $\delta U'$ и δU . Будем рассматривать электрон, начальные координаты которого равны x_0, y_0, z_0 ; тогда в момент t

$$x = x_0 + U, \quad y = y_0 + V, \quad z = z_0 + W.$$

Рассматривая электрон соответственно после преобразования Лоренца, будем иметь

$$x' = kl(x + \epsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz,$$

где

$$x' = x_0 + U', \quad y' = y_0 + V', \quad z' = z_0 + W',$$

но эти координаты будут достигнуты только в момент

$$t' = kl(t + \epsilon x).$$

Если мы подвергнем наши переменные вариациям $\delta U, \delta V, \delta W$ и одновременно дадим t приращение δt , то координаты x, y, z получат полное приращение:

$$\delta x = \delta U + \xi \delta t, \quad \delta y = \delta V + \eta \delta t, \quad \delta z = \delta W + \zeta \delta t.$$

Аналогично будет

$$\delta x' = \delta U' + \xi' \delta t', \quad \delta y' = \delta V' + \eta' \delta t', \quad \delta z' = \delta W' + \zeta' \delta t'.$$

В силу преобразования Лоренца,

$$\delta x' = kl(\delta x + \epsilon \delta t), \quad \delta y' = l \delta y, \quad \delta z' = l \delta z, \quad \delta t' = kl(\delta t + \epsilon \delta x),$$

откуда, полагая $\delta t = 0$, получим соотношения

$$\delta x' = \delta U' + \xi' \delta t' = kl \delta U,$$

$$\delta y' = \delta V' + \eta' \delta t' = l \delta V,$$

$$\delta t' = kl \epsilon \delta U.$$

Заметим, что

$$\xi' = \frac{\xi + \epsilon}{1 + \xi \epsilon}, \quad \eta' = \frac{\eta}{k(1 + \xi \epsilon)};$$

поэтому, заменяя $\delta t'$ его значением, будем иметь

$$kl(1 + \xi \epsilon) \delta U = \delta U' (1 + \xi \epsilon) + (\xi + \epsilon) kl \epsilon \delta U,$$

$$l(1 + \xi \epsilon) \delta V = \delta V' (1 + \xi \epsilon) + \eta l \epsilon \delta U.$$

Вспоминая определение k , получим отсюда

$$\delta U = \frac{k}{l} \delta U' + \frac{k\epsilon}{l} \xi \delta U',$$

$$\delta V = \frac{1}{l} \delta V' + \frac{k\epsilon}{l} \eta \delta U',$$

а также

$$\delta W = \frac{1}{l} \delta W' + \frac{k\epsilon}{l} \zeta \delta U',$$

откуда

$$\sum X \delta U = \frac{1}{l} (kX \delta U' + Y \delta V' + Z \delta W') + \frac{k\epsilon}{l} \delta U' \sum X \xi. \quad (3)$$

В силу же уравнений (2) будет

$$\int \sum X' \delta U' dt' d\tau' = \int \sum X \delta U dt d\tau = \frac{1}{l^4} \int \sum X \delta U dt' d\tau'.$$

Заменяя $\sum X \delta U$ на его значение (3), получим

$$X' = \frac{k}{l^5} X + \frac{k\epsilon}{l^5} \sum X \xi, \quad Y' = \frac{1}{l^5} Y, \quad Z' = \frac{1}{l^5} Z,$$

т. е. уравнения (11) § 1.

Таким образом, принцип наименьшего действия привел нас к тому же результату, что и исследование § 1.

Обращаясь к формулам (1), мы видим, что в результате преобразования Лоренца выражение

$$\sum f^2 - \sum \alpha^2,$$

за исключением постоянного множителя, осталось неизменным; этого нельзя сказать о выражении

$$\sum f^2 + \sum \alpha^2,$$

входящем в энергию. Ограничиваясь случаем достаточно малого ϵ для того, чтобы можно было пренебречь его квадратом, т. е. считая $k=1$ и полагая также $l=1$, мы находим

$$\sum f'^2 = \sum f^2 + 2\epsilon (g\gamma - h\beta),$$

$$\sum \alpha'^2 = \sum \alpha^2 + 2\epsilon (g\gamma - h\beta)$$

или, складывая,

$$\sum f'^2 + \sum \alpha'^2 = \sum f^2 + \sum \alpha^2 + 4\epsilon (g\gamma - h\beta).$$

§ 4. Группа Лоренца

Важно отметить, что преобразования Лоренца образуют группу. В самом деле, полагая

$$x' = kl(x + \varepsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz, \\ t' = kl(t + \varepsilon x),$$

и, с другой стороны,

$$x'' = k'l'(x' + \varepsilon' t'), \quad y'' = l'y', \quad z'' = l'z', \\ t'' = k'l'(t' + \varepsilon' x'),$$

где

$$k^{-2} = 1 - \varepsilon^2, \quad k'^{-2} = 1 - \varepsilon'^2,$$

получаем

$$x'' = k''l''(x + \varepsilon'' t), \quad y'' = l''y, \quad z'' = l''z, \\ t'' = k''l''(t + \varepsilon'' x),$$

где

$$\varepsilon'' = \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{1 + \varepsilon\varepsilon'}, \quad l'' = ll',$$

$$k'' = kk'(1 + \varepsilon\varepsilon') = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon''^2}}.$$

Если мы придадим l значение 1, считая ε бесконечно малым, т. е. положив

$$x' = x + \delta x, \quad y' = y + \delta y, \quad z' = z + \delta z, \quad t' = t + \delta t,$$

то получим

$$\delta x = \varepsilon t, \quad \delta y = \delta z = 0, \quad \delta t = \varepsilon x.$$

Это и есть то бесконечно малое преобразование группы, которое я назову преобразованием T и которое, согласно Ли, можно представить в виде

$$t \frac{d\varphi}{dx} + x \frac{d\varphi}{dt} = T_1.$$

Напротив, полагая $\varepsilon = 0$ и $l = 1 + \delta l$, мы найдем

$$\delta x = x\delta l, \quad \delta y = y\delta l, \quad \delta z = z\delta l, \quad \delta t = t\delta l$$

и получим другое бесконечно малое преобразование T_0 группы (рассматривая l и ε как независимые переменные), которое в обозначениях Ли можно представить в виде

$$T_0 = x \frac{d\varphi}{dx} + y \frac{d\varphi}{dy} + z \frac{d\varphi}{dz} + t \frac{d\varphi}{dt}.$$

Придавая особенную роль, которую до сих пор играла ось x , осям y и z , получаем таким образом два других бесконечно малых преобразования

$$T_2 = t \frac{d\varphi}{dy} + y \frac{d\varphi}{dt},$$

$$T_3 = t \frac{d\varphi}{dz} + z \frac{d\varphi}{dt},$$

которые тоже не изменяют уравнений Лоренца.

Можно образовать различные комбинации, введенные Ли, например:

$$[T_1, T_2] = x \frac{d\varphi}{dy} - y \frac{d\varphi}{dx}.$$

Легко, однако, видеть, что это последнее преобразование эквивалентно преобразованию осей координат, когда они поворачиваются на весьма малый угол вокруг оси z . Мы не должны поэтому удивляться, если подобное преобразование не изменяет формы уравнений Лоренца, очевидно, не зависящих от выбора осей.

Итак, мы приходим к необходимости рассмотреть непрерывную группу, которую мы назовем *группой Лоренца* и которая допускает следующие бесконечно малые преобразования:

- 1) преобразование T_0 , которое будет переставимо со всеми остальными;
- 2) три преобразования T_1, T_2, T_3 ;
- 3) три вращения $[T_1, T_2], [T_2, T_3], [T_3, T_1]$.

Любое из преобразований этой группы можно разложить на преобразование вида

$$x' = lx, \quad y' = ly, \quad z' = lz, \quad t' = lt$$

и линейное преобразование, не изменяющее квадратичной формы

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2.$$

Мы можем также образовать нашу группу несколько иным способом. Каждое преобразование группы можно рассматривать как преобразование вида

$$x' = kl(x + \varepsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz, \quad t' = kl(t + \varepsilon x), \quad (1)$$

которому предшествует и за которым следует соответствующий поворот.

Однако для нашей цели достаточно рассмотреть только часть преобразований этой группы; будем считать, что l есть функция от ε , и выберем эту функцию так, чтобы та часть группы, которую я обозначу через P , все еще образовывала группу.

Вращая систему на 180° вокруг оси y , мы получим преобразование, которое опять должно принадлежать к P . Так как это приводит к изменению знака x, x', z , и z' , то мы находим

$$x' = kl(x - \varepsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz, \quad t' = kl(t - \varepsilon x). \quad (2)$$

Следовательно, от перемены знака ε , l не меняется. С другой стороны, если P есть группа, то подстановка, обратная (1), которую можно представить в виде

$$x' = \frac{k}{l}(x - \varepsilon t), \quad y' = \frac{y}{l}, \quad z' = \frac{z}{l}, \quad t' = \frac{k}{l}(t - \varepsilon x), \quad (3)$$

также должна принадлежать к P ; она должна быть таким образом тождественной (2), т. е.

$$l = \frac{1}{l}.$$

Следовательно, $l=1$.

§ 5. Волны Ланжевена

Формулы, определяющие электромагнитное поле, обусловленное движением одного электрона, были представлены Ланжевенем в особенно изящной форме.

Рассмотрим снова уравнения

$$\square \psi = -\rho, \quad \square F = -\rho \xi. \quad (1)$$

Известно, что решения их можно получить при помощи запаздывающих потенциалов

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho_1 d\tau_1}{r}, \quad F = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho_1 \xi_1 d\tau_1}{r}. \quad (2)$$

В этих формулах

$$d\tau_1 = dx_1 dy_1 dz_1, \quad r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

тогда как ρ_1 и ξ_1 — значения ρ и ξ в точке x_1, y_1, z_1 и в момент $t_1 = t - r$.

Пусть x_0, y_0, z_0 — координаты элемента электрона в момент t_0 ; тогда

$$x_1 = x_0 + U, \quad y_1 = y_0 + V, \quad z_1 = z_0 + W$$

будут его координатами в момент t_1 .

U, V, W — функции x_0, y_0, z_0, t_1 , поэтому мы можем написать

$$dx_1 = dx_0 + \frac{dU}{dx_0} dx_0 + \frac{dU}{dy_0} dy_0 + \frac{dU}{dz_0} dz_0 + \xi_1 dt_1$$

и, если считать t , а также x, y и z постоянными, то

$$dt_1 = + \sum \frac{x - x_1}{r} dx_1.$$

Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} dx_1 \left(1 + \xi_1 \frac{x_1 - x}{r} \right) + dy_1 \xi_1 \frac{y_1 - y}{r} + dz_1 \xi_1 \frac{z_1 - z}{r} = \\ = dx_0 \left(1 + \frac{dU}{dx_0} \right) + dy_0 \frac{dU}{dy_0} + dz_0 \frac{dU}{dz_0} \end{aligned}$$

и еще два других уравнения, возникающих от круговой перестановки.

Таким образом, полагая $d\tau_0 = dx_0 dy_0 dz_0$, будем иметь

$$d\tau_1 \left| 1 + \xi_1 \frac{x_1 - x}{r}, \quad \xi_1 \frac{y_1 - y}{r}, \quad \xi_1 \frac{z_1 - z}{r} \right| = d\tau_0 \left| 1 + \frac{dU}{dx_0}, \frac{dU}{dy_0}, \frac{dU}{dz_0} \right|. \quad (3)$$

Исследуем определители, стоящие в обеих частях (3), и прежде всего первый из них; разложив его, мы увидим, что члены 2-й и 3-й степени относительно ξ_1, η_1, ζ_1 обращаются в нуль, и определитель равен:

$$1 + \xi_1 \frac{x_1 - x}{r} + \eta_1 \frac{y_1 - y}{r} + \zeta_1 \frac{z_1 - z}{r} = 1 + \omega,$$

где ω — радиальная составляющая скорости ξ_1, η_1, ζ_1 , т. е. составляющая, направленная по радиусу-вектору, соединяющему точки x, y, z и x_1, y_1, z_1 .

Для того чтобы получить второй определитель, найдем координаты различных элементов электрона в момент t' , одинаковый для всех элементов*, однако такой, чтобы для наблюдаемого элемента $t_1 = t'_1$. Тогда координаты элементов представятся в виде

$$x'_1 = x_0 + U', \quad y'_1 = y_0 + V', \quad z'_1 = z_0 + W',$$

где U', V', W' получаются из U, V, W заменой t_1 на t'_1 .

Так как t'_1 одно и то же для всех элементов, то

$$dx'_1 = dx_0 \left(1 + \frac{dU'}{dx_0} \right) + dy_0 \frac{dU'}{dy_0} + dz_0 \frac{dU'}{dz_0}$$

и, следовательно,

$$d\tau'_1 = d\tau_0 \left| 1 + \frac{dU'}{dx_0}, \frac{dU'}{dy_0}, \frac{dU'}{dz_0} \right|,$$

где

$$d\tau'_1 = dx'_1 dy'_1 dz'_1.$$

Но элемент электрического заряда равен

$$d\rho_1 = \rho_1 d\tau'_1,$$

и сверх того для наблюдаемого элемента электрона $t_1 = t'_1$, а поэтому

$$\frac{dU'}{dx_0} = \frac{dU}{dx_0},$$

и т. д.

Мы можем, следовательно, написать

$$d\rho_1 = \rho_1 d\tau_0 \left| 1 + \frac{dU}{dx_0}, \frac{dU}{dy_0}, \frac{dU}{dz_0} \right|,$$

* Пуанкаре пишет здесь: «молекулы электрона». (Д. И.).

так что уравнения (3) и (2) переписутся в виде

$$\begin{aligned} \rho_1 d\tau_1 (1 + \omega) &= d\mu_1, \\ \psi &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\mu_1}{r(1 + \omega)}, \quad F = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\xi_1 d\mu_1}{r(1 + \omega)}. \end{aligned} \quad (3')$$

Когда мы имеем дело только с одним электроном, то наши интегралы сведутся к одному члену, если рассматривать только точки x, y, z , достаточно удаленные для того, чтобы r и ω имели тогда одно и то же значение для всех точек электрона. Потенциалы ψ, F, G, H зависят от положения этого электрона, а также от его скорости, ибо не только ξ_1, η_1, ζ_1 входят в числители выражений F, G, H , но в их знаменатели входит также и радиальная составляющая ω . Разумеется, речь идет о положении и скорости электрона в момент t_1 .

Частные производные от ψ, F, G, H по t, x, y, z (а, следовательно, электрическое и магнитное поля) будут зависеть, кроме того, и от его ускорения; притом эта зависимость будет *линейной*, так как ускорение войдет в производные только от одного дифференцирования.

Ланжевэн пришел таким образом к необходимости различать в электрическом и магнитном поле члены, не зависящие от ускорения (то, что он называет волной скорости), и члены, пропорциональные ускорению (волна ускорения).

Вычисление этих двух волн сильно упрощается благодаря преобразованию Лоренца. В самом деле, мы можем применить это преобразование к системе таким образом, чтобы скорость рассматриваемого электрона сделалась равной нулю. Выберем для оси x направление этой скорости до преобразования, так что в момент t_1

$$\eta_1 = \zeta_1 = 0,$$

и положим $\epsilon = -\xi_1$, так что

$$\xi'_1 = \eta'_1 = \zeta'_1 = 0.$$

Мы можем таким образом свести вычисление двух волн к случаю, когда скорость электрона равна нулю. Начнем с волны скорости. Прежде всего заметим, что эта волна будет такой же, как и при равномерном движении электрона.

Если скорость электрона равна нулю, то

$$\omega = 0, \quad F = G = H = 0, \quad \psi = \frac{\mu_1}{4\pi r},$$

где μ — заряд электрона.

Так как скорость электрона сведена к нулю в результате преобразования Лоренца, то

$$F' = G' = H' = 0, \quad \psi' = \frac{\mu_1}{4\pi r'},$$

где r' — расстояние между точками x', y', z' и x'_1, y'_1, z'_1 и, следовательно:

$$\begin{aligned}\alpha' &= \beta' = \gamma' = 0, \\ f' &= \frac{\mu_1 (x' - x'_1)}{4\pi r'^3}, \quad g' = \frac{\mu_1 (y' - y'_1)}{4\pi r'^3}, \\ h' &= \frac{\mu_1 (z' - z'_1)}{4\pi r'^3}.\end{aligned}$$

Для нахождения истинного поля, соответствующего скорости — $\varepsilon, 0, 0$, применим теперь преобразование, обратное преобразованию Лоренца. Обращаясь к уравнениям (9) и (3) § 1, находим

$$\begin{aligned}\alpha &= 0, \quad \beta = \varepsilon h, \quad \gamma = -\varepsilon g, \\ f &= \frac{\mu_1 k l^3}{4\pi r'^3} (x + \varepsilon t - x_1 - \varepsilon t_1), \\ g &= \frac{\mu_1 k l^3}{4\pi r'^3} (y - y_1), \quad h = \frac{\mu_1 k l^3}{4\pi r'^3} (z - z_1).\end{aligned}\tag{4}$$

Легко видеть, что магнитное поле перпендикулярно к оси x (направлению скорости) и к электрическому полю, причем последнее направлено к точке

$$x_1 + \varepsilon (t_1 - t), \quad y_1, \quad z_1.\tag{5}$$

Если бы электрон продолжал двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью, которую он имел в момент t_1 , т. е. со скоростью — $\varepsilon, 0, 0$, то этой точки (5) он достиг бы в момент t .

Перейдем теперь к волне ускорения; благодаря преобразованию Лоренца мы можем свести ее определение к случаю, когда скорость равна нулю. Этот случай может быть осуществлен, если представить, что электрон совершает очень быстрые колебания весьма малой амплитуды, при этом перемещения и скорости будут бесконечно малыми, а ускорения — конечными. Таким образом, мы приходим к случаю, изученному уже Герцем в его знаменитом мемуаре «Die Kräfte elektrischer Schwingungen nach der Maxwell'schen Theorie» (Силы электрических колебаний по теории Максвелла), для очень удаленной точки. При этих условиях электрическое и магнитное поля будут:

- 1) равны друг другу;
- 2) взаимно перпендикулярны и
- 3) перпендикулярны к нормали волновой сферы, т. е. сферы с центром в точке x_1, y_1, z_1 .

Я утверждаю, что эти три свойства будут иметь место также и тогда, когда скорость не будет равна нулю. Для этого мне достаточно показать, что они не изменяются от преобразования Лоренца.

В самом деле, пусть A есть общее напряжение обоих полей и пусть

$$(x - x_1) = r\lambda, \quad (y - y_1) = r\mu, \quad (z - z_1) = r\nu, \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Указанные свойства выражаются равенствами

$$A^2 = \sum f^2 = \sum \alpha^2, \quad \sum f\alpha = 0, \\ \sum f(x - x_1) = 0 \quad \sum \alpha(x - x_1) = 0, \\ \sum f\lambda = 0, \quad \sum \alpha\lambda = 0,$$

причем

$$\frac{f}{A}, \quad \frac{g}{A}, \quad \frac{h}{A}, \\ \frac{\alpha}{A}, \quad \frac{\beta}{A}, \quad \frac{\gamma}{A}, \\ \lambda, \quad \mu, \quad \nu$$

будут направляющими косинусами трех перпендикулярных направлений.

Отсюда получаем соотношения

$$f = \beta\nu - \gamma\mu, \quad \alpha = h\mu - g\nu,$$

или

$$fr = \beta(z - z_1) - \gamma(y - y_1), \\ \alpha r = h(y - y_1) - g(z - z_1), \quad (6)$$

а также и другие уравнения, выводимые по симметрии.

Обращаясь к уравнениям (3) § 1, мы найдем

$$x' - x'_1 = kl[(x - x_1) + \varepsilon(t - t_1)] = kl[(x - x_1) + \varepsilon r], \\ y' - y'_1 = l(y - y_1), \\ z' - z'_1 = l(z - z_1). \quad (7)$$

Мы нашли выше в § 3:

$$l^4(\sum f'^2 - \sum \alpha'^2) = \sum f^2 - \sum \alpha^2.$$

Следовательно, равенство $\sum f^2 = \sum \alpha^2$ влечет за собой $\sum f'^2 = \sum \alpha'^2$. С другой стороны, исходя из уравнений (9) § 1, получаем соотношение

$$l^4 \sum f'\alpha' = \sum f\alpha,$$

которое показывает, что если $\sum f\alpha = 0$, то $\sum f'\alpha' = 0$.

Я утверждаю теперь, что

$$\sum f'(x' - x'_1) = 0, \quad \sum \alpha'(x' - x'_1) = 0. \quad (8)$$

В самом деле, в силу (7), а также (9) § 1, левые части обоих уравнений (8) переписутся соответственно в виде

$$\frac{k}{l} \sum f(x - x_1) + \frac{k\varepsilon}{l} [fr + \gamma(y - y_1) - \beta(z - z_1)],$$

$$\frac{k}{l} \sum \alpha(x - x_1) + \frac{k\varepsilon}{l} [\alpha r - h(y - y_1) + g(z - z_1)],$$

но, согласно уравнениям

$$\sum f(x - x_1) = \sum \alpha(x - x_1) = 0,$$

а также уравнению (6), они обращаются в нуль, что как раз и нужно было показать.

Впрочем, к этому же результату можно прийти, исходя из простых соображений однородности.

В самом деле, ψ , F , G , H — однородные функции от

$$x - x_1, \quad y - y_1, \quad z - z_1, \quad \xi_1 = \frac{dx_1}{dt_1},$$

$$\eta_1 = \frac{dy_1}{dt_1}, \quad \zeta_1 = \frac{dz_1}{dt_1}$$

степени — 1 относительно x , y , z , t , x_1 , y_1 , z_1 , t_1 и их дифференциалов.

Таким образом, производные ψ , F , G , H по x , y , z , t (а следовательно, оба поля f , g , h и α , β , γ) будут однородными функциями степени — 2 относительно тех же величин, если мы вспомним при этом, что соотношение

$$t - t_1 = r = \sqrt{\sum (x - x_1)^2}$$

однородно относительно этих величин.

Но эти производные или поля зависят от $x - x_1$, скоростей dx_1/dt_1 и ускорений d^2x_1/dt_1^2 ; они составлены из члена, не зависящего от ускорений (волна скорости), и члена, линейного относительно ускорений (волна ускорений). Производная dx_1/dt_1 есть однородная функция степени 0, а d^2x_1/dt_1^2 — степени — 1, откуда следует, что волна скорости есть однородная функция степени — 2 относительно $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$, а волна ускорения — однородная функция степени — 1. Таким образом, в весьма удаленной точке преобладает волна ускорения, которую можно рассматривать, следовательно, как полную волну.

Кроме того, закон однородности показывает нам, что волна ускорения в произвольной точке подобна самой себе в удаленной точке и, следовательно, подобна полной волне в удаленной точке. Но так как в удаленной точке возмущение может распространяться только в виде плоских волн, то оба поля должны быть равны друг другу, взаимно перпендикулярны и перпендикулярны к направлению распространения.

Я ограничусь этими соображениями, отсылая интересующихся деталями к мемуару Ланжевена (Journal de Physique, 1905).

§ 6. Сокращение электронов

Представим себе электрон, находящийся в равномерном и прямолинейном поступательном движении. Согласно указанному выше, можно, при помощи преобразования Лоренца, свести изучение поля, обусловленного этим электроном, к случаю неподвижного электрона; таким образом, преобразование Лоренца заменяет реальный движущийся электрон некоторым воображаемым неподвижным электроном.

Пусть $\alpha, \beta, \gamma; f, g, h$ — реальное поле и $\alpha', \beta', \gamma'; f', g', h'$ — поле, получающееся после преобразования Лоренца, т. е. соответствующее неподвижному электрону.

Тогда имеем

$$\begin{aligned}\alpha' &= \beta' = \gamma' = 0, \\ f' &= -\frac{d\psi'}{dx'}, \\ g' &= -\frac{d\psi'}{dy'}, \quad h' = -\frac{d\psi'}{dz'},\end{aligned}$$

и для реального поля (согласно формулам (9) §1)

$$\begin{aligned}\alpha &= 0, \quad \beta = \varepsilon h, \quad \gamma = -\varepsilon g, \\ f &= l^2 f', \quad g = kl^2 g', \quad h = kl^2 h'.\end{aligned}\tag{1}$$

Определим сейчас полную энергию движения электрона, а также соответствующее действие и электромагнитное количество движения, чтобы затем перейти к вычислению электромагнитных масс электрона. Для удаленной точки достаточно рассматривать электрон в виде одной точки; таким образом можно свести все вычисление к формулам (4) предыдущего параграфа, которые, вообще говоря, окажутся пригодными. Однако здесь они будут недостаточны, так как энергия локализуется главным образом в наиболее близких к электрону частях эфира.

Относительно этого пункта можно высказать несколько гипотез.

Согласно Абрагаму, электроны представляются сферическими и недеформируемыми.

Тогда, применяя преобразование Лоренца, мы видим, что если реальный электрон был сферическим, то воображаемый становится эллипсоидальным. Уравнение эллипсоида, согласно § 1, имеет вид

$$k^2(x' - \varepsilon t' - \xi t' + \varepsilon \xi x')^2 + (y' - \eta k t' + \eta k \varepsilon x')^2 + (z' - \zeta k t' + \zeta k \varepsilon x')^2 = l^2 r^2.$$

Но в данном случае

$$\xi + \varepsilon = \eta = \zeta = 0, \quad 1 + \varepsilon \xi = 1 - \varepsilon^2 = \frac{1}{k^2},$$

так что уравнение эллипсоида принимает следующий вид:

$$\frac{x'^2}{k^2} + y'^2 + z'^2 = l^2 r^2.$$

Если радиус реального электрона есть r , то полуоси воображаемого электрона равны klr , lr , lr .

Напротив, по гипотезе Лоренца электроны при движении деформируются таким образом, что реальный электрон становится эллипсоидом, в то время как воображаемый покоящийся электрон всегда представляется шаром радиуса r ; тогда полуоси реального электрона равны

$$\frac{r}{lk}, \quad \frac{r}{l}, \quad \frac{r}{l}.$$

Назовем выражения

$$A = \frac{1}{2} \int f^2 d\tau$$

продольной электрической энергией,

$$B = \frac{1}{2} \int (g^2 + h^2) d\tau$$

поперечной электрической энергией и

$$C = \frac{1}{2} \int (\beta^2 + \gamma^2) d\tau$$

поперечной магнитной энергией.]

Продольной магнитной энергии не существует, так как $\alpha = \alpha' = 0$. Обозначим через A' , B' , C' соответствующие величины в преобразованной системе.

Прежде всего находим

$$C' = 0, \quad C = \varepsilon^2 B.$$

С другой стороны, замечая, что реальное поле зависит только от $x + \varepsilon t$, y , z , мы можем написать

$$d\tau = d(x + \varepsilon t) dx dz,$$

$$d\tau' = dx' dy' dz' = kl^3 d\tau,$$

откуда

$$A' = kl^{-1} A, \quad B' = k^{-1} l^{-1} B,$$

$$A = lk^{-1} A', \quad B = kl B'.$$

В гипотезе Лоренца $B' = 2A'$, где A' — постоянная, обратно пропорциональная радиусу электрона и не зависящая от скорости реального электрона.

Таким образом, для полной энергии получаем

$$A + B + C = A' lk (3 + \varepsilon^2),$$

и для действия (в единицу времени)

$$A + B - C = 3 \frac{A' l}{k}.$$

Далее, для электромагнитного количества движения находим

$$D = \int (g\gamma - h\beta) d\tau = -\varepsilon \int (g^2 + h^2) d\tau = -2\varepsilon B = -4\varepsilon k l A'.$$

Но между энергией $E = A + B + C$, действием $H = A + B - C$ и количеством движения D должны существовать некоторые соотношения.

Первое из них имеет вид

$$E = H - \varepsilon \frac{dH}{d\varepsilon},$$

а второе

$$\frac{dD}{d\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{dE}{d\varepsilon},$$

откуда

$$D = \frac{dH}{d\varepsilon}, \quad E = H - \varepsilon D. \quad (2)$$

Второе из уравнений (2) удовлетворяется всегда, первое же только в том случае, если

$$l = (1 - \varepsilon^2)^{1/6} = k^{-1/3},$$

т. е. если объем воображаемого электрона равен объему действительного электрона или иначе, если объем электрона постоянен. В этом состоит гипотеза Ланжевена.

Это находится в противоречии с результатом § 4 и с результатом, полученным иным путем Лоренцом. Займемся выяснением этого противоречия.

Но прежде чем приступить к этому выяснению, заметим, что какую бы гипотезу мы ни приняли, мы всегда будем иметь

$$H = A + B - C = \frac{l}{k} (A' + B'),$$

или, так как $C' = 0$,

$$H = \frac{l}{k} H'. \quad (3)$$

Этот результат можно сопоставить с уравнением $J = J'$, полученным в § 3. В самом деле, мы имеем

$$J = \int H dt, \quad J' = \int H' dt'.$$

Замечая, что состояние системы зависит только от $x + \varepsilon t$, y , z , т. е. от x' , y' , z' , получим

$$\begin{aligned} t' &= \frac{l}{k} t + \varepsilon x', \\ dt' &= \frac{l}{k} dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Сопоставляя уравнения (3) и (4), находим, что

$$J = J'.$$

Примем какую-нибудь гипотезу, будь это гипотеза Лоренца, Абрагама, Ланжевена или какая-нибудь промежуточная гипотеза.

Пусть r , θr , θr будут три полуоси реального электрона; для воображаемого электрона они превратятся в

$$klr, \quad \theta lr, \quad \theta lr.$$

Тогда $A' + B'$ будет электростатической энергией эллипсоида с осями klr , θlr , θlr .

Если предположить, что электричество распределено на поверхности электрона как на проводнике, или равномерно распределено внутри этого электрона, то энергия примет вид

$$A' + B' = \frac{\varphi\left(\frac{\theta}{k}\right)}{klr},$$

где φ считается известной функцией.

Гипотеза Абрагама состоит в предположении

$$r = \text{const}, \quad \theta = 1.$$

Согласно же Лоренцу,

$$l = 1, \quad kr = \text{const}, \quad \theta = k.$$

Наконец, согласно Ланжевону,

$$l = k^{-1/3}, \quad k = \theta, \quad klr = \text{const}.$$

Далее находим

$$H = \frac{\varphi\left(\frac{\theta}{k}\right)}{k^2 r}.$$

Абрагам в иных обозначениях получает (Göttingen Nachrichten, 1902, стр. 37):

$$H = \frac{a}{r} \frac{1 - \epsilon^2}{\epsilon} \log \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon},$$

где a — постоянная. Но по гипотезе Абрагама $\theta = 1$; поэтому получаем следующее уравнение, определяющее функцию φ :

$$\varphi\left(\frac{1}{k}\right) = ak^2 \frac{1 - \epsilon^2}{\epsilon} \log \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} = \frac{a}{\epsilon} \log \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}. \quad (5)$$

Установив это, представим себе, что электрон подвержен такой связи, что между r и θ существует некоторое соотношение; по гипотезе Лоренца это соотношение имело бы вид $\theta r = \text{const}$, а по Ланжевону $\theta^2 r^3 = \text{const}$.

Допустим более общую зависимость

$$r = b\theta^m,$$

где b — постоянная.

Отсюда

$$H = \frac{1}{bk^2} \theta^{-m} \varphi\left(\frac{\theta}{k}\right).$$

Какую форму примет электрон при скорости, равной ϵ , если предположить, что кроме сил связи на него не действуют никакие силы?

Эта форма определяется равенством

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0, \quad (6)$$

или

$$-m\theta^{-m-1}\varphi + \theta^{-m}k^{-1}\varphi' = 0,$$

или

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{mk}{\theta}.$$

Если мы желаем, чтобы имело место такое равновесие, при котором $\theta=k$, необходимо, чтобы при $\theta/k=1$ логарифмическая производная φ была равна m .

Разлагая $\varphi(1/k)$ и правую часть (5) в ряд по степеням ϵ и пренебрегая высшими степенями ϵ , получим

$$\varphi\left(1 - \frac{\epsilon^2}{2}\right) = a\left(1 + \frac{\epsilon^2}{3}\right).$$

Дифференцируя, будем иметь

$$-\epsilon\varphi'\left(1 - \frac{\epsilon^2}{2}\right) = \frac{2}{3}\epsilon a.$$

Для $\epsilon=0$, т. е. когда аргумент φ равен 1, эти уравнения принимают вид

$$\varphi = a, \quad \varphi' = -\frac{2}{3}a, \quad \frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{2}{3}. \quad (7)$$

Итак, в согласии с гипотезой Ланжевена, должно иметь место $m = -2/3$.

Этот результат должен быть согласован с соответствующим выводом первого уравнения (2), от которого он в сущности не отличается. В самом деле, предположим, что на каждый элемент $d\tau$ электрона действует сила $X d\tau$, параллельная оси x , причем X одно и то же для всех элементов.

Тогда, по определению количества движения, будем иметь

$$\frac{dD}{dt} = \int X d\tau.$$

С другой стороны, принцип наименьшего действия дает нам

$$\delta J = \int X \delta U d\tau dt, \quad J = \int H dt, \quad \delta J = \int D \delta U dt,$$

где δU — перемещение центра тяжести электрона; H зависит от θ и ϵ , если r и θ связаны друг с другом уравнением связи.

Поэтому имеем

$$\delta J = \int \left(\frac{\partial H}{\partial \epsilon} \delta \epsilon + \frac{\partial H}{\partial \theta} \delta \theta \right) dt.$$

С другой стороны,

$$\delta \epsilon = - \frac{d \delta U}{dt},$$

откуда, интегрируя по частям, получаем

$$\int D \delta \epsilon dt = \int D \delta U dt,$$

$$\int \left(\frac{\partial H}{\partial \epsilon} \delta \epsilon + \frac{\partial H}{\partial \theta} \delta \theta \right) dt = \int D \delta \epsilon dt;$$

отсюда

$$D = \frac{\partial H}{\partial \epsilon}, \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0.$$

Но производная $\frac{dH}{d\epsilon}$, входящая в правую часть уравнения (2), взята в предположении, что θ есть функция от ϵ , поэтому

$$\frac{dH}{d\epsilon} = \frac{\partial H}{\partial \epsilon} + \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\epsilon}.$$

Таким образом, уравнение (2) эквивалентно уравнению (6).

Мы заключаем, что если на три оси электрона наложена некоторая связь и если, кроме сил связи, нет никакой другой силы, то форма, которую примет электрон при равномерном движении, только тогда будет сфероид для соответствующего воображаемого электрона, когда связь приведет к постоянству объема, в согласии с гипотезой Ланжевена.

Мы пришли, таким образом, к постановке следующей задачи: какими будут те дополнительные силы, кроме сил связи, которые необходимо ввести для того, чтобы прийти к закону Лоренца или, в более общем случае, любому закону, отличному от закона Ланжевена?

Самая простая гипотеза и первая из тех, которые мы должны рассмотреть, состоит в том, что эти дополнительные силы происходят от некоторого потенциала, зависящего от трех осей эллипсоида и, следовательно, от θ и r . Пусть $F(\theta, r)$ будет этим потенциалом.

В этом случае действие

$$J = \int [H + F(\theta, r)] dt,$$

и условия равновесия напишутся в виде

$$\frac{dH}{d\theta} + \frac{dF}{d\theta} = 0, \quad \frac{dH}{dr} + \frac{dF}{dr} = 0. \quad (8)$$

Предполагая, что r и θ связаны друг с другом соотношением $r = b\theta^m$, мы можем рассматривать r как функцию от θ , считая таким образом, что F зависит только от θ , и сохранить только первое из уравнений (8), где

$$H = \frac{\varphi}{bk^2\theta^m}, \quad \frac{dH}{d\theta} = \frac{-m\varphi}{bk^2\theta^{m+1}} + \frac{\varphi'}{bk^2\theta^m}.$$

Необходимо, чтобы уравнение (8) удовлетворялось при $k=0$; принимая во внимание уравнения (7), получим

$$\frac{dF}{d\theta} = \frac{ma}{b\theta^{m+3}} + \frac{2}{3} \frac{a}{b\theta^{m+3}},$$

откуда

$$F = \frac{-a}{b\theta^{m+2}} \frac{m + \frac{2}{3}}{m + 2},$$

и по гипотезе Лоренца, где $m = -1$,

$$F = \frac{a}{3b\theta}.$$

Допустим теперь, что не имеется *никакой* связи, т. е. будем рассматривать r и θ как независимые переменные; в таком случае сохраняются оба уравнения (8), причем

$$H = \frac{\varphi}{k^2r}, \quad \frac{dH}{d\theta} = \frac{\varphi'}{k^3r}, \quad \frac{dH}{dr} = \frac{-\varphi}{k^2r^2}.$$

Уравнения (8) должны удовлетворяться при $k=0$ и $r=b\theta^m$; это дает

$$\frac{dF}{dr} = \frac{a}{b^2\theta^{2m+2}}, \quad \frac{dF}{d\theta} = \frac{2}{3} \frac{a}{b\theta^{m+3}}. \quad (9)$$

Один из способов удовлетворить этим условиям состоит в том, что мы полагаем

$$F = Ar^\alpha\theta^\beta, \quad (10)$$

где A , α и β — постоянные.

Уравнения (9) должны удовлетворяться при $k=0$ и $r=b\theta^m$, что дает

$$Aab^{\alpha-1}\theta^{m\alpha-m+\beta} = \frac{a}{b^2\theta^{2m+2}}, \quad A\beta b^{\alpha}\theta^{m\alpha+\beta-1} = \frac{2}{3} \frac{a}{b\theta^{m+3}}.$$

Отождествляя, находим

$$\alpha = 3\gamma, \quad \beta = 2\gamma, \quad \gamma = -\frac{m+2}{3m+2}, \quad A = \frac{a}{ab^{\alpha+1}}. \quad (11)$$

Но объем эллипсоида пропорционален $r^3\theta^2$, поэтому добавочный потенциал пропорционален степени γ объема электрона.

Гипотезе Лоренца соответствует $m = -1$, $\gamma = 1$.

Таким образом мы приходим к гипотезе Лоренца при условии присоединения добавочного потенциала, пропорционального объему электрона.

Гипотеза Ланжевена соответствует случаю $\gamma = \infty$.

§ 7. Квазистационарное движение

Остается рассмотреть, учитывает ли эта гипотеза о сокращении электронов невозможность наблюдать абсолютное движение; для этого мы начнем со случая квазистационарного движения электрона, свободного или подверженного только действию других удаленных электронов.

Известно, что квазистационарным движением называется такое движение, при котором изменения скорости настолько медленны, что энергии — электрическая и магнитная — мало отличаются от соответствующих значений для равномерного движения. Известно также, что исходя из этого определения квазистационарного движения, Абрагам пришел к установлению понятий электромагнитных масс — продольной и поперечной.

Уточним эти понятия. Пусть действие за единицу времени равно

$$H = \frac{1}{2} \int \left(\sum f^2 - \sum \alpha^2 \right) d\tau,$$

где для данного момента мы рассматриваем электрическое и магнитное поля, обусловленные только движением свободного электрона. В предыдущем параграфе, рассматривая движение как равномерное, мы считали, что H зависит от скорости ξ , η , ζ центра тяжести (эти три составляющие имели в предыдущем параграфе значения — ε , 0, 0) и от параметров r и θ , определяющих форму электрона.

Но если движение неравномерно, то H будет зависеть от значений ξ , η , ζ , r , θ не только в данный момент, но и от значений этих величин в другие моменты; последние могут отличаться от данного момента на величину, порядок которой равен времени, необходимому для прохождения света от одной точки электрона к другой. Иными словами, H будет зависеть не только от ξ , η , ζ , r , θ , но и от их производных всех порядков по времени.

Движение будет квазистационарным тогда, когда последовательными частными производными H по производным ξ , η , ζ , r , θ можно пренебречь по сравнению с частными производными H по самим величинам ξ , η , ζ , r , θ .

Уравнения такого движения можно записать в виде

$$\begin{aligned}\frac{dH}{d\theta} + \frac{dF}{d\theta} &= \frac{dH}{d\tau} + \frac{dF}{dr} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{dH}{d\xi} &= - \int X d\tau, \quad \frac{d}{dt} \frac{dH}{d\eta} = - \int Y d\tau, \\ \frac{d}{dt} \frac{dH}{d\zeta} &= - \int Z d\tau.\end{aligned}\tag{1}$$

В этих уравнениях F имеет то же значение, что и в предыдущем параграфе. X , Y , Z — составляющие силы, действующие на электрон; эта сила происходит только от электрического и магнитного полей, обусловленных *другими* электронами.

Заметим, что H зависит от ξ , η , ζ только через промежуточную функцию

$$V = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

т. е. через скорость.

Следовательно, обозначая через D количество движения, имеем

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{dH}{dV} \frac{\xi}{V} = -D \frac{\xi}{V},$$

откуда

$$- \frac{d}{dt} \frac{dH}{d\xi} = \frac{D}{V} \frac{d\xi}{dt} - D \frac{\xi}{V^2} \frac{dV}{dt} + \frac{dD}{dV} \frac{\xi}{V} \frac{dV}{dt},\tag{2}$$

$$- \frac{d}{dt} \frac{dH}{d\eta} = \frac{D}{V} \frac{d\eta}{dt} - D \frac{\eta}{V^2} \frac{dV}{dt} + \frac{dD}{dV} \frac{\eta}{V} \frac{dV}{dt},\tag{2'}$$

где

$$V \frac{dV}{dt} = \sum \xi \frac{d\xi}{dt}.\tag{3}$$

Полагая, что истинное направление скорости совпадает с осью x , получим

$$\xi = V, \quad \eta = \zeta = 0, \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dV}{dt};$$

в соответствии с этим уравнения (2) и (2') примут вид

$$- \frac{d}{dt} \frac{dH}{d\xi} = \frac{dD}{dV} \frac{d\xi}{dt}; \quad - \frac{d}{dt} \frac{dH}{d\eta} = \frac{D}{V} \frac{d\eta}{dt},$$

а три последних уравнения (1):

$$\frac{dD}{dV} \frac{d\xi}{dt} = \int X d\tau, \quad \frac{D}{V} \frac{d\eta}{dt} = \int Y d\tau, \quad \frac{D}{V} \frac{d\zeta}{dt} = \int Z d\tau.\tag{4}$$

Вот почему Абрагам дал величине dD/dV название *продольной массы*, а D/V — *поперечной массы*; напомним, что $D = dH/dV$.

По гипотезе Лоренца имеем

$$D = - \frac{dH}{dV} = - \frac{\partial H}{\partial V},$$

где dH/dV представляет производную по V после того, как r и θ заменены в функции V их значениями, полученными из первых двух уравнений (1).

После этой подстановки имеем

$$H = +A \sqrt{1 - V^2}.$$

Выберем единицы таким образом, чтобы постоянный множитель A был равен 1; я полагаю также

$$\sqrt{1 - V^2} = h,$$

откуда

$$H = +h, \quad D = \frac{V}{h}, \quad \frac{dD}{dV} = h^{-3}, \quad \frac{dD}{dV} \frac{1}{V^2} - \frac{D}{V^3} = h^{-3}.$$

Положим далее

$$M = V \frac{dV}{dt} = \sum \xi \frac{d\xi}{dt}, \quad X_1 = \int X d\tau.$$

Следовательно, для уравнения квазистационарного движения получаем

$$h^{-1} \frac{d\xi}{dt} + h^{-3} \xi M = X_1. \quad (5)$$

Посмотрим, как изменятся эти уравнения от преобразования Лоренца. Полагая $1 + \xi\epsilon = \mu$, будем иметь прежде всего

$$\mu\xi' = \xi + \epsilon, \quad \mu\eta' = \frac{\eta}{k}, \quad \mu\zeta' = \frac{\zeta}{k},$$

откуда легко получаем

$$\mu h' = \frac{h}{k}.$$

Мы имеем также

$$dt' = k\mu dt,$$

откуда

$$\frac{d\xi'}{dt'} = \frac{d\xi}{dt} \frac{1}{k^3\mu^3}, \quad \frac{d\eta'}{dt'} = \frac{d\eta}{dt} \frac{1}{k^2\mu^2} - \frac{d\xi}{dt} \frac{\eta\epsilon}{k^2\mu^3},$$

$$\frac{d\zeta'}{dt'} = \frac{d\zeta}{dt} \frac{1}{k^2\mu^2} - \frac{d\xi}{dt} \frac{\zeta\epsilon}{k^2\mu^3},$$

и

$$M' = \frac{d\xi}{dt} \frac{\varepsilon h^2}{k^3 \mu^4} + \frac{M}{k^3 \mu^3},$$

$$h'^{-1} \frac{d\xi'}{dt'} + h'^{-3} \xi' M' = \left[h^{-1} \frac{d\xi}{dt} + h^{-3} (\xi + \varepsilon) M \right] \mu^{-1}, \quad (6)$$

$$h'^{-1} \frac{d\eta'}{dt'} + h'^{-3} \eta' M' = \left(h^{-1} \frac{d\eta}{dt} + h^{-3} \eta M \right) \mu^{-1} h^{-1}. \quad (7)$$

Обратимся к уравнениям (11') § 1; можно считать, что X_1, Y_1, Z_1 имеют в них то же значение, что и в уравнениях (5). С другой стороны, мы имеем $l=1$ и $\rho'/\rho = k\mu$; поэтому эти уравнения примут вид

$$\begin{aligned} X'_1 &= \mu^{-1} (X_1 + \varepsilon \sum X_1 \xi), \\ Y'_1 &= k^{-1} \mu^{-1} Y_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Вычисляя $\sum X_1 \xi$ при помощи уравнения (5), находим

$$\sum X_1 \xi = h^{-3} M,$$

откуда

$$\begin{aligned} X'_1 &= \mu^{-1} (X_1 + \varepsilon h^{-3} M), \\ Y'_1 &= k^{-1} \mu^{-1} Y_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Сравнивая уравнения (5), (6), (7) и (9), находим окончательно

$$\begin{aligned} h'^{-1} \frac{d\xi'}{dt'} + h'^{-3} \xi' M' &= X'_1, \\ h'^{-1} \frac{d\eta'}{dt'} + h'^{-3} \eta' M' &= Y'_1, \end{aligned} \quad (10)$$

а это показывает, что уравнения квазистационарного движения не изменяются от преобразования Лоренца; однако это еще не значит, что только гипотеза Лоренца приводит к такому результату.

Для того чтобы обосновать это положение, мы ограничимся, как это сделал Лоренц, некоторыми частными случаями, рассмотрение которых будет очевидно достаточным для доказательства обратной теоремы.

Прежде всего посмотрим, каким образом мы обобщим гипотезы, на которых основано предыдущее вычисление.

1. Вместо того, чтобы полагать в преобразовании Лоренца $l=1$, мы будем считать l произвольным.

2. Вместо того, чтобы предполагать, что F пропорционально объему $\mathbf{i}$, следовательно, H пропорционально h , мы положим, что F есть произвольная функция от θ и r [после замены θ и r их значениями в функции V , полученными из первых двух уравнений (1)], так что H будет произвольной функцией от V .

Замечу прежде всего, что если положить $H=h$, то $l=1$, и уравнения (6) и (7) действительно удовлетворяются, если только правые части помно-

жить на $1/l$; так же точно, как и уравнения (9), если их правые части помножить на $1/l^2$, и, наконец, уравнения (10), если правые части будут умножены на $1/l$.

Таким образом, если мы желаем, чтобы уравнения движения не изменялись от преобразования Лоренца, т. е. чтобы уравнения (10) отличались от уравнений (5) только штрихами у букв, необходимо положить

$$l=1.$$

Предположим теперь, что

$$\eta = \zeta = 0,$$

откуда

$$\xi = V, \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dV}{dt};$$

уравнения (5) примут вид

$$-\frac{d}{dt} \frac{dH}{d\xi} = \frac{dD}{dV} \frac{d\xi}{dt} = X_1, \quad -\frac{d}{dt} \frac{dH}{d\eta} = \frac{D}{V} \frac{d\eta}{dt} = Y_1. \quad (5')$$

Мы можем, кроме того, положить

$$\frac{dD}{dV} = f(V) = f(\xi), \quad \frac{D}{V} = \varphi(V) = \varphi(\xi).$$

Если уравнения движения не изменяются от преобразования Лоренца, то должно иметь место

$$f(\xi) \frac{d\xi}{dt} = X_1,$$

$$\varphi(\xi) \frac{d\eta}{dt} = Y_1,$$

$$f(\xi') \frac{d\xi'}{dt'} = X'_1 = l^{-2}\mu^{-1} \left(X_1 + \varepsilon \sum X_1 \xi \right) = l^{-2}\mu^{-1} X_1 (1 + \varepsilon \xi) = l^{-2} X_1,$$

$$\varphi(\xi') \frac{d\eta'}{dt'} = Y'_1 = l^{-2}k^{-1}\mu^{-1} Y_1,$$

и, следовательно,

$$f(\xi) \frac{d\xi}{dt} = l^2 f(\xi') \frac{d\xi'}{dt'}, \quad (11)$$

$$\varphi(\xi) \frac{d\eta}{dt} = l^2 k \mu \varphi(\xi') \frac{d\eta'}{dt'}.$$

Но мы имеем

$$\frac{d\xi'}{dt'} = \frac{d\xi}{dt} \frac{1}{k^3 \mu^3}, \quad \frac{d\eta'}{dt'} = \frac{d\eta}{dt} \frac{1}{k^2 \mu^2},$$

откуда

$$f(\xi') = f\left(\frac{\xi + \varepsilon}{1 + \xi \varepsilon}\right) = f(\xi) \frac{k^3 \mu^3}{l^2},$$

$$\varphi(\xi') = \varphi\left(\frac{\xi + \varepsilon}{1 + \xi \varepsilon}\right) = \varphi(\xi) \frac{k \mu}{l^2};$$

отсюда, исключая l^2 , получаем следующее функциональное уравнение:

$$k^2 \mu^2 = \frac{\varphi\left(\frac{\xi + \varepsilon}{1 + \xi\varepsilon}\right)}{\varphi(\xi)} = \frac{f\left(\frac{\xi + \varepsilon}{1 + \xi\varepsilon}\right)}{f(\xi)},$$

или, полагая

$$\frac{\varphi(\xi)}{f(\xi)} = \Omega(\xi) = \frac{D}{V \frac{dD}{dV}},$$

получаем уравнение

$$\Omega\left(\frac{\xi + \varepsilon}{1 + \xi\varepsilon}\right) = \Omega(\xi) \frac{1 + \varepsilon^2}{(1 + \xi\varepsilon)^2},$$

которое должно удовлетворяться при всех значениях ξ и ε . Для $\xi=0$ будет

$$\Omega(\varepsilon) = \Omega(0)(1 - \varepsilon^2),$$

откуда

$$D = A \left(\frac{V}{\sqrt{1 - V^2}} \right)^m,$$

где A — постоянная и $\Omega(0)$ положено равным $1/m$.

Теперь находим

$$\varphi(\xi) = \frac{A}{\xi} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right)^m,$$

$$\varphi(\xi') = \frac{A\mu}{\xi + \varepsilon} \left(\frac{\xi + \varepsilon}{\sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)^m.$$

Но $\varphi(\xi') = \varphi(\xi) k \mu / l^2$; следовательно,

$$(\xi + \varepsilon)^{m-1} (1 - \varepsilon^2)^{-\frac{m}{2}} = -\xi^{m-1} (1 - \varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}} l^{-2}.$$

Ввиду того, что l должно зависеть только от ε (так как при наличии нескольких электронов l должно иметь одно и то же значение для всех электронов, скорости ξ которых могут быть различными), то это тождество может иметь место только при

$$m = 1, \quad l = 1.$$

Итак, гипотеза Лоренца будет единственной, которая согласуется с невозможностью доказательства абсолютного движения; допуская эту невозможность, необходимо принять, что электроны при своем движении сокращаются и превращаются в эллипсоиды вращения, у которых две оси остаются постоянными; следовательно, как мы показали в предыдущем параграфе, необходимо допустить существование добавочного потенциала, пропорционального объему электрона.

Таким образом, результаты Лоренца полностью подтверждаются; мы можем еще раз убедиться в действительной причине исследуемого нами обстоятельства; эту причину следует искать в рассуждениях § 4.

Преобразования, не изменяющие уравнения движения, должны составлять группу, а это может иметь место только при $l=1$.

Так как мы не можем узнать, находится ли электрон в состоянии покоя или в состоянии абсолютного движения, то необходимо, чтобы при своем движении он подвергался деформации, которая должна быть точно такой, какая предписывается ему соответствующим преобразованием группы.

§ 8. Произвольное движение

Предыдущие результаты применимы только к квазистационарному движению, однако их можно легко распространить на общий случай; для этого достаточно применить сказанное в § 3, т. е. исходить из принципа наименьшего действия.

Прибавим к выражению для действия

$$J = \int dt d\tau \left(\frac{\sum f^2}{2} - \frac{\sum a^2}{2} \right)$$

член, представляющий добавочный потенциал F (§ 6); этот член, очевидно, принимает вид

$$J = \int \sum (F) dt,$$

где $\sum (F)$ представляет сумму добавочных потенциалов, происходящих от различных электронов, каждый из которых пропорционален объему соответствующего электрона.

Мы пишем (F) в скобках для того, чтобы не смешивать его с вектором F , G , H .

Тогда полное действие равно $J + J_1$. В § 3 мы видели, что J не изменяется от преобразования Лоренца; покажем теперь, что то же относится и к J_1 .

Для каждого из электронов имеем

$$(F) = \omega_0 \tau,$$

где ω_0 — коэффициент, характеризующий данный электрон, а τ — его объем; поэтому мы можем написать

$$\sum (F) = \int \omega_0 d\tau.$$

Интеграл здесь должен быть распространен по всему пространству и притом так, чтобы коэффициент ω_0 вне электронов был равен нулю, а внутри каждого электрона — коэффициенту, характеризующему этот электрон.

В таком случае имеем

$$J_1 = \int \omega_0 d\tau dt,$$

и после преобразования Лоренца

$$J'_1 = \int \omega'_0 d\tau' dt'.$$

Но $\omega_0 = \omega'_0$, ибо если точка принадлежит электрону, то соответствующая точка после преобразования Лоренца также принадлежит *тому же самому* электрону. С другой стороны, в § 3 мы нашли

$$d\tau' dt' = l^4 d\tau dt$$

и, так как мы полагаем здесь $l=1$,

$$d\tau' dt' = d\tau dt.$$

Таким образом, имеем

$$J_1 = J'_1.$$

Следовательно, наша теорема является общей; одновременно она дает нам решение поставленной в конце § 1 задачи: найти добавочные силы, не изменяющиеся от преобразования Лоренца. Добавочный потенциал (F) удовлетворяет этому условию.

Таким образом, мы можем обобщить результат, полученный в конце § 1, и сказать:

Если инерция электронов имеет исключительно электромагнитное происхождение и если электроны подвержены действию только электромагнитных сил или сил, вызываемых добавочным потенциалом (F), то никакой опыт не в состоянии показать наличие абсолютного движения.

Каковы же те силы, которые вызываются потенциалом (F)? Они, очевидно, могут быть уподоблены давлению, господствующему внутри электрона; все происходит так, как если бы каждый электрон был полым пространством, находящимся под постоянным внутренним давлением (независимым от объема); работа такого давления была бы, очевидно, пропорциональна изменениям объема.

Я должен заметить, однако, что это давление отрицательно. Обратимся к уравнению (10) § 6. По гипотезе Лоренца, оно переписется в виде

$$F = Ar^{3\theta^2}.$$

Уравнения (11) § 6 дадут нам

$$A = \frac{a}{3b^4}.$$

Наше давление равно A с точностью до постоянного коэффициента, который отрицателен.

Вычислим теперь массу электрона, я имею в виду «экспериментальную массу», т. е. массу при малых скоростях.

Согласно § 6, имеем

$$H = \frac{\varphi\left(\frac{\theta}{k}\right)}{k^2 r}, \quad \theta = k, \quad \varphi = a, \quad \theta r = b,$$

откуда

$$H = \frac{a}{bk} = \frac{a}{b} \sqrt{1 - V^2}.$$

Для очень малого V можно написать

$$H = \frac{a}{b} \left(1 - \frac{V^2}{2}\right).$$

Таким образом, масса, как продольная, так и поперечная, равна a/b . Но a есть численная постоянная, и это показывает, что *давление, обусловленное нашим добавочным потенциалом, пропорционально четвертой степени экспериментальной массы электрона.*

Так как ньютоновское притяжение также пропорционально этой экспериментальной массе, то появляется искушение заключить, что между причиной, вызывающей тяготение, и причиной, порождающей этот добавочный потенциал, существует некоторое соотношение.

§ 9. Гипотезы о тяготении

Итак, теория Лоренца полностью объясняет невозможность показать опытным путем наличие абсолютного движения в случае, если все силы будут электромагнитного происхождения.

Однако существуют силы, которым нельзя приписывать электромагнитное происхождение, как, например, силы тяготения. В самом деле, может случиться, что две системы тел порождают эквивалентные электромагнитные поля, т. е. оказывают одинаковое действие на наэлектризованные тела и токи, но что, однако, эти две системы оказывают различное гравитационное действие на ньютоновские массы.

Следовательно, поле тяготения отличается от электромагнитного поля. Поэтому Лоренц вынужден был дополнить свою гипотезу предположением, что *силы любого происхождения, и в частности силы тяготения, ведут себя при поступательном движении (или, если угодно, при преобразовании Лоренца) совершенно так же, как электромагнитные силы.*

Нам необходимо теперь заняться более детальным рассмотрением этой гипотезы. Если мы желаем, чтобы ньютоновская сила вела себя указанным образом при преобразовании Лоренца, то мы уже не можем предполагать, что эта сила зависит только от относительного положения двух притягивающихся тел в рассматриваемый момент. Она должна зависеть, кроме того, от скоростей обоих тел. Но это не все: естественно предположить, что если сила, действующая в момент t на притягиваемое тело, зависит от положения и скорости этого тела в этот же момент, то она

зависит, кроме того, от положения и скорости *притягивающего* тела, но уже не в момент t , а в *предшествующий момент*, как если бы силы тяготения требовали некоторого времени для своего распространения.

Будем рассматривать, таким образом, положение притягиваемого тела в момент t_0 и пусть x_0, y_0, z_0 будут его координаты в этот момент, а ξ, η, ζ — составляющие его скорости. Рассмотрим, с другой стороны, притягивающее тело в момент $t_0 + t$ и пусть в этот момент его координатами будут $x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z$, а составляющими скорости ξ_1, η_1, ζ_1 .

Прежде всего мы должны получить соотношение для определения времени t

$$\varphi(t, x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1) = 0. \quad (1)$$

Это соотношение определит закон распространения сил тяготения (при этом мы вовсе не предполагаем, что распространение происходит с одинаковой скоростью по всем направлениям).

Пусть теперь X_1, Y_1, Z_1 будут тремя составляющими силы, действующей в момент t на притягиваемое тело. Задача заключается в том, чтобы выразить X_1, Y_1, Z_1 как функции от

$$t, x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1. \quad (2)$$

Какие условия должны быть при этом выполнены?

1. Соотношение (1) не должно меняться от преобразований группы Лоренца.

2. Составляющие X_1, Y_1, Z_1 должны вести себя при преобразовании Лоренца так же, как электромагнитные силы, обозначаемые теми же буквами, т. е. согласно уравнениям (11) § 1.

3. Когда оба тела находятся в покое, мы должны вернуться к обычному виду закона притяжения.

Важно отметить, что в этом последнем случае соотношение (1) не имеет места, ибо, когда оба тела находятся в покое, время t уже не играет никакой роли.

Задача, поставленная таким образом, является, очевидно, неопределенной. Поэтому мы попытаемся удовлетворить, насколько возможно, другим дополнительным условиям.

4. Так как астрономические наблюдения не обнаруживают, по-видимому, заметных отклонений от закона Ньютона, то мы выберем решение, наименее расходящееся с этим законом для малых скоростей обоих тел.

5. Попытаемся распорядиться так, чтобы время t всегда было отрицательным; в самом деле, если понятно, что гравитационный эффект требует некоторого времени для своего распространения, то очень трудно усмотреть, каким образом этот эффект может зависеть от *недостигнутого* еще положения притягивающего тела.

Существует случай, когда неопределенность задачи исчезает; это происходит тогда, когда два тела находятся в *относительном* покое одно по отношению к другому, т. е. когда

$$\xi = \xi_1, \quad \eta = \eta_1, \quad \zeta = \zeta_1;$$

поэтому рассмотрим сначала этот случай, полагая, что скорости постоянны, т. е. что оба тела участвуют в общем движении переноса, равномерном и прямолинейном.

Положим, что ось x параллельна направлению этого переноса, так что $\eta = \zeta = 0$, и возьмем $\varepsilon = -\xi$.

Применяя при этих условиях преобразование Лоренца, получим, что после преобразования оба тела будут находиться в состоянии покоя, и, следовательно,

$$\xi' = \eta' = \zeta' = 0.$$

Так как составляющие X'_1, Y'_1, Z'_1 должны удовлетворять закону Ньютона, то мы будем иметь с точностью до постоянного множителя

$$X'_1 = -\frac{x'}{r'^3}, \quad Y'_1 = -\frac{y'}{r'^3}, \quad Z'_1 = -\frac{z'}{r'^3}, \quad (3)$$

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Но, согласно § 1,

$$x' = k(x + \varepsilon t), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = k(t + \varepsilon x),$$

$$\frac{\rho'}{\rho} = k(1 + \xi\varepsilon) = k(1 - \varepsilon^2) = \frac{1}{k}, \quad \sum X_1 \xi = -X_1 \varepsilon,$$

$$X'_1 = k \frac{\rho}{\rho'} (X_1 + \varepsilon \sum X_1 \xi) = k^2 X_1 (1 - \varepsilon^2) = X_1,$$

$$Y'_1 = \frac{\rho}{\rho'} Y_1 = k Y_1,$$

$$Z'_1 = k Z_1.$$

Кроме того, имеем

$$x + \varepsilon t = x - \xi t, \quad r'^2 = k^2 (x - \xi t)^2 + y^2 + z^2$$

и

$$X_1 = \frac{-k(x - \xi t)}{r'^3}, \quad Y_1 = \frac{-y}{kr'^3}, \quad Z_1 = \frac{-z}{kr'^3}, \quad (4)$$

что можно написать в виде

$$X_1 = \frac{dV}{dx}, \quad Y_1 = \frac{dV}{dy}, \quad Z_1 = \frac{dV}{dz}, \quad V = \frac{1}{kr'}. \quad (4')$$

С первого взгляда кажется, что здесь имеется неопределенность, так как мы не сделали никакого предположения о значении t , т. е. о скорости распространения; к тому же x есть функция от t ; однако легко видеть, что в наши формулы входят только выражения $x - \xi t, y, z$, которые не зависят от t .

Очевидно, если два тела участвуют в общем переносе, то сила, действующая на притягиваемое тело, нормальна к эллипсоиду, имеющему в качестве центра притягивающее тело.

Для того чтобы идти дальше, необходимо найти *инварианты группы Лоренца*.

Мы знаем, что подстановки этой группы (при $l=1$) являются линейными подстановками, не изменяющими квадратичной формы

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2.$$

Положим, с другой стороны,

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\delta x}{\delta t}, & \eta &= \frac{\delta y}{\delta t}, & \zeta &= \frac{\delta z}{\delta t}, \\ \xi_1 &= \frac{\delta_1 x}{\delta_1 t}, & \eta_1 &= \frac{\delta_1 y}{\delta_1 t}, & \zeta_1 &= \frac{\delta_1 z}{\delta_1 t}. \end{aligned}$$

Мы видим, что в результате преобразования Лоренца величины δx , δy , δz , δt и $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$, $\delta_1 t$ подвергаются таким же линейным подстановкам, как x , y , z , t .

Будем рассматривать

$$\begin{array}{cccc} x, & y, & z, & t \sqrt{-1}, \\ \delta x, & \delta y, & \delta z, & \delta t \sqrt{-1}, \\ \delta_1 x, & \delta_1 y, & \delta_1 z, & \delta_1 t \sqrt{-1}, \end{array}$$

как координаты трех точек P , P' , P'' в пространстве четырех измерений.

Легко видеть, что преобразование Лоренца представляет не что иное, как поворот в этом пространстве вокруг начала координат, рассматриваемого неподвижным. Таким образом, отличными друг от друга инвариантами будут только шесть расстояний между тремя точками P , P' , P'' и началом координат, или, если угодно, два выражения

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2, \quad x \delta x + y \delta y + z \delta z - t \delta t,$$

или четыре выражения такой же формы, получающиеся в результате любой перестановки трех точек P , P' , P'' .

Но инварианты, которые мы пытаемся найти, являются функциями десяти переменных (2); поэтому мы должны отыскать между комбинациями из наших шести инвариантов те из них, которые зависят только лишь от этих десяти переменных, т. е. те, которые являются однородными функциями степени 0 как по отношению к δx , δy , δz , δt , так и по отношению к $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$, $\delta_1 t$.

Таким образом, нам остаются следующие четыре различных инварианта:

$$\sum x^2 - t^2, \quad \frac{1 - \sum x \xi}{\sqrt{1 - \sum \xi^2}}, \quad \frac{t - \sum x \xi_1}{\sqrt{1 - \sum \xi_1^2}}, \quad \frac{1 - \sum \xi \xi_1}{\sqrt{(1 - \sum \xi^2)(1 - \sum \xi_1^2)}}. \quad (5)$$

Займемся теперь преобразованиями, которым подвергаются составляющие силы; обратимся к уравнениям (11) § 1, которые относятся не

к силе X_1, Y_1, Z_1 , рассматриваемой нами сейчас, а к силе, отнесенной к единице объема.

Полагая, кроме того,

$$T = \sum X\xi,$$

мы видим, что эти уравнения (11) можно (при $l=1$) переписать в виде

$$\begin{aligned} X' &= k(X + \varepsilon T), & T' &= k(T + \varepsilon X), \\ Y' &= Y, & Z' &= Z. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, X, Y, Z, T преобразуются так же, как и x, y, z, t . Следовательно, инвариантами группы будут следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sum X^2 - T^2, & \quad \sum Xx - Tt, & \quad \sum X\delta x - T\delta t, \\ & \quad \sum X\delta_1 x - T\delta_1 t. \end{aligned}$$

Однако нам нужны не X, Y, Z , а X_1, Y_1, Z_1 , причем

$$T_1 = \sum X_1 \xi.$$

Мы видим, что

$$\frac{X_1}{X} = \frac{Y_1}{Y} = \frac{Z_1}{Z} = \frac{T_1}{T} = \frac{1}{\rho}.$$

Таким образом, преобразование Лоренца действует на X_1, Y_1, Z_1, T_1 точно так же, как и на X, Y, Z, T , с той разницей, что эти выражения будут умножены, кроме того, на

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{1}{k(1 + \xi\varepsilon)} = \frac{\delta t}{\delta t'};$$

аналогично, на величины $\xi, \eta, \zeta, 1$ оно будет действовать таким же образом, как и на $\delta x, \delta y, \delta z, \delta t$, с той, однако, разницей, что эти последние выражения будут умножены, кроме того, на *один и тот же* множитель.

$$\frac{\delta t}{\delta t'} = \frac{1}{k(1 + \xi\varepsilon)}.$$

Будем рассматривать затем $X, Y, Z, T\sqrt{-1}$ как координаты некоторой четвертой точки Q ; тогда инвариантами будут служить функции взаимных расстояний пяти точек O, P, P', P'', Q ; среди этих функций мы должны оставить только те, которые являются однородными степени 0, с одной стороны, по отношению к $X, Y, Z, T, \delta x, \delta y, \delta z, \delta t$ (переменные, которые можно заменить потом на $X_1, Y_1, Z_1, T_1, \xi, \eta, \zeta, 1$) и, с другой стороны, по отношению к $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, 1$ (переменные, которые также можно заменить затем на $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, 1$).

Таким образом, кроме прежних четырех инвариантов (5), мы находим следующие четыре новых различных инварианта:

$$\begin{aligned} & \frac{\sum X_1^2 - T_1^2}{1 - \sum \xi^2}, \quad \frac{\sum X_1 x - T_1 t}{\sqrt{1 - \sum \xi^2}}, \\ & \frac{\sum X_1 \xi_1 - T_1}{\sqrt{1 - \sum \xi^2} \sqrt{1 - \sum \xi_1^2}}, \quad \frac{\sum X_1 \xi - T_1}{1 - \sum \xi^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Согласно определению T_1 , последний инвариант всегда равен нулю. Установив все это, посмотрим, какие условия должны быть выполнены.

1. Первая часть соотношения (1), определяющая скорость распространения, должна быть функцией от четырех инвариантов (5).

Здесь, очевидно, возможно множество гипотез, из которых мы рассмотрим только две.

А. Можно положить

$$\sum x^2 - t^2 = r^2 - t^2 = 0,$$

откуда $t = \pm r$, а так как t должно быть отрицательным, то

$$t = -r.$$

Это говорит о том, что скорость распространения равна скорости света.

На первый взгляд может показаться, что эта гипотеза должна быть сразу же отброшена без дальнейшего обсуждения. В самом деле, Лаплас показал, что распространение сил тяготения происходит или мгновенно, или со скоростью, во много раз превосходящей скорость света. Однако Лаплас рассматривал гипотезу конечной скорости распространения *ceteris non mutatis* (при прочих неизменных условиях); здесь же, напротив, эта гипотеза осложнена многими другими, и может случиться, что между ними будет иметь место более или менее полная компенсация, вроде той, что мы неоднократно видели на многочисленных примерах в результате преобразования Лоренца.

Б. Можно положить

$$\frac{t - \sum x \xi_1}{\sqrt{1 - \sum \xi_1^2}} = 0, \quad t = \sum x \xi_1.$$

При этом скорость распространения гораздо больше скорости света; однако в некоторых случаях t может быть положительным, что, как уже было сказано, представляется малопримемлемым. Поэтому мы будем придерживаться гипотезы (А).

2. Четыре инварианта (7) должны быть функциями инвариантов (5).

3. Если два тела находятся в абсолютном покое, то X_1, Y_1, Z_1 должны иметь значения, соответствующие закону Ньютона; если же они находятся в относительном покое, эти значения получаются из уравнений (4).

По гипотезе абсолютного покоя, первые два инварианта (7) должны приводиться к

$$\sum X_1^2, \quad \sum X_1 x,$$

или по закону Ньютона к

$$\frac{1}{r^4}, \quad -\frac{1}{r}.$$

С другой стороны, по гипотезе (А) второй и третий инварианты (5) приводятся к

$$\frac{-r - \sum x\xi}{\sqrt{1 - \sum \xi^2}}, \quad \frac{-r - \sum x\xi_1}{\sqrt{1 - \sum \xi_1^2}},$$

т. е. при абсолютном покое к

$$-r, \quad -r.$$

Мы можем допустить в качестве примера, что два первых инварианта (7) сводятся к

$$\frac{(1 - \sum \xi_1^2)^2}{(r + \sum x\xi_1)^4}, \quad -\frac{\sqrt{1 - \sum \xi_1^2}}{r + \sum x\xi_1},$$

хотя возможны и другие комбинации.

Необходимо сделать выбор среди этих комбинаций и, кроме того, нам нужно еще третье уравнение для определения X_1, Y_1, Z_1 . Для подобного выбора мы должны стремиться, насколько возможно, не отдаляться от закона Ньютона. Посмотрим теперь, что получается, если пренебречь квадратами скоростей ξ, η и т. д. (полагая по-прежнему $t = -r$).

Четыре инварианта (5) приводятся тогда к виду

$$0, \quad -r - \sum x\xi, \quad -r - \sum x\xi_1, \quad 1,$$

а четыре инварианта (7) к виду

$$\sum X_1^2, \quad \sum X_1 (x + \xi r), \quad \sum X_1 (\xi_1 - \xi), \quad 0.$$

Однако для того чтобы иметь возможность сравнить это с законом Ньютона, необходимо другое преобразование; здесь $x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z$ представляют координаты притягивающего тела в момент времени $t_0 + t$ и $r = \sqrt{\sum x^2}$, в законе же Ньютона нужно рассматривать координаты $x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1$ притягивающего тела в момент t_0 и расстояние

$$r_1 = \sqrt{\sum x_1^2}.$$

Мы можем пренебречь квадратом времени t , необходимого для распространения, и, следовательно, поступать так, как если бы движение было равномерным.

В таком случае получим

$$x = x_1 + \xi_1 t, \quad y = y_1 + \eta_1 t, \quad z = z_1 + \zeta_1 t, \\ r(r - r_1) = \sum x \xi_1 t,$$

или, так как

$$t = -r, \\ x = x_1 - \xi_1 r, \quad y = y_1 - \eta_1 r, \quad z = z_1 - \zeta_1 r, \\ r = r_1 - \sum x \xi_1,$$

наши четыре инварианта (5) станут равными

$$0, \quad -r_1 + \sum x (\xi_1 - \xi), \quad -r_1, \quad 1,$$

а четыре инварианта (7) —

$$\sum X_1^2, \quad \sum X_1 [x_1 + (\xi - \xi_1) r_1], \quad \sum X_1 (\xi_1 - \xi), \quad 0.$$

Во втором из этих выражений мы написали r_1 вместо r , потому что r умножено здесь на $\xi - \xi_1$, а квадратом ξ мы пренебрегаем.

С другой стороны, по закону Ньютона мы получили бы для этих четырех инвариантов (7)

$$\frac{1}{r_1^4}, \quad -\frac{1}{r_1} - \frac{\sum x_1 (\xi - \xi_1)}{r_1^2}, \quad \frac{\sum x_1 (\xi - \xi_1)}{r_1^3}, \quad 0.$$

Следовательно, если мы обозначим второй и третий инварианты (5) через A и B , а первые три инварианта (7) через M , N , P , то мы удовлетворим закону Ньютона с точностью до членов второго порядка малости, положив

$$M = \frac{1}{B^4}, \quad N = \pm \frac{A}{B^2}, \quad P = \frac{A - B}{B^3}. \quad (8)$$

Это решение не единственное.

В самом деле, пусть C есть четвертый инвариант (5) и пусть $C - 1$ имеет порядок квадрата ξ , так же как и $(A - B)^2$.

Таким образом, мы можем прибавить к правым частям каждого из уравнений (8) член, составленный из $C - 1$, умноженного на произвольную функцию от A , B , C , и член $(A - B)^2$, также умноженный на функцию от A , B , C .

Решение (8) кажется на первый взгляд наиболее простым, но тем не менее оно не может быть принято. В самом деле, так как M , N , P являются функциями от X_1 , Y_1 , Z_1 и от $T_1 = \sum X_1 \xi$, то из этих трех уравнений (8) можно получить значения X_1 , Y_1 , Z_1 , однако в некоторых случаях эти значения становятся мнимыми.

Для того чтобы избавиться от такого неудобства, поступим следующим образом.

Положим

$$k_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \sum \xi^2}}, \quad k_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \sum \xi_1^2}},$$

что оправдывается аналогией с обозначением

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}},$$

фигурирующим в подстановке Лоренца.

В этом случае, а также в силу условия $-r=t$, инварианты (5) приводятся к

$$0, \quad A = -k_0(r + \sum x\xi), \quad B = -k_1(r + \sum x\xi_1), \\ C = k_0k_1(1 - \sum \xi\xi_1).$$

С другой стороны, мы видим, что следующие системы величин:

$$\begin{array}{cccc} x, & y, & z, & -r = t, \\ k_0X_1, & k_0Y_1, & k_0Z_1, & k_0T_1, \\ k_0\xi, & k_0\eta, & k_0\zeta, & k_0, \\ k_1\xi_1, & k_1\eta_1, & k_1\zeta_1, & k_1 \end{array}$$

подвергаются *таким же самым* линейным подстановкам, как и при преобразовании группы Лоренца.

Таким образом, мы приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} X_1 &= x \frac{\alpha}{k_0} + \xi\beta + \xi_1 \frac{k_1}{k_0} \gamma, \\ Y_1 &= y \frac{\alpha}{k_0} + \eta\beta + \eta_1 \frac{k_1}{k_0} \gamma, \\ Z_1 &= z \frac{\alpha}{k_0} + \zeta\beta + \zeta_1 \frac{k_1}{k_0} \gamma, \\ T_1 &= -r \frac{\alpha}{k_0} + \beta + \frac{k_1}{k_0} \gamma. \end{aligned} \tag{9}$$

Ясно, что если α, β, γ — инварианты, то X_1, Y_1, Z_1, T_1 удовлетворяют основному условию, т. е. подвергаются вследствие преобразования Лоренца соответствующей линейной подстановке.

Но для того чтобы уравнения (9) были совместны, необходимо, чтобы

$$\sum X_1\xi - T_1 = 0$$

или, после замены X_1, Y_1, Z_1, T_1 их значениями из (9) и умножения на k_0^2 ,

$$-A\alpha - \beta - C\gamma = 0. \tag{10}$$

Мы хотим, чтобы при отбрасывании, по сравнению с квадратом скоростей света, квадратов скоростей ξ и т. д., а также произведений ускорений

на расстояния, как мы это делали выше, значения X_1 , Y_1 , Z_1 оставались соответствующими закону Ньютона.

Мы можем положить

$$\beta = 0, \quad \gamma = -\frac{A\alpha}{C}.$$

С точностью до приближения принятого нами порядка будем **иметь**

$$k_0 = k_1 = 1, \quad C = 1, \quad A = -r_1 + \sum x(\xi_1 - \xi), \quad B = -r_1, \\ x = x_1 + \xi_1 t = x_1 - \xi_1 r.$$

Первое уравнение (9) примет тогда вид

$$X_1 = \alpha(x - A\xi_1).$$

Но если пренебречь квадратом ξ , то $A\xi_1$ можно заменить на $-r_1\xi_1$ или на $-r\xi_1$, что дает

$$X_1 = \alpha(x + \xi_1 r) = \alpha x_1.$$

По закону же Ньютона мы получили бы

$$X_1 = -\frac{x_1}{r_1^3}.$$

Таким образом, для инварианта α мы должны выбрать тот, который приводится к $-1/r_1^3$ при точности порядка допущенного приближения, т. е. $1/B^3$.

Уравнения (9) принимают вид

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{x}{k_0 B^3} - \xi_1 \frac{k_1}{k_0} \cdot \frac{A}{B^3 C}, \\ Y_1 &= \frac{y}{k_0 B^3} - \eta_1 \frac{k_1}{k_0} \cdot \frac{A}{B^3 C}, \\ Z_1 &= \frac{z}{k_0 B^3} - \zeta_1 \frac{k_1}{k_0} \cdot \frac{A}{B^3 C}, \\ T_1 &= -\frac{r}{k_0 B^3} - \frac{k_1}{k_0} \cdot \frac{A}{B^3 C}. \end{aligned} \tag{11}$$

Отсюда мы видим прежде всего, что исправленное выражение для притяжения состоит из двух составляющих: одна параллельна вектору, соединяющему местоположения обоих тел, а другая параллельна скорости притягивающего тела.

Напомним, что когда мы говорим о положении или скорости притягивающего тела, то при этом речь идет о положении или скорости в момент, когда гравитационная волна покидает его; наоборот, для притягиваемого тела речь идет при этом о его положении или скорости в момент, когда

гравитационная волна достигает его; предполагается, что эта волна распространяется со скоростью света.

Я полагаю, что было бы преждевременно более подробно обсуждать эти формулы. Поэтому ограничимся несколькими замечаниями.

1. Решения (11) не единственны; в самом деле, величину $1/B^3$, входящую всюду как множитель, можно заменить на

$$\frac{1}{B^3} + (C - 1)f_1(A, B, C) + (A - B)^2 f_2(A, B, C),$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции от A, B, C , или же не считать больше β равным нулю, а прибавить к α, β, γ какие-нибудь добавочные члены, лишь бы только они удовлетворяли условию (10) и были второго порядка относительно ξ в части, относящейся к α , и первого порядка относительно β и γ .

2. Первое уравнение (11) можно переписать в виде

$$X_1 = -\frac{k_1}{B^3 C} [x(1 - \sum \xi \xi_1) + \xi_1(r + \sum x \xi)], \quad (11')$$

причем выражение в квадратных скобках также можно переписать как

$$(x + r\xi_1) + \eta(\xi_1 y - x\eta_1) + \zeta(\xi_1 z - x\zeta_1). \quad (12)$$

Таким образом, полную силу можно разложить на три составляющие, соответствующие трем скобкам в выражении (12); первая составляющая имеет некоторую аналогию с механической силой, обусловленной электрическим полем, а две другие — с механической силой, обусловленной магнитным полем. Для того чтобы дополнить аналогию, мы можем, согласно замечанию 1, заменить в уравнении (11) $1/B^3$ на C/B^3 так, чтобы X_1, Y_1, Z_1 зависели только линейно от скорости ξ, η, ζ притягиваемого тела, так как C при этом из знаменателя (11') исчезает. Положим далее

$$\begin{aligned} k_1(x + r\xi_1) &= \lambda, & k_1(y + r\eta_1) &= \mu, & k_1(z + r\zeta_1) &= \nu, \\ k_1(\eta_1 z - \zeta_1 y) &= \lambda', & k_1(\zeta_1 x - \xi_1 z) &= \mu', & k_1(\xi_1 y - x\eta_1) &= \nu', \end{aligned} \quad (13)$$

а так как C исчезло из знаменателя (11'), то

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\lambda}{B^3} + \frac{\eta\nu' - \zeta\mu'}{B^3}, \\ Y_1 &= \frac{\mu}{B^3} + \frac{\zeta\lambda' - \xi\nu'}{B^3}, \\ Z_1 &= \frac{\nu}{B^3} + \frac{\xi\mu' - \eta\lambda'}{B^3}; \end{aligned} \quad (14)$$

к тому же будем иметь

$$B^2 = \sum \lambda^2 - \sum \lambda'^2. \quad (15)$$

При этом λ , μ , ν или $\frac{\lambda}{B^3}$, $\frac{\mu}{B^3}$, $\frac{\nu}{B^3}$ играют роль электрического поля, в то время как λ' , μ' , ν' , или, вернее, $\frac{\lambda'}{B^3}$, $\frac{\mu'}{B^3}$, $\frac{\nu'}{B^3}$ — роль магнитного поля.

3. Постулат относительности обязывает нас принять решение (11) или решение (14), или какое-нибудь из решений, получаемых при учете замечания 1. Однако прежде всего следует задать себе вопрос, совместимы ли эти решения с астрономическими наблюдениями. Расхождение с законом Ньютона будет порядка ξ^2 , т. е. в 10 000 раз меньше, чем если бы оно было порядка ξ , т. е. если бы силы тяготения распространялись со скоростью света, *ceteris non mutatis*; поэтому можно надеяться, что это расхождение не слишком велико. Однако только обстоятельное обсуждение может полностью осветить этот вопрос.

ДИНАМИКА ЭЛЕКТРОНА*

I. Введение

Не следует ли отставить, или, во всяком случае, серьезно пересмотреть общие принципы динамики, которые со времен Ньютона служили физической науке краеугольным камнем и казались до сих пор незыблемыми? Вот вопрос, который многие задают себе последние несколько лет. По их мнению, открытие радия свергло научные истины, считавшиеся наиболее прочными: с одной стороны — невозможность превращения металлов, с другой — основные постулаты механики. Быть может, нам не следовало так поспешно считать эти новые факты окончательно установленными истинами и ниспровергать свои прежние идола; быть может, нужно было прежде, чем принять решение, подождать более многочисленных и более доказательных экспериментов. Тем не менее необходимо незамедлительно рассмотреть новые доктрины и теперь уже весьма серьезные доводы, на которые они опираются. Напомним, прежде всего, в нескольких словах, в чем состоят принципы динамики.

А. Движение изолированной материальной точки, не подвергающейся действию какой-либо внешней силы, прямолинейно и равномерно. Это принцип инерции — без силы нет ускорения.

В. Ускорение движущейся точки имеет то же направление, что и равнодействующая всех сил, приложенных к точке; оно равно частному от деления этой равнодействующей на коэффициент, называемый *массой* движущейся точки. Определяемая таким способом масса движущейся точки постоянна. Она не зависит от скорости, полученной этой точкой. Она одинакова и в случае, если сила, параллельная этой скорости, стремится ускорить либо замедлить движение точки, и в случае, если сила, перпендикулярная этой скорости, стремится изменить направление движения вправо или влево, т. е. *искривить* траекторию.

С. Все силы, воздействию которых подвергается материальная точка, происходят от действия других материальных точек. Они зависят только от *относительных* положений и скоростей этих точек. Объединяя В и С, мы приходим к *принципу относительного движения*, в силу которого законы движения системы одинаковы, отнести ли эту систему к неподвижным осям или отнести ее к движущимся прямолинейно и равномерно осям.

* Revue générale des Sciences pures et appliquées, 1908, 19, 386—402.

Таким образом, отличить абсолютное движение от относительного по отношению к таким осям невозможно.

Д. Если материальная точка A действует на другую материальную точку B , то и B в свою очередь действует на A , и оба эти действия представляют собой равные и противоположно направленные силы. Это *принцип равенства действия и противодействия*, или, короче, *принцип противодействия*.

Астрономические наблюдения и обычные явления физики как будто бы дали и дают этим принципам полное, постоянное и очень точное подтверждение. Это верно, говорят сейчас, но только потому, что мы имеем дело с малыми скоростями. Например, Меркурий — самая быстрая планета — движется лишь со скоростью 100 км/сек. Может быть, он вел бы себя иначе, если бы двигался в тысячу раз быстрее? Как видите, нам не о чем беспокоиться: как бы ни были велики успехи автомобилизма, пройдет немало времени, пока придется отказаться от применения к нашим машинам классических принципов динамики.

Каким же образом удалось осуществить скорости, в тысячу раз большие, чем скорость Меркурия, равные, например, одной десятой или одной трети скорости света, или даже еще более близкой к этой скорости? Это удалось с помощью катодных лучей и лучей радия.

Известно, что радий испускает три типа лучей, которые обозначаются тремя греческими буквами: α , β и γ ; в дальнейшем, за исключением специально оговоренных случаев, речь пойдет о β -лучах, аналогичных катодным лучам.

После открытия катодных лучей возникли две теории: Крукс приписывал эти явления действительным ударам частиц, а Герц — особым возмущениям эфира. Это было возобновлением спора, который сто лет тому назад разъединил физиков по вопросу о природе света. Крукс снова обратился к теории истечения, а Герц поддерживал волновую теорию. Факты как будто бы подтверждают точку зрения Крукса.

Прежде всего, было установлено, что катодные лучи переносят отрицательный электрический заряд. Они отклоняются магнитным и электрическим полями, и эти воздействия как раз такие, какие произвели бы эти же поля на частицы, обладающие очень большой скоростью и электрическим зарядом. Оба эти отклонения зависят от двух величин: от скорости и от отношения электрического заряда частицы к ее массе. Ни абсолютной величины этой массы, ни абсолютного значения заряда узнать нельзя, а только лишь их отношение. Действительно, если удвоить одновременно заряд и массу, не изменяя скорости, то мы удвоим силу, стремящуюся отклонить частицу, но так как масса также удвоена, то ускорение и наблюдаемое отклонение не изменятся. Наблюдение двух отклонений даст нам, следовательно, два уравнения для определения этих двух неизвестных. Таким образом, находим, что скорость лежит между 10 000 и 30 000 км/сек. Что касается отношения заряда к массе, то оно очень велико. Если сравнить его с соответствующим отношением для водородного иона при элек-

тролизе, то окажется, что катодная частица перенесет в 1000 раз больше электричества, чем перенесла бы равная ей масса водорода в электролите. Для подтверждения требовалось бы прямое измерение скорости частиц, которое потом можно было бы сравнить со скоростью, вычисленной таким способом. Прежние опыты Дж. Дж. Томсона [1] дали результат, в 100 раз меньший, но на них повлияли некоторые ошибки. Вихерт [2] снова занялся этим вопросом с помощью установки, где используются герцевские колебания. Полученные результаты согласуются с теорией, по крайней мере, по порядку величины. Было бы весьма интересно повторить подобные опыты. Как бы там ни было, но волновая теория катодных лучей, по-видимому, не в состоянии объяснить всю совокупность фактов.

Такие же расчеты для β -лучей радия дали еще более значительные скорости: 100 000, 200 000 км/сек и более. Подобные скорости намного превосходят все известные нам до сих пор. Правда, скорость света, как мы уже давно знаем, 300 000 км/сек, но при этом нет переноса вещества, тогда как, если принять теорию истечения, должны существовать материальные частицы, обладающие такими скоростями, и следует рассмотреть, применимы ли еще к ним обычные законы механики.

II. Продольная масса и поперечная масса

Известно, что электрический ток сопровождается явлением индукции, в частности *самоиндукции*. При возрастании тока развивается электродвижущая сила самоиндукции, стремящаяся противодействовать увеличению тока. При уменьшении же тока, электродвижущая сила самоиндукции стремится сохранить его. Следовательно, самоиндукция противодействует всякому изменению силы тока, подобно тому, как в механике инерция тела противодействует всякому изменению скорости. *Самоиндукция представляет собой настоящую инерцию*. Все происходит так, как если бы ток не мог возникнуть, не приводя в движение окружающий эфир, и как если бы инерция этого эфира стремилась, в конечном счете, сохранять неизменной силу тока. Чтобы возбудить ток, следует преодолеть эту инерцию, а чтобы прекратить ток, тоже следует ее преодолеть.

Катодные лучи, которые представляют поток частиц, заряженных отрицательным электричеством, можно рассматривать как ток. Конечно, он отличается, по крайней мере на первый взгляд, от обычного тока проводимости, где вещество неподвижно, а электричество течет через него. Катодные лучи — это *конвекционный ток*, где электричество, связанное с материальным носителем, перемещается при его движении. Но Роуланд показал, что конвекционные токи вызывают те же магнитные явления, что и токи проводимости: они должны вызывать и одинаковые явления индукции. Если бы это было не так, то нарушался бы принцип сохранения энергии. Впрочем, Кремье и Пандер [3] разработали метод, в котором явления индукции были *наглядно* продемонстрированы.

Если скорость катодной частицы изменится, то соответственно изменится и сила тока и возникнут явления самоиндукции, которые будут стремиться противодействовать этому изменению. Значит, частицы должны обладать двоякой инерцией: собственно инерцией и кажущейся инерцией, обязанной своим происхождением самоиндукции, вызывающей такие же явления. Следовательно, они будут обладать кажущейся суммарной массой, состоящей из действительной массы и мнимой массы электромагнитного происхождения. Расчет показывает, что эта мнимая масса меняется вместе со скоростью и что сила инерции самоиндукции не одинакова в тех случаях, когда частица ускоряется, либо замедляется, или же в тех случаях, когда частица отклоняется. Следовательно, так же обстоит дело и с суммарной кажущейся силой инерции.

Итак, кажущаяся суммарная масса не одинакова, когда действительная сила, приложенная к частице, параллельна скорости и стремится изменить ее величину, или когда она перпендикулярна скорости и стремится изменить ее направление. Нужно, следовательно, отличать *продольную суммарную массу* и *поперечную суммарную массу*. Обе массы зависят, к тому же, от скорости. Это вывод из теоретических работ Абрагама [4].

Какие величины мы определяем при измерениях, о которых речь шла в предыдущем разделе, определяя оба отклонения? Это, с одной стороны, скорость, а с другой — отношение заряда к *суммарной поперечной массе*. Как при данных условиях оценить, какую часть суммарной массы составляет действительная масса, а какую мнимая электромагнитная? Если бы существовали только катодные лучи, то об этом нечего было бы и думать, но, к счастью, мы имеем лучи радия, значительно более быстрые. Эти лучи не все одинаковы и ведут себя не одинаково под действием электрического и магнитного поля. Показано, что электрическое отклонение связано с магнитным отклонением, и, собирая на чувствительную пластинку лучи радия, подвергшиеся действию обоих полей, можно сфотографировать кривую, которая представляет собой зависимость между двумя этими отклонениями. Это сделал Кауфман [5] и вывел отсюда зависимость между скоростью частицы и отношением заряда к кажущейся суммарной массе — отношение, которое мы обозначим ϵ .

Можно было бы предположить, что существует несколько типов лучей, каждый из которых характеризуется определенными скоростью, зарядом и массой. Но эта гипотеза маловероятна. Действительно, по какой причине все частицы с одинаковой массой будут двигаться всегда с одинаковой скоростью? Гораздо естественнее предположить, что заряд и *действительная* масса одинаковы у всех частиц, а частицы отличаются друг от друга только своими скоростями. Если отношение ϵ есть функция скорости, то это не потому, что действительная масса меняется вместе со скоростью, а потому, что мнимая электромагнитная масса зависит от этой скорости, и суммарная кажущаяся масса — единственно наблю-

даемая — должна от нее зависеть, хотя действительная масса не зависит и остается постоянной.

Благодаря Абрагаму мы знаем закон, по которому *мнимая* масса меняется как функция скорости. Из опытов Кауфмана мы узнали закон, по которому изменяется *суммарная* масса. Сравнение этих двух законов позволяет определить отношение *действительной* массы к суммарной.

Таким методом и воспользовался Кауфман для определения этого отношения. Результат оказался поразительным: *действительная масса равна нулю*.

Таким образом, мы были вынуждены прийти к совершенно неожиданным заключениям. Мы распространили на все тела то, что было доказано только для катодных частиц. То, что мы называли массой, оказалось только видимостью. Вся инерция имеет электромагнитную природу. Но в таком случае масса не должна быть постоянной, она должна расти вместе со скоростью. Почти постоянная для скоростей до 1000 км/сек, она должна стать бесконечной для скорости, равной скорости света. Поперечная масса больше не должна быть равна продольной; они будут более или менее равны, если скорость не слишком велика. Принцип В механики более не верен.

III. Каналовые лучи

В настоящий момент этот вывод может показаться преждевременным. В самом деле, можно ли применять по отношению ко всему веществу в целом то, что было доказано лишь для таких легких частиц, которые сами являются только эманацией вещества, а может быть даже и не истинным веществом. Но прежде чем приступить к этому вопросу, необходимо сказать два слова о другом типе лучей. Я хочу остановиться сначала на *каналовых лучах* — Kanalstrahlen Гольдштейна. Катод, наряду с катодными лучами, заряженными отрицательным электричеством, испускает также каналовые лучи, заряженные положительно. Вообще говоря, так как каналовые лучи не отталкиваются катодом, они остаются в непосредственной близости к катоду, где и образуют прикатодный слой, который не так-то легко обнаружить. Но если катод дырчатый и почти целиком перекрывает трубку, то каналовые лучи начинают распространяться позади катода, в направлении, противоположном катодным лучам, и тогда их можно наблюдать. Так был обнаружен их положительный заряд и показано, что они, как и катодные лучи, отклоняются в магнитных и электрических полях, хотя и гораздо меньше.

Радий также испускает лучи, относительно сильно поглощаемые, подобные каналовым лучам; их называют α -лучами.

Для них можно, как и для катодных лучей, измерить оба отклонения и найти отсюда скорость и отношение e . Результаты менее постоянны, чем для катодных лучей, но скорость, как и отношение e , меньше. Положительные частицы имеют меньший заряд, чем отрицательные. Или же,

если предположить, что заряды у них одинаковы, но с противоположным знаком, а это гораздо естественнее, то положительные частицы значительно больше отрицательных. Эти частицы, одни заряженные положительно, другие — отрицательно, получили название *электронов*.

IV. Теория Лоренца

Но электроны заявляют о своем существовании не только в лучах, где они имеют огромные скорости. Мы увидим их в совершенно других ролях, они ответственны за основные явления оптики и электричества. Блестящее обобщение, о котором мы скажем ниже несколько слов, принадлежит Лоренцу.

Все вещество целиком состоит из электронов, несущих огромные заряды, и если оно кажется нам нейтральным, то это потому, что их компенсируют заряды противоположного знака. Мы можем для примера представить себе нечто вроде солнечной системы, состоящей из большого положительного электрона, вокруг которого вращается множество маленьких планет — отрицательных электронов, притягиваемых противоположным электричеством, которым заряжен центральный электрон. Отрицательные заряды этих планет компенсируют положительный заряд такого солнца, и алгебраическая сумма всех зарядов равняется нулю. Все эти электроны плавают в эфире. Эфир был бы везде одинаков, и возмущения в нем должны были бы распространяться по тем же законам, по которым свет или колебания Герца распространяются в *пустоте*. Кроме электронов и эфира, ничего нет. Когда световая волна проникает в ту часть эфира, где находится большое число электронов, то электроны под действием возмущения эфира приходят в движение и в свою очередь воздействуют на эфир. Этим и объясняется преломление, рассеяние, двойное лучепреломление и поглощение. Точно так же, если электрон по какой-либо причине приходит в движение, он возмущает вокруг себя эфир и порождает световые волны, что и объясняет свечение раскаленных тел.

В некоторых телах, например в металлах, имеются неподвижные электроны, между которыми передвигаются электроны подвижные, обладающие полной свободой, кроме свободы выходить из металлического тела и переходить поверхность, отделяющую его от внешней пустоты или воздуха, или любого другого неметаллического тела. Эти подвижные электроны ведут себя внутри металлического тела, согласно кинетической теории газов, подобно молекулам газа внутри сосуда, где этот газ заключен. Но под действием разности потенциалов отрицательные подвижные электроны будут все стремиться уйти в одну сторону, а положительные — в другую, что и создаст электрический ток. *По этой причине такие тела являются проводниками*. С другой стороны, если продолжить сравнение с кинетической теорией газов, скорости электронов будут тем большими, чем выше температура. Если один из под-

вижных электронов встретит поверхность металлического тела, поверхность, преодолеть которую он не может, он отразится от нее, как бильярдный шар, коснувшийся борта, и скорость его резко изменит направление. Но когда электрон меняет направление, то, как мы это увидим дальше, он становится источником световой волны. Вот почему нагретые металлы светятся.

В других телах — диэлектриках и прозрачных телах — подвижные электроны обладают гораздо меньшей свободой. Они как бы привязаны к притягивающим их неподвижным электронам. Чем больше они удаляются, тем это притяжение становится бóльшим и стремится вернуть их назад. Они могут совершать лишь небольшие колебания вокруг своего среднего положения. Поэтому такие тела не являются проводниками. В большинстве случаев они прозрачны и обладают способностью преломлять свет, потому что световые колебания передаются подвижным электронам, способным колебаться, в результате чего возникает возмущение.

Я не могу здесь привести подробных расчетов и ограничусь замечанием, что эта теория объясняет все уже известные факты и дает возможность предвидеть новые, как, например, явление Зеемана.

V. Следствия для механики

Теперь мы можем рассмотреть две гипотезы:

1. Положительные электроны имеют действительную массу, гораздо бóльшую, чем их мнимая электромагнитная масса; у отрицательных электронов нет действительной массы. Можно даже предположить, что кроме электронов обоих знаков имеются нейтральные атомы, у которых нет другой массы, кроме действительной. В этом случае механика не затронута и нам не требуется изменять ее законы. Действительная масса постоянна, лишь движения возмущены самоиндукцией, что, впрочем, было известно всегда. Однако возмущения пренебрежимо малы, за исключением случая отрицательных электронов, которые, не имея действительной массы, не являются веществом.

2. Но есть и другая точка зрения. Можно предположить, что нет никаких нейтральных атомов и что положительные электроны лишены действительной массы на том же основании, что и отрицательные. Но тогда, если действительная масса исчезает, слово *масса* либо теряет всякий смысл, либо оно должно обозначать мнимую электромагнитную массу. В этом случае масса не будет больше постоянной, поперечная *масса* не будет равна продольной, и принципы механики окажутся отвергнутыми.

Прежде всего — краткое пояснение. Мы говорили, что при одинаковом заряде *полная* масса положительного электрона гораздо больше полной массы отрицательного. Тогда естественно предположить, что эта разница объясняется тем, что положительный электрон имеет, кроме своей мнимой массы, бóльшую действительную массу. Это привело бы нас к первой гипотезе. Но можно также допустить, что действительная

масса равна нулю как у одних, так и у других, но что мнимая масса положительного электрона гораздо больше потому, что сам этот электрон гораздо меньше. Я не оговорился — гораздо меньше. И в самом деле, по этой гипотезе инерция имеет чисто электромагнитное происхождение, она сводится к инерции эфира. Электроны сами по себе ничего не значат. Это только дырки в эфире, вокруг которых возмущен эфир. Чем меньше дырки, тем больше вокруг них эфира, и тем большей, следовательно, будет инерция эфира.

Как выбрать из этих гипотез? Опириуя с каналовыми лучами, как это сделал Кауфман с β -лучами? Нельзя, так как скорость каналовых лучей слишком мала. Неужели каждому из нас придется решать самому, согласно своим наклонностям, и консерваторы пойдут в одну сторону, а любители нового — в другую? Возможно, но чтобы как следует объяснить доводы новаторов, нужно рассмотреть еще и другие соображения.

VI. Аберрация

Известно, в чем состоит явление аберрации, открытое Бредли [6]. Свет, испускаемый звездой, тратит какое-то время для прохождения через зрительную трубу. За это время труба, увлекаемая движущейся Землей, переместится. Поэтому, если труба ориентирована по направлению к *истинному* положению звезды, то изображение образуется в точке, где находилось перекрестье нитей в тот момент, когда свет достиг объектива. Но в момент, когда свет достигает плоскости сетки, само перекрестье уже сместится. Значит, для наблюдения звезды приходится поворачивать трубу так, чтобы изображение совместить с перекрестьем нитей. Отсюда вытекает, что астроном наводит трубу не в направлении абсолютной скорости света, т. е. не на истинное положение звезды, а в направлении относительной скорости света по отношению к Земле, т. е. на так называемое видимое положение звезды. На рис. 1 AB — абсолютная скорость света (с обратным знаком, поскольку наблюдатель находится в точке A , а звезда — на очень большом расстоянии в направлении AB), BD — скорость Земли, AD — *относительная* скорость света (опять-таки с обратным знаком). Астроном должен был бы навести свой инструмент по направлению AB , а направляет его по AD .

Величина AB , т. е. скорость света, известна. Казалось бы, имеется возможность вычислить BD , т. е. *абсолютную* скорость Земли (ниже я объясню смысл слова «абсолютная»). Однако это не так: нам известно видимое положение звезды, иначе говоря, направление AD , в котором мы и наблюдаем, но нам неизвестно ее истинное положение: мы знаем AB только по величине, а не по направлению.

Если абсолютная скорость Земли была бы неизменной по величине и направлению, мы никогда бы и не подозревали о существовании явления аберрации; эта скорость складывается из двух составляющих: постоянной по величине и направлению скорости солнечной системы, представ-

ленной отрезком BC , и переменной скорости Земли относительно Солнца, представленной отрезком CD . Результирующая скорость изображается отрезком BD .

Так как BC постоянна, то направление AC неизменно. Оно определяет *среднее* видимое положение звезды, тогда как направление AD , которое переменнo, определяет *мгновенное* видимое положение. Звезда описывает небольшой эллипс вокруг среднего видимого положения. Вот этот-то эллипс мы и наблюдаем.

Из законов Кеплера CD известно по величине и по направлению. Нам известно расстояние до Солнца, мы знаем AC и AD по направлению и можем, следовательно, построить треугольник ACD . Зная AC , получаем скорость света (изображенную через AB). Поскольку предполагается, что BC очень мало относительно AB , то AC очень мало отличается от AB . Входит лишь *относительная* скорость Земли по отношению к Солнцу.

Стоп! Мы считали AC равным AB . Это не совсем точно, а только некоторое приближение. Пойдем в этом направлении еще дальше. Размеры эллипса, описанного за год видимым положением звезды, зависят от известного нам отношения CD к длине AC . Наблюдение, таким образом, позволяет определить эту величину. Сравним большие оси эллипсов различных звезд. Мы получаем возможность, таким образом, для каждой из них определить AC по величине и направлению. Длина AB постоянна (это скорость света), поэтому точки B , соответствующие различным звездам, будут все находиться на одной сфере с центром A . Так как BC постоянно по величине и направлению, то точки B , соответствующие различным звездам, будут все находиться на сфере с радиусом AB и центром A' , вектор AA' равен и параллелен BC . Если бы теперь мы могли определить, как об этом только что говорилось, различные точки C , то мы определили бы эту сферу, ее центр A' и, следовательно, величину и направление абсолютной скорости BC .

Мы получили бы тогда способ определения абсолютной скорости Земли. Это, вероятно, оказалось бы не так странно, как может показаться вначале. Действительно, речь здесь идет о скорости не по отношению к абсолютно пустому пространству, а по отношению к эфиру, который по определению находится в абсолютном покое.

Это, впрочем, чисто теоретическая возможность. На самом деле, абerrация очень мала, возможные изменения эллипса абerrации еще меньше. И если считать абerrацию величиной первого порядка, то изменения надо считать величинами второго порядка, около тысячной доли секунды. Такие величины совершенно не регистрируются нашими приборами. В дальнейшем мы увидим, однако, почему предыдущую теорию вообще

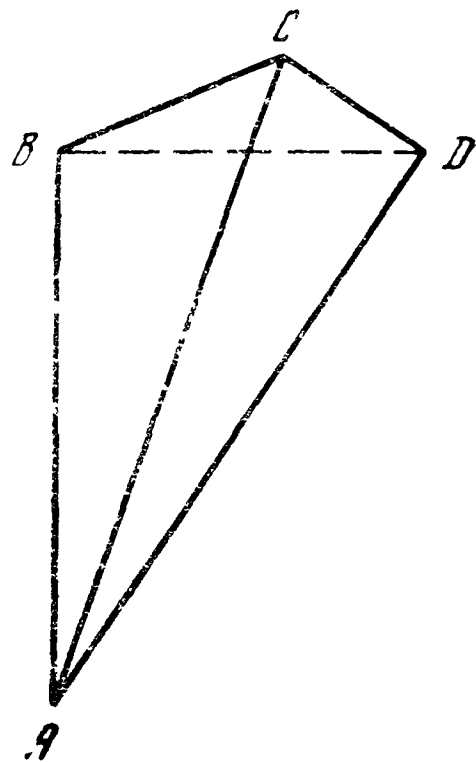


Рис. 1

следует отбросить и почему мы не можем определить BC , даже если бы наши приборы были точнее в 10 000 раз!

Можно было бы подумать еще об одном способе. И о нем действительно подумали. Скорость света в воде и в воздухе неодинакова. Нельзя ли было бы сравнить два видимых положения звезды, наблюдая ее попеременно через зрительную трубу, наполненную то водой, то воздухом [7]? Результаты оказались отрицательные: движение Земли не влияет на законы отражения и преломления. Объяснить это можно двояко.

1. Можно предположить, что эфир находится не в покое, а его увлекают за собой движущиеся тела. Тогда не было бы ничего удивительного в том, что движение Земли не влияет на преломление, так как все — призмы, зрительные трубы и эфир — одновременно вовлечены в одно общее поступательное движение. Что касается самой абберрации, то ее можно объяснить неким преломлением, которое происходит на поверхности, отделяющей эфир, находящийся в покое в межзвездных пространствах, от эфира, увлекаемого движением Земли. На этой гипотезе (полное увлечение эфира) построена электродинамика движущихся тел Герца [8].

2. Френель, с другой стороны, предположил, что эфир находится в абсолютном покое в пустоте, в почти абсолютном покое в воздухе, какова бы ни была скорость воздуха, и что он лишь частично увлекается преломляющей средой. Лоренц придал этой теории более удовлетворительный вид [9]. По его мнению, эфир находится в покое, а движутся только электроны. В пустоте, где только эфир играет роль, и в воздухе, где он играет основную роль, увлечение равно нулю, или почти нулю. В преломляющих средах, в которых возмущение происходит как из-за колебаний эфира, так и из-за колебаний электронов, приведенных в движение эфиром, волны увлекаются лишь *частично*.

При выборе между этими двумя гипотезами нам поможет опыт Физо. Физо сравнил, измеряя интерференционные полосы, скорость света в неподвижном и движущемся воздухе, а также скорость света в неподвижной и движущейся воде. Эти опыты подтвердили гипотезу Френеля о частичном увлечении. Их повторил с тем же результатом Майкельсон. *Значит, от теории Герца следует отказаться.*

VII. Принцип относительности

Но если эфир не увлекается движущейся Землей, то нет ли возможности, с помощью оптических явлений, обнаружить абсолютную скорость Земли, или, лучше сказать, ее скорость по отношению к неподвижному эфиру? Опыт дал на этот вопрос отрицательный ответ, хотя экспериментальные методы варьировались всеми возможными способами. Каким бы ни был применяемый метод, никогда не удастся обнаружить ничего иного, кроме относительных скоростей, — я имею в виду скорости материальных тел по отношению к другим материальным телам. Действительно, если источник света и приборы наблюдения находятся на Земле и участвуют

в ее движении, то результаты опытов всегда будут одинаковы, независимо от ориентации прибора по отношению к движению Земли по орбите. Если же есть абберрация, значит источник — звезда — находится в движении по отношению к наблюдателю.

Сделанные до сих пор предположения хорошо согласуются с этим общим выводом, *если только пренебречь очень малыми величинами, порядка квадрата абберрации.*

Теория опирается на понятие *местного времени*, которое я попытаюсь объяснить. Оно было введено Лоренцом. Положим, имеются два наблюдателя, находящиеся один в пункте A , другой — в пункте B . Им нужно сверить свои часы при помощи световых сигналов. Они условливаются, что наблюдатель в B пошлет сигнал в A , когда его часы покажут какой-то определенный час, а наблюдатель в A подведет свои часы в момент, когда он заметит сигнал. Если они будут действовать таким образом, то всегда будет иметь место систематическая ошибка, так как свету нужно какое-то время t , чтобы дойти от B до A , и часы в A всегда будут запаздывать на t по сравнению с часами в B . Эту ошибку легко исправить. Достаточно направить сигналы навстречу друг другу. Нужно, чтобы наблюдатель в A тоже послал сигнал в B . После этой новой настройки уже часы в B будут запаздывать на время t по сравнению с часами в A . Теперь достаточно будет взять среднее арифметическое этих двух поправок.

Но такой способ предполагает, что свету требуется одинаковое время, чтобы пройти от A до B и возвратиться из B в A . Это верно, если наблюдатели неподвижны, и неверно, если они вовлечены в какое-нибудь общее поступательное движение. Потому что тогда A , например, будет двигаться навстречу свету, приходящему из B , а B будет удаляться от света, приходящего из A . Значит, если оба наблюдателя участвуют в общем поступательном движении и не подозревают этого, их часы будут отрегулированы неправильно. Часы их будут показывать неодинаковое время, каждые часы покажут *местное время*, годное для точки, в которой они находятся.

Оба наблюдателя не имеют никакой возможности заметить это, если неподвижный эфир может передать им лишь световые сигналы, идущие все с одинаковой скоростью, и если другие сигналы, которые они могли бы послать друг другу, будут передаваться средой, вовлеченной в общее с ними поступательное движение. Явление, которое каждый из них наблюдает, будет для одного раньше, для другого позже. Оно произошло бы в один и тот же момент времени, только если бы не было поступательного движения. Но так как наблюдатели используют неодинаково отрегулированные часы, то различие это остается для них незамеченным. Отсюда следует, что если пренебречь квадратом абберрации, компенсация легко объяснима, и долгое время опыты были так неточны, что это можно было не учитывать. Но вот Майкельсон придумал гораздо более тонкий метод: он заставил интерферировать лучи, которые прошли различные пути после отражения в зеркалах. Так как каждый путь равнялся примерно метру,

а интерференционные полосы позволяли оценить разность путей порядка тысячных долей миллиметра, то уже нельзя было пренебречь квадратом абберации. *Тем не менее результаты оказались отрицательными.* Требовалось дополнить теорию, и это было сделано с помощью *гипотезы Лоренца и Фицджеральда.*

Эти физики предположили, что всякое тело при поступательном движении испытывает сокращение в направлении своего поступательного движения, в то время как его размеры в направлении, перпендикулярном этому движению, не изменяются. *Это сокращение одинаково для всех тел.* Впрочем, оно весьма мало — около одной двухсотмиллионной при такой скорости, как скорость Земли. Наши измерительные приборы не смогли бы его определить, даже если бы они были гораздо точнее. В самом деле, метры, которыми мы пользуемся при измерениях, испытывают то же сокращение, что и измеряемые предметы. Если тело точно равно метру, когда это тело, а следовательно и метр, ориентируют по направлению движения Земли, то оно не перестанет точно равняться метру и при другой ориентации (хотя и тело и метр вместе с ориентацией изменили и длину) как раз потому, что изменение одинаково как для одного, так и для другого. Но все будет иначе, если измерять длину не метром, а временем, за которое ее пробегает свет. Это и сделал Майкельсон.

Таким образом, сферическое (пока оно находится в покое) тело превратится, придя в движение, в сплюснутый эллипсоид вращения, но наблюдатель будет считать его все еще сферическим, потому что он сам подвергся такой же деформации, так же как и все предметы, служащие ему отправными ориентирами, а поверхности световых волн, которые остались строго сферическими, покажутся ему вытянутыми эллипсоидами.

Что при этом произойдет? Представим себе наблюдателя и источник света, вовлеченных в общее поступательное движение. Поверхности волн, излучаемых источником, будут представлять собой сферы, где центрами являются последовательные положения источника. Расстояние от такого центра до действительного положения источника пропорционально времени, прошедшему с момента излучения, иначе говоря, радиусу сферы. Все эти сферы будут, следовательно, гомотетичны друг другу по отношению к действительному положению S источника. Но для нашего наблюдателя все сферы покажутся из-за сокращения вытянутыми эллипсоидами, и все эллипсоиды еще будут гомотетичны по отношению к точке S . Эксцентриситет всех их будет один и тот же и зависит только от скорости Земли. *Подберем такой закон сокращения, при котором точка S окажется в фокусе меридионального сечения эллипсоида.*

Как теперь поступить, чтобы оценить время, за которое свет пройдет от B до A ? Я отмечу через A и B *видимые* положения этих двух точек (рис. 2) и построю эллипсоид, подобный эллипсоидам волн, о которых мы говорили выше, с большой осью, ориентированной по направлению движения Земли. Строю его так, чтобы он проходил через B , а фокус его находился в A .

По хорошо известному свойству эллипсоида получаем соотношение между видимым расстоянием AB двух точек и их проекцией AB'

$$AB + e \cdot AB' = OQ \sqrt{1 - e^2}.$$

Но малая полуось эллипсоида, которая имеет неизменный размер, равна Vt , где V — скорость света, а t — время прохождения. Отсюда

$$AB + e \cdot AB' = Vt \sqrt{1 - e^2}.$$

Эксцентриситет e — это константа, зависящая только от скорости Земли. Следовательно, мы имеем линейное соотношение между AB , AB' и t . Но AB' — это разность абсцисс точек A и B . Предположим, что разность между истинным и местным временем в какой-либо точке равна абсциссе этой точки, умноженной на постоянную

$$\frac{e}{V \sqrt{1 - e^2}};$$

кажущееся время прохождения света, следовательно, будет

$$\tau = t - AB' \frac{e}{V \sqrt{1 - e^2}};$$

отсюда

$$AB = Vt \sqrt{1 - e^2}.$$

Иначе говоря, *кажущееся* время прохождения пропорционально *видимому* расстоянию. На этот раз компенсация полная, что и доказывает опыт Майкельсона.

Выше я говорил, что согласно обычным взглядам, из наблюдений астрономической аберрации мы могли бы узнать абсолютную скорость Земли, если бы наши приборы были точнее в 1000 раз. Я должен модифицировать это утверждение. Да, из-за влияния абсолютной скорости наблюдаемые углы были бы другими, но разделенные окружности, которыми мы пользуемся при измерении углов, также были бы деформированы из-за поступательного движения: они превратились бы в эллипсы. Вследствие этого возникла бы ошибка при измерении угла, и *эта вторая ошибка в точности скомпенсировала бы первую*.

Гипотеза Лоренца и Фицджеральда кажется, на первый взгляд, весьма странной. Все, что мы можем сказать в настоящий момент в ее пользу, это то, что она является непосредственным выражением экспериментальных результатов Майкельсона, если *определять* расстояния временем, которое нужно свету для их прохождения.

Как бы там ни было, но невозможно избавиться от впечатления, что принцип относительности — это всеобщий закон природы. Мы никогда

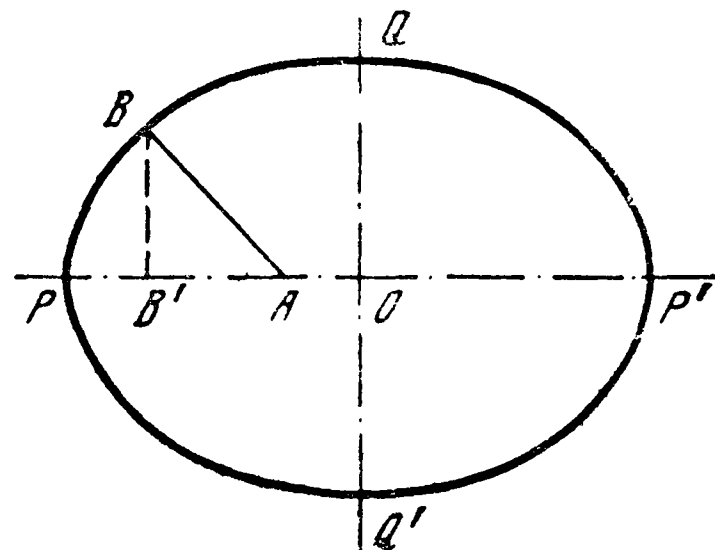


Рис. 2

никакими мыслимыми средствами не сможем обнаружить ничего, кроме относительных скоростей. Под этим я понимаю не только скорости тел по отношению к эфиру, но и скорости тел по отношению друг к другу. Слишком много опытов дали согласующиеся между собой результаты, чтобы не почувствовать желания приписать принципу относительности такое же значение, как, например, принципу эквивалентности. Но, как бы там ни было, а следует рассмотреть, к каким выводам приведет нас такой образ мыслей, и подвергнуть затем эти выводы проверке экспериментом.

VIII. Принцип противодействия

Посмотрим, что происходит в теории Лоренца с принципом равенства действия и противодействия. Вот электрон A , приходящий по какой-то причине в движение. Он создает возмущение в эфире, и через некоторое время это возмущение достигает другого электрона B и выводит его из положения равновесия. При этих условиях между действием и противодействием равенства быть не может, по крайней мере, если рассматривать не эфир, а электроны, которые *одни только и можно* наблюдать, поскольку наше вещество состоит из электронов.

Действительно, электрон A вывел из состояния равновесия электрон B , но если даже B в свою очередь окажет действие на A , это противодействие хотя и может быть равным действию, но, во всяком случае, не может быть одновременным с ним, так как электрон B может прийти в движение лишь через определенное, необходимое для распространения возмущения время. Если заняться более точным расчетом, то мы придем к следующему выводу.

Предположим, что вибратор Герца помещен в фокусе параболического зеркала, с которым он механически связан. Этот вибратор излучает электромагнитные волны, а зеркало отражает их в одном и том же направлении. Таким образом, вибратор будет излучать энергию в определенном направлении. Так вот, расчет показывает, что *вибратор подается при этом назад*, как пушка, пославшая снаряд. В случае пушки обратное движение — естественное следствие равенства действия и противодействия. Пушка движется назад потому, что снаряд, на который она действовала, оказал обратное действие на нее.

Здесь же все иначе. То, что мы послали вдаль, это уже не вещественный снаряд: это энергия, а энергия не имеет массы, значит, нет и отдачи. И вместо разрядника мы могли бы взять просто лампу с рефлексом, собирающим лучи в одном направлении.

Правда, если энергия, излучаемая вибратором или лампой, достигает материального предмета, то предмет получит механический толчок, как если бы его настиг настоящий снаряд, и толчок этот равен отдаче вибратора и лампы, если в пути не была потеряна энергия и если предмет полностью поглотит эту энергию. Поэтому можно было бы сказать, что здесь все еще имеет место равенство между действием и противодействием.

Но даже если они по величине равны, противодействие всегда запаздывает. И компенсация никогда не произойдет, если свет, покинув источник, бродит в межзвездных пространствах, не встречая материальных тел, и будет неполной, если тело, на которое свет попадает, не полностью его поглощает.

Не слишком ли малы эти механические воздействия, чтобы можно было их измерить, или же они доступны эксперименту? Эти воздействия не что иное, как эффекты, вызванные давлением Максвелла—Бартоли. Максвелл предсказал их из расчетов по электростатике и магнетизму, а Бартоли пришел к тем же выводам из термодинамических соображений.

Именно так объясняется существование *хвоста комет*. Маленькие частицы отрываются от ядра кометы. Солнечный свет ударяет по ним, как если бы это был дождь маленьких снарядов, летящих от Солнца, и отталкивает их. Масса кометных частичек так мала, что отталкивание одерживает верх над ньютоновским притяжением. Таким образом, они образуют хвост, направленный в сторону, противоположную Солнцу.

Было не так-то легко получить прямое подтверждение на опыте [10]. Первая попытка привела к созданию *радиометра*. Но прибор этот вращался в направлении, противоположном предсказываемому теорией. Объяснение причины его вращения, найденное впоследствии, оказалось совсем иное. В конце концов добились успеха, во-первых, создав лучший вакуум, а во-вторых, не покрывая черной краской одну из поверхностей лопаток и направляя световой пучок на одну из этих сторон. Эффекты, связанные с радиометром, и другие источники возмущений устранялись целым рядом предосторожностей, и было получено отклонение, весьма малое, но, по-видимому, согласующееся с теорией.

Те же эффекты давления Максвелла—Бартоли предсказаны также теорией Герца, о которой мы упоминали выше, и теорией Лоренца. Но есть здесь и отличие. Предположим, что энергия, например в форме света, идет от светового источника к какому-либо телу через прозрачную среду. Давление Максвелла—Бартоли будет действовать не только на источник в начале и на освещенное тело в конце движения, но также и на прозрачную среду, через которую оно проходит. В тот момент, когда световая волна придет в новую область этой среды, давление оттолкнет вперед вещество, которое там находится, и оттолкнет его назад, когда свет покинет эту область. Противодействием для сдвига источника назад служит продвижение вперед прозрачного вещества, соприкасающегося с источником. В следующий момент отход этого вещества назад имеет противодействием продвижение вперед прозрачного вещества, находящегося немного впереди, и т. д.

Однако происходит ли при этом полная компенсация? Равно ли действие давления Максвелла—Бартоли на прозрачную среду противодействию на источник независимо от того, каково это вещество? Или же воздействие будет тем меньше, чем менее преломляет среда и чем она более разрежена, постепенно обращаясь в нуль в пустоте? Если придер-

живаться теории Герца, согласно которой вещество механически связано с эфиром, так что эфир целиком увлекается им, то следует на первый вопрос ответить — да, а на второй — нет.

При этом будет осуществляться полная компенсация, как этого требует принцип равенства действия и противодействия, даже в наименее преломляющей среде, даже в воздухе, даже в межпланетной пустоте, где достаточно предположить следы вещества, как бы ничтожны они ни были. Если же выбрать теорию Лоренца, то компенсация никогда не бывает полной, в воздухе она почти незаметна, а в пустоте равна нулю.

Но выше мы видели, что опыт Физо не позволяет уже придерживаться теории Герца. Нужно, следовательно, принять теорию Лоренца и, значит, *отказаться от принципа противодействия*.

IX. Следствия принципа относительности

Выше мы разобрали причины, побуждающие нас рассматривать принцип относительности как основной закон природы. Посмотрим, к каким следствиям приведет этот принцип, если мы будем считать его окончательно установленным.

Во-первых, он обязывает обобщить гипотезу Лоренца—Фицджеральда о сокращении всех тел в направлении поступательного движения. В частности, следует распространить эту гипотезу на сами электроны. Абрагам считает их сферическими и недеформируемыми, но нам придется допустить, что они сферичны, пока находятся в покое, а в движении, испытывая лоренцово сокращение, становятся сплюснутыми эллипсоидами.

Такая деформация должна влиять и на их механические свойства. Действительно, я уже говорил, что смещение заряженных электронов представляет собой настоящий конвекционный ток, а их кажущаяся инерция вызвана самоиндукцией этого тока. Это относится только к отрицательным электронам (только или нет — неизвестно, ведь мы пока еще ничего не знаем о положительных электронах). Так вот, деформация электронов, зависящая от их скорости, должна изменить распределение электричества на их поверхности и, следовательно, силу конвекционного тока, который они создают, а потому и законы, по которым самоиндукция этого тока меняется в зависимости от скорости.

При этом компенсация будет полной и соответствовать требованиям принципа относительности, но при двух условиях:

1. Чтобы положительные электроны имели не действительную, а только мнимую электромагнитную массу. Или, по крайней мере, чтобы их действительная масса, если она имеется, не была постоянной и изменялась вместе со скоростью по тем же законам, что и мнимая.

2. Чтобы все силы были электромагнитного происхождения или, по крайней мере, чтобы они изменялись вместе со скоростью по тем же законам, что и силы электромагнитного происхождения.

Это замечательное обобщение также сделано Лоренцом; остановимся на нем и посмотрим, что отсюда следует. Прежде всего, нет уже вещества, поскольку положительные электроны не имеют действительной массы, или, во всяком случае, постоянной действительной массы. Поэтому современные принципы механики, основанные на постоянстве массы, должны быть изменены.

Кроме того, необходимо найти электромагнитное объяснение всем известным силам, в частности гравитации, или, по крайней мере, так изменить закон тяготения, чтобы эта сила менялась со скоростью так же, как и электромагнитные силы. Мы еще вернемся к этому пункту.

Все это выглядит на первый взгляд немного искусственным. В частности, такая деформация электронов кажется весьма гипотетичной. Но можно представить дело иначе, не считая гипотезу о деформации основой рассуждения. Пусть электроны — материальные точки. Каким образом должна меняться их масса в зависимости от скорости, чтобы не противоречить принципу относительности? Или, лучше сказать, каким должно быть их ускорение под действием электрического или магнитного поля, чтобы принцип этот не был нарушен и чтобы при переходе к малым скоростям можно было снова вернуться к обычным законам? Мы покажем, что изменения этой массы или ускорений должны происходить так, *как если бы* электрон испытывал деформацию Лоренца.

Х. Опыт Кауфмана

Итак, перед нами две теории: по теории Абрагама электроны не деформируются; по другой теории они испытывают лоренцову деформацию. В обоих случаях их масса возрастает вместе со скоростью и становится бесконечной, когда скорость становится равной скорости света; но закон, по которому масса меняется, не одинаков в обеих теориях [11]. Метод, которым пользовался Кауфман для определения закона изменения массы, дает, по-видимому, возможность на опыте выбрать одну из этих теорий [12].

К сожалению, первые опыты не были для этого достаточно точными. Поэтому Кауфман счел нужным проделать их снова с большими предосторожностями и более тщательно измеряя напряженности полей. Повторные опыты *подтвердили теорию Абрагама*. Значит, принцип относительности не обладает той универсальностью, которую ему хотели приписать. И теперь нет оснований считать, что положительные электроны лишены действительной массы.

Тем не менее, прежде чем окончательно согласиться с таким выводом, необходимо сделать несколько замечаний. Вопрос этот имеет такое значение, что было бы желательно, чтобы кто-нибудь другой повторил опыт Кауфмана. К сожалению, это весьма тонкий опыт, и завершить его успешно сможет лишь физик, не менее искусный, чем сам Кауфман. Кауфман принял все меры предосторожности, и неясно, какие возражения можно было бы выдвинуть против работы Кауфмана.

Есть, однако, один пункт, к которому я хотел бы привлечь внимание. Это измерение электростатического поля — измерение, от которого зависит все. Поле это создавалось между двумя пластинами конденсатора, и между этими двумя пластинами нужно было получить исключительно хороший вакуум, чтобы добиться полной изоляции. Была измерена разность потенциалов между обеими пластинами, а напряженность поля найдена делением этой разности на расстояние между пластинами. Это верно, если поле однородно. Но так ли это? Не может ли существовать резкое падение потенциала вблизи пластины, например вблизи отрицательной пластины? Возможно, имеет место разность потенциалов на границе металл — вакуум и эта разность неодинакова с положительной и отрицательной сторон. Я подозреваю это по аналогии с электрическим вентильным эффектом между ртутью и вакуумом.

Как бы ни была мала вероятность этого, по-видимому, следует считать с такой возможностью.

XI. Принцип инерции

В новой динамике все еще верен принцип инерции — *изолированный* электрон будет двигаться равномерно и прямолинейно. По крайней мере, большинство разделяет такой взгляд. Однако Линдеман возражает против этого. Я не хочу становиться на чью-либо сторону в споре, изложить который не могу здесь из-за слишком резкого характера его. Во всяком случае, достаточно сделать небольшие поправки к теории, чтобы обойти возражения Линдемана.

Известно, что тело, погруженное в жидкость, испытывает во время движения значительное сопротивление. Это происходит потому, что мы имеем дело с вязкими жидкостями. В идеальной жидкости, совершенно лишенной вязкости, тело приводило бы в движение жидкость позади себя, создавая нечто вроде струи, образующейся обычно за кормой. Вначале потребуются большое усилие, потому что нужно привести в движение не только само тело, но и жидкость. Но как только движение установится, оно будет продолжаться без всякого сопротивления, поскольку тело в своем движении будет переносить вместе с собой возмущение жидкости, причем полная живая сила жидкости не будет увеличиваться. Все произойдет так, как будто увеличилась инерция тела. Электрон, двигаясь в эфире, поведет себя таким же образом: вокруг него эфир будет возмущен, но это возмущение будет сопровождать тело в его движении. Таким образом, для наблюдателя, движущегося вместе с электроном, электрическое и магнитное поля, сопровождающие электрон, будут казаться неизменными и могут измениться, только если изменится скорость электрона. Понадобится, следовательно, усилие, чтобы привести электрон в движение, поскольку нужно будет создать эти поля. Однако же, как только движение установится, не потребуется больше никакого усилия для поддержания его, так как созданной энергии останется лишь

переноситься вслед за электроном, подобно следу в жидкости. Эта энергия может, следовательно, лишь увеличивать инерцию электрона, как волнение увеличивает инерцию тела, погруженного в идеальную жидкость. Более того, отрицательные электроны обладают только такой энергией.

Согласно гипотезе Лоренца, живая сила, которая есть не что иное, как энергия эфира, пропорциональна не v^2 , а $\frac{V - \sqrt{V^2 - v^2}}{\sqrt{V^2 - v^2}}$. Так как V — скорость света, то количество движения пропорционально теперь не v , а $\frac{v}{\sqrt{V^2 - v^2}}$; поперечная масса обратно пропорциональна $\sqrt{V^2 - v^2}$, продольная обратно пропорциональна кубу этой величины. Видно, что если v очень мала, живая сила практически будет пропорциональна v^2 , количество движения пропорционально v , обе массы постоянны и равны между собой. Но если скорость стремится к скорости света, то живая сила, количество движения и обе массы безгранично возрастают.

В гипотезе Абрагама формулы немного сложнее, но в основном имеет место то же самое.

Так, например, масса, количество движения, живая сила становятся бесконечно большими, если скорость равна скорости света. Отсюда следует, что ни одно тело никаким способом не может достигнуть большей скорости, чем скорость света. Действительно, по мере возрастания скорости возрастает и его масса, так что инерция оказывает все большее сопротивление каждому новому увеличению скорости.

Правда, некоторые авторы статей по динамике электрона говорят о телах, движущихся быстрее света, но они рассматривают вопрос о том, как будет вести себя тело с начальной скоростью, большей скорости света. Следовательно, речь идет о теле, которое уже перешло эту границу, и никто не обмолвился ни словом, каким же образом оно смогло эту границу перейти.

Теперь возникает вопрос: допустим, что принцип относительности имеет место. При этом наблюдатель, находящийся в движении, не имеет возможности заметить свое движение. И если тело в своем абсолютном движении не может превысить скорость света, но может сколь угодно близко подойти к ней, то так же должно обстоять дело и с его относительным движением по отношению к нашему наблюдателю. При этом возникает соблазн рассуждать следующим образом: наблюдатель может достигнуть скорости в 200 000 км/сек; тело в своем относительном движении (по отношению к наблюдателю) может достигнуть той же скорости. При этом абсолютная скорость тела будет равна 400 000 км/сек, что невозможно, так как она превосходит скорость света.

Тут необходимо иметь в виду способ определения относительных скоростей. При вычислении надо брать не истинное, а местное время. Пусть A и B — две точки, постоянно связанные с наблюдателем; пусть t и $t+h$ — моменты, когда тело проходит через A и B , вычисленные по ис-

тинному времени; пусть αt и $\alpha(t+h)$ — те же моменты, вычисленные по времени, местному для A ; пусть $\alpha(t+\varepsilon)$ и $\alpha(t+h+\varepsilon)$ — те же моменты, вычисленные по времени, местному для B . Если вычислять продолжительность пробега по истинному времени, то эта продолжительность будет h , а относительная скорость — AB/h . Но мы должны ее вычислить по местному времени, т. е. отметить момент прохождения через A по времени, местному для A , а момент прохождения через B — по времени, местному для B . Таким образом, продолжительность пробега будет $\alpha(\varepsilon+h)$, а относительная скорость $AB/\alpha(\varepsilon+h)$.

Таким образом, происходит компенсация.

ХII. Волна ускорения

Когда электрон движется, он производит возмущение в окружающем его эфире. Если движение его равномерно и прямолинейно, то это возмущение — след, о котором мы говорили в предыдущем разделе. Но если движение криволинейно или неравномерно, дело обстоит иначе. Возмущение тогда можно считать наложением двух других возмущений, которые Ланжевен назвал *волной скорости* и *волной ускорения*. Волна скорости — это не что иное, как след, возникающий при равномерном движении. Поясню: пусть M — некоторая точка в эфире, наблюдаемая в момент времени t ; P — положение электрона в предшествующий момент времени $t-h$, такой, что h — как раз то время, которое необходимо свету, чтобы пройти из P в M . Пусть v — скорость, которую имел электрон в момент времени $t-h$. Так вот, если мы будем рассматривать только волну скорости, то возмущение в точке M будет таким, как если бы электрон продолжал свой путь, начиная с момента времени $t-h$, сохраняя скорость v и двигаясь равномерно и прямолинейно. Что касается волны ускорения, то это возмущение, совершенно подобное световым волнам. Оно излучается электроном в тот момент, когда он получает ускорение и далее распространяется в виде последовательных сферических волн со скоростью света.

Отсюда делаем следующий вывод: при равномерном прямолинейном движении энергия полностью сохраняется, но как только имеет место ускорение, то сразу имеет место и потеря энергии, которая рассеивается в виде световых волн и уходит по эфиру в бесконечность.

Однако действием такой волны ускорения, в частности потерей соответствующей энергии, в большинстве случаев можно пренебречь. Это применимо не только к обычной механике и движению небесных тел, но и к лучам радия, где скорость частиц весьма велика, а ускорение невелико. Тогда мы можем применить обычные законы механики и записать, что сила равна произведению ускорения на массу. Впрочем, эта масса может меняться вместе со скоростью, согласно законам, изложенным выше. При этом говорят, что движение *квазистационарно*.

Все будет иначе в тех случаях, когда ускорение велико. Главные из этих случаев следующие:

1. В раскаленных газах некоторые электроны приходят в колебательное движение с весьма большой частотой. Перемещения очень малы, скорости конечны, ускорения же очень велики. При этом энергия передается эфиру, и поэтому такие газы излучают свет того же периода, что и колебания электронов.

2. Наоборот, когда свет попадает на газ, то те же электроны приводятся в движение с большими ускорениями и поглощают свет.

3. В вибраторе Герца электроны, движущиеся в металле, испытывают в момент разряда резкое ускорение и затем начинают колебаться с высокой частотой. В результате часть энергии излучается в виде волн Герца.

4. В раскаленном металле электроны обладают большими скоростями. У поверхности, которую они не могут преодолеть, электроны отражаются и испытывают, таким образом, значительное ускорение. Поэтому такой металл излучает свет. Я об этом уже говорил в разделе IV. Детали законов излучения света черным телом превосходно объясняются этой гипотезой.

5. Наконец, когда катодные лучи ударяются об антикатод, образующие эти лучи отрицательные электроны, имеющие большие скорости, резко останавливаются. Из-за возникающего таким образом ускорения они создают возмущения в эфире. По мнению некоторых физиков, это и является причиной рентгеновских лучей, которые представляют собой не что иное, как световые лучи очень короткой длины волны.

XIII. Гравитация

Массу можно определить двумя способами:

1) как частное от деления силы на ускорение; это то определение массы, которое измеряет инерцию тела;

2) как притяжение, с которым тело действует на другое тело в силу закона Ньютона.

Поэтому мы должны отличать массу — коэффициент инерции и массу — коэффициент притяжения. По закону Ньютона между этими двумя коэффициентами существует строгая пропорциональность. Но это было доказано только для скоростей, к которым применимы общие принципы динамики. Теперь мы видели, что масса — коэффициент инерции — возрастает вместе со скоростью. Следует ли из этого заключить, что масса — коэффициент притяжения — также возрастает вместе со скоростью и остается пропорциональной коэффициенту инерции или же что этот коэффициент притяжения остается постоянным? Это тот вопрос, решить который у нас нет никакой возможности.

С другой стороны, если коэффициент притяжения зависит от скорости, то так как скорости двух тел, притягивающих друг друга, обычно не одинаковы, то как этот коэффициент будет зависеть от таких двух скоростей? Мы можем делать по этому поводу только предположения и, естественно,

склонны к выбору тех предположений, которые были бы совместимы с принципом относительности. Их много; единственное, о котором я здесь коротко расскажу, это гипотеза Лоренца.

Рассмотрим сначала электроны в состоянии покоя. Два электрона одного знака отталкиваются, а два электрона противоположных знаков притягиваются. По обычной теории их действия друг на друга пропорциональны их зарядам. Поэтому если у нас имеются четыре электрона: два положительных — A и A' и два отрицательных — B и B' , и если их заряды одинаковы по абсолютной величине, то отталкивание A от A' будет на одном и том же расстоянии равно отталкиванию B от B' , а также равно притяжению A к B' или B' к A . Следовательно, если A и B находятся очень близко друг к другу, так же как A' к B' , и если мы станем рассматривать действие системы $A+B$ на систему $A'+B'$, то получим два отталкивания и два притяжения, которые в точности друг друга компенсируют, и результирующее действие будет равно нулю.

Но молекулы вещества и следует как раз рассматривать как нечто подобное солнечным системам, где вращаются электроны — одни положительные, другие отрицательные, — причем так, что алгебраическая сумма всех зарядов равна нулю. Следовательно, молекулу можно с любой точки зрения уподобить системе $A+B$, о которой мы только что говорили, так что результирующее электрическое действие двух молекул друг на друга должно бы быть равным нулю.

Однако из опыта мы знаем, что молекулы притягиваются друг к другу по закону тяготения Ньютона. Тогда можно выдвинуть две гипотезы: можно предположить, что гравитация не имеет ничего общего с электростатическим притяжением, что она обязана своим происхождением совершенно другой причине и здесь она просто накладывается; или же можно допустить, что в притяжении зарядов нет пропорциональности, и притяжение заряда $+1$ к -1 больше, чем взаимное отталкивание двух зарядов $+1$ или двух зарядов -1 .

Другими словами, электрические поля, созданные положительными и отрицательными электронами, накладываются одно на другое, но остаются различными. Положительные электроны более чувствительны к полям, созданным отрицательными электронами, чем к полям, созданным положительными; то же, но только в обратном порядке, относится и к отрицательным электронам. Ясно, что это предположение несколько усложняет электростатику, но вводит в нее гравитацию. Такова была, в общем, гипотеза Франклина. Что же происходит, если электроны движутся? Положительные электроны вызовут возмущение в эфире и создадут в нем электрическое и магнитное поля. То же произойдет и с отрицательными электронами. Положительные и отрицательные электроны получают под действием этих полей механический импульс. По обычной теории электромагнитное поле, обязанное своим происхождением движению положительных электронов, оказывает на два электрона с разными знаками, но одинаковым абсолютным зарядом одинаковое по величине, но противо-

положное по направлению действие. Но тогда вполне уместно не различать поле, созданное движением положительных электронов, от поля, созданного движением отрицательных электронов, а рассматривать лишь алгебраическую сумму этих полей, т. е. результирующее поле.

По новой теории действие на положительные электроны электромагнитного поля, созданного положительными электронами, происходит по обычным законам. То же относится и к действию на отрицательные электроны поля, созданного отрицательными электронами. Рассмотрим теперь действие поля, созданного положительными электронами, на отрицательные (или наоборот). Оно все еще будет следовать тем же законам, но с другим коэффициентом. Каждый электрон более чувствителен к полю, созданному электронами противоположного знака, чем к полю, созданному электронами одного с ним знака.

Такова гипотеза Лоренца, которая сводится к гипотезе Франклина для малых скоростей, поэтому при малых скоростях она приводит к закону Ньютона. Более того, так как гравитация сводится к силам электродинамического происхождения, то к ней применима общая теория Лоренца и, следовательно, не нарушается принцип относительности. Мы видим, что закон Ньютона не применим более при больших скоростях и должен быть изменен для движущихся тел точно так же, как законы электростатики были изменены для движущегося электричества.

Известно, что электромагнитные возмущения распространяются со скоростью света. Поэтому возникает желание отказаться от предыдущей теории, вспомнив, что гравитация распространяется, согласно вычислениям Лапласа, по крайней мере в десять миллионов раз быстрее, чем свет, и потому не может быть электродинамического происхождения. Результат Лапласа хорошо известен, но ему обычно не придают значения. Лаплас предполагал, что если распространение гравитации не мгновенно, то скорость ее складывается со скоростью притягиваемого тела, как это происходит со светом при астрономической аберрации. Таким образом, результирующая сила направлена не по прямой, соединяющей оба тела, но образует с ней небольшой угол. Это совсем особая гипотеза, довольно плохо обоснованная, и, во всяком случае, совершенно отличная от гипотезы Лоренца. Результат Лапласа никак не свидетельствует против теории Лоренца.

XIV. Сравнение с астрономическими наблюдениями

Согласуются ли предыдущие теории с астрономическими наблюдениями? Прежде всего, если принять их, то энергия движения планет должна постоянно рассеиваться из-за действия волн ускорения. Из этого следовало бы, что средние движения светил все время должны ускоряться, как если бы светила двигались в среде с сопротивлением. Но эффект этот крайне мал, гораздо меньше, чем нужно для его обнаружения. Уско-

рение небесных тел сравнительно мало, так что действие волны ускорения пренебрежимо мало, и движение может считаться *квазистационарным*. Правда, действие волны ускорения постоянно накапливается, но само это накопление идет так медленно, что потребовались бы тысячи лет наблюдений, чтобы оно стало заметно.

Поэтому сделаем вычисления, считая движение квазистационарным и сделав следующие три допущения:

А. Примем гипотезу Абрагама (недеформируемые электроны) и оставим закон Ньютона в его обычном виде.

В. Примем гипотезу Лоренца о деформации электрона и сохраним закон Ньютона в его обычном виде.

С. Примем гипотезу Лоренца об электронах и видоизменим закон Ньютона, как мы это сделали в разделе XIII, таким образом, чтобы он стал совместим с принципом относительности.

Эффект заметнее всего скажется в движении Меркурия [¹³], потому что скорость движения этой планеты наибольшая. Когда-то Тиссеран сделал такие же вычисления, исходя из закона Вебера. Напомню, что Вебер хотел одновременно объяснить явления электростатики и электродинамики, предположив, что электроны (которые тогда еще не имели названия) испытывают взаимные притяжения и отталкивания, направленные по соединяющей их прямой и зависящие не только от расстояния между ними, но и от первых и вторых производных этих расстояний, следовательно, от их скоростей и ускорений. Этот закон Вебера, довольно сильно отличающийся от законов, которые большинством приняты в наши дни, тем не менее имеет с ними известное сходство.

Тиссеран нашел, что если ньютоновское притяжение происходит по закону Вебера, то для перигелия Меркурия должно существовать вековое изменение в $14''$ *того же направления, какое наблюдалось, но не получило объяснения*. Однако вычисленное значение меньше наблюдаемого, равного $38''$.

Вернемся к допущениям А, В и С и рассмотрим вначале движение планеты, притягиваемой неподвижным центром. Тогда допущения В и С не отличаются друг от друга, так как если притягивающая точка неподвижна, то поле, которое она создает, будет чисто электростатическим и притяжение изменится обратно квадрату расстояний, согласно закону Кулона, идентичному закону Ньютона.

Уравнение живых сил продолжает оставаться верным, если дать новое определение живой силы; точно так же уравнение площадей заменяется другим, эквивалентным; момент количества движения постоянен, но количество движения должно определяться так, как это делается в новой динамике.

Единственным заметным эффектом будет вековое движение *перигелия*. Из теории Лоренца можно найти для этого движения половину той величины, которую дал закон Вебера; при помощи теории Абрагама — две пятых.

Если представить себе теперь два тела, движущихся вокруг общего центра тяжести, то окажется, что результаты отличаются очень мало, хотя вычисления будут несколько сложнее. Движение перигелия Меркурия составляет $7''$ по теории Лоренца и $5'',6$ по теории Абрагама. Эффект, впрочем, будет пропорционален $n^3 a^2$, где n — среднее движение светила, и a — радиус его орбиты. Для планет, в силу закона Кеплера, действие меняется как величина, обратная $\sqrt{a^3}$; как видим, он ничтожно мал для всех планет, за исключением Меркурия.

Он несуществен также и для Луны, хотя n здесь велико, потому что радиус a крайне мал. Для Венеры он в пять раз меньше, а для Луны в шестьсот раз меньше, чем для Меркурия. Добавим также, что для Венеры и Земли движение перигелия (при одинаковой угловой скорости) было бы гораздо труднее обнаружить с помощью астрономических наблюдений, так как эксцентриситет их орбит гораздо меньше, чем у Меркурия.

В итоге единственным заметным при астрономических наблюдениях эффектом будет движение перигелия Меркурия. Это движение того же рода, что уже наблюдалось, хотя и не было объяснено, но значительно меньшее по величине.

Все это нельзя считать аргументом в пользу новой динамики, поскольку и там нам нужно искать иное объяснение для бóльшей части аномалии Меркурия, но еще менее это можно считать аргументом против нее.

XV. Теория Лесажа

Чтобы объяснить всемирное тяготение, следует сопоставить эти соображения с уже давно предложенной теорией. Представим себе, что в межпланетном пространстве во всех направлениях с большими скоростями движутся очень редкие частицы. На одно тело удары этих частиц не окажут никакого заметного действия, поскольку такие удары распределяются равномерно по всем направлениям. Но если имеются два тела — A и B , то тело B будет играть роль экрана и перехватит часть корпускул, которые при его отсутствии попали бы в A . Тогда удары, полученные A со стороны, противоположной B , не будут полностью скомпенсированы, и A начнет двигаться к B .

Такова теория Лесажа, и мы ее обсудим сначала с точки зрения обычной механики. Прежде всего, как должны происходить соударения согласно этой теории — по закону упругих тел или по закону тел, лишенных упругости, либо, наконец, по какому-то промежуточному закону? Частицы Лесажа не могут вести себя как упругие тела, иначе эффект бы равнялся нулю, так как вместо частиц, перехваченных телом B , были бы другие, которые отскочили бы от B , и расчет показывает, что при этом компенсация была бы полной.

Нужно, следовательно, чтобы при ударе частицы теряли энергию и чтобы она превращалась в тепло. Но каково должно быть количество

созданного тепла? Заметим, что притяжение проходит сквозь тела. Например, мы должны представить себе Землю не как сплошной экран, а как бы образованный из большого числа очень маленьких сферических частиц. Каждая из них играет роль маленького экрана, но между ними могут свободно проходить частицы Лесажа.

Итак, мало того, что Земля — не сплошной экран, но она даже не дуршлаг, так как пустот в ней больше, чем заполненных мест. Для пояснения напомним: Лаплас доказал, что притяжение, проходя через Землю, ослабляется самое большее на одну десятимиллионную. Доказательство это не оставляет желать ничего другого: действительно, если притяжение поглощается телами, через которые оно проходит, то оно уже более не пропорционально массам. Оно относительно меньше для больших тел, чем для малых, так как ему нужно проходить через большую толщу.

Притяжение Земли к Солнцу было бы при этом относительно слабее, чем притяжение Луны к Солнцу, и следствием этого была бы весьма заметная неправильность в движении Луны. Отсюда мы должны заключить, если принять теорию Лесажа, что общая поверхность сферических частиц, образующих Землю, представляет собой, самое большее, одну десятимиллионную общей поверхности Земли.

Дарвин показал, что теория Лесажа ведет к закону Ньютона, только если допустить, что частицы совершенно не упруги. Тогда притяжение, оказываемое Землей на массу 1, на расстоянии 1, будет одновременно пропорционально общей поверхности S сферических частиц, скорости v частиц и квадратному корню из плотности ρ среды, образованной частицами. Образующееся тепло будет пропорционально S , плотности ρ и кубу скорости v .

Но нужно также учитывать сопротивление, которое испытывает тело, двигаясь в подобной среде. Действительно, оно не может передвигаться, не идя навстречу некоторым ударам и, напротив, уходя от других, направляющихся с противоположной стороны, так что компенсация, осуществляющаяся в состоянии покоя, более не может иметь места. Вычисленное сопротивление пропорционально S , ρ и v . Однако известно, что небесные тела перемещаются так, как если бы они вообще не испытывали сопротивления, и точность наблюдений дает нам возможность определить предел величины сопротивления среды.

Так как это сопротивление меняется как $S\rho v$, а притяжение меняется как $Sv\sqrt{\rho}$, то отношение сопротивления к квадрату притяжения есть величина, обратно пропорциональная произведению Sv . Следовательно, мы имеем здесь нижний предел для произведения Sv . Мы уже знаем верхний предел для S (из поглощения притяжения телами, через которое оно проходит). Потому нижний предел этот меньше скорости v , которая должна быть равна, по крайней мере, $24 \cdot 10^{17}$ скорости света.

Отсюда можно найти ρ и количество создаваемого тепла. Этого количества хватило бы, чтобы каждую секунду поднимать температуру Земли

на 10^{26} градусов. За данное время Земля должна была бы получать тепла в 10^{20} раз больше, чем излучает его Солнце за то же время. Я говорю даже не о том тепле, которое Солнце посылает к Земле, а о том, которое оно излучает по всем направлениям. Очевидно, Земля недолго могла бы существовать при таких условиях.

Мы пришли бы к не менее фантастическим результатам, если бы, вопреки взглядам Дарвина, считали лесажевские частицы не вполне неупругими. Тогда живая сила этих частиц не полностью превращалась бы в тепло, но и притяжение было бы меньше, так что только часть этой живой силы, превращенной в тепло, участвовала бы в создании притяжения, и все свелось бы к тому же. Строгое применение теоремы вириала позволяет в этом убедиться.

Можно преобразовать теорию Лесажа. Исключим частицы и представим себе, что в эфире по всем направлениям движутся световые волны, пришедшие из любой точки пространства. Когда световая волна встречает материальный объект, то волна оказывает на него механическое воздействие, обусловленное давлением Максвелла—Бартоли, как если бы произошло соударение с материальной частицей. Поэтому световые волны могут играть роль лесажевых частиц. Во всяком случае, такое допущение делает, например, Томмазина.

Это не разрешает всех затруднений. Скорость распространения может быть только скоростью света, и это снова приводит для сопротивления среды к недопустимому значению. К тому же, если свет отражается полностью, то результат равен нулю, как при совершенно упругих частицах. Для того чтобы имело место притяжение, требуется частичное поглощение, но тогда начинает вырабатываться тепло. Вычисления не существенно отличаются от тех, которые делаются в обычной теории Лесажа, и результат остается столь же фантастичным.

С другой стороны, притяжение не поглощается телами, сквозь которые оно проходит, а со светом, как мы знаем, дело обстоит иначе. Свет, вызывающий ньютоновское притяжение, должен существенно отличаться от обычного света, например иметь весьма малую длину волны. Не говоря уже о том, что если бы наши глаза воспринимали этот свет, то небо должно было бы нам казаться гораздо ярче Солнца, так что Солнце выделялось бы на нем черным пятном. В противном случае Солнце отталкивало бы нас, а не притягивало. По всем этим причинам свет, который позволил бы объяснить притяжение, должен быть гораздо ближе к X-лучам Рентгена, чем к обычному свету. И даже X-лучи оказались бы недостаточными — какой бы проникающей способностью они ни обладали, они не смогли бы пройти Землю насквозь. Тут требуется вообразить себе какие-то X'-лучи, имеющие гораздо большую проникающую способность. Кроме того, часть энергии X'-лучей должна уничтожаться, без чего не могло бы иметь места притяжение. Если мы не хотим, чтобы она преобразовалась в тепло — количество тепла было бы огромно в таком случае — следует допустить, что она излучается во всех направлениях в виде вторичных лучей, кото-

рые можно назвать X'' и проникающая способность которых должна быть еще больше, чем у X' , иначе они, в свою очередь, нарушили бы притяжение. Таковы сложные предположения, к которым мы вынуждены прийти, если захотим принять теорию Лесажа.

Но все, о чем мы сейчас говорили, основывалось на обычных законах механики. Быть может, дела пойдут лучше, если мы обратимся к новой динамике. Прежде всего, можно ли будет сохранить принцип относительности? Вернемся к первоначальному варианту теории Лесажа и предположим, что пространство пронизывают материальные частицы. Если бы эти частицы были совершенно упругими, то законы их столкновений согласовывались с принципом относительности, но, как известно, действие их было бы равно нулю. Нужно поэтому допустить, что частицы неупруги. Но тогда трудно представить себе закон столкновений, совместимый с принципом относительности. Кроме того, мы встретились бы здесь с появлением значительного количества тепла и с заметным сопротивлением среды.

Если исключить частицы и вернуться к гипотезе Максвелла—Бартоли, трудности все равно не уменьшатся. Это попытался сделать сам Лоренц в мемуаре, представленном Академии наук Амстердама 25 апреля 1900 года.

Рассмотрим систему электронов, погруженных в эфир, через который по всем направлениям проходят световые волны. Один из электронов, на который попала волна, начинает колебаться. Его колебание синхронно с колебаниями света, но если электрон поглотит часть падающей энергии, то может иметь место разность фаз. Действительно, если он поглотит энергию, значит его *увлекает* за собой колебание эфира, и он должен запаздывать по отношению к эфиру. Можно отождествить электрон, находящийся в движении, с конвекционным током; следовательно, всякое магнитное поле, в частности магнитное поле, созданное самим световым возмущением, должно оказывать на такой электрон механическое воздействие. Это воздействие очень мало; кроме того, в течение периода оно меняет знак, но тем не менее, если имеется разность фаз между колебанием электрона и колебанием эфира, то среднее действие не равно нулю. Оно пропорционально этой разности и, следовательно, энергии, поглощенной электроном.

Я не имею возможности входить здесь в подробные вычисления, скажу лишь, что окончательный результат — притяжение между двумя электронами, равное $EE_1/4\pi E'r^2$. В этой формуле r — расстояние между двумя электронами, E и E_1 — энергия, поглощенная обоими электронами за единицу времени, а E' — энергия падающей волны (в единице объема).

Итак, не может быть притяжения без поглощения света и, следовательно, без возникновения тепла. Это убедило Лоренца отказаться от предложенной им теории, не отличающейся по существу от теории Лесажа—Максвелла—Бартоли. Он бы еще больше ужаснулся, если бы проделал вычисления до конца. Тогда он нашел бы, что температура Земли должна повышаться на 10^{13} градусов в секунду.

XVI. Заключение

Я постарался в немногих словах дать как можно более полное представление о новых идеях и объяснить, как они зародились, иначе читатель был бы напуган их дерзостью. Новые теории еще не доказаны. У них еще много дефектов. Они лишь опираются на совокупность вероятностей, достаточно серьезную, чтобы не относиться к ним с пренебрежением. Последующие эксперименты, очевидно, покажут, что мы должны думать по этому поводу. Загвоздка здесь в опыте Кауфмана и в тех опытах, которые будут его проверять.

В заключение да будет мне позволено высказать пожелание. Предположим, что через несколько лет эти теории пройдут новые проверки и выйдут из этого испытания победительницами. Тогда нашему школьному образованию будет грозить серьезная опасность: некоторые преподаватели, несомненно, захотят найти место для новых теорий. Новизна всегда так привлекательна, а казаться недостаточно передовым так неприятно! Во всяком случае, захотят ознакомить детей с новой точкой зрения, и, прежде чем обучать их обычной механике, их предупредят, что она уже отжила свое время и годилась разве только для этого старого глупца Лапласа. И тогда они не усвоят обычной механики.

Правильно ли предупреждать учащихся, что она дает лишь приближенные результаты? Да! Но позже! Когда они проникнутся ею, так сказать, до мозга костей, когда они привыкнут думать только с ее помощью, когда не будет больше риска, что они разучатся, тогда можно будет показать им ее границы. Жить им придется с обычной механикой, это единственная механика, которую они будут применять. Каковы бы ни были успехи автомобилизма, наши машины никогда не достигнут тех скоростей, где обычная механика более не верна. Иная механика — это роскошь, а о роскоши можно думать лишь тогда, когда она не в состоянии принести вред необходимому.

О ТЕОРИИ КВАНТОВ*

Изучение закона излучения твердых тел побудило Планка сформулировать гипотезу, известную под названием *теории квантов*. По этой теории элементы, которым обязаны своим излучением раскаленные твердые тела и которые можно отождествить с резонаторами Герца, получают или теряют энергию не иначе, как резкими скачками. Поэтому энергия такого резонатора всегда представляет собой кратное определенной величины, характеризующей длину волны резонатора и называемой *квантом*. Следовательно, энергия резонатора всегда равна целому числу квантов.

Не стоит и говорить, насколько такая концепция далека от привычных представлений, так как физические законы уже нельзя, по-видимому, выражать дифференциальными уравнениями. Естественно, возникает желание избежать этого, не говоря уже о множестве мелких трудностей, и поискать способ объяснить факты как-то иначе. Поэтому я попытался выразить закон Планка с помощью других предположений, но пришел к отрицательному заключению.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — параметры, определяющие состояние некой системы, а

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (1)$$

— дифференциальные уравнения, управляющие этой системой. X — это функция x . По второму закону термодинамики система должна стремиться к конечному состоянию так, чтобы существовала функция W , такая, что $Wd\tau$ представляет собой вероятность нахождения точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ в элементе объема $d\tau$ n -мерного пространства. Функция W должна удовлетворять уравнению

$$\sum \frac{\partial (WX_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (2)$$

Это означает, что W — последний множитель уравнения (1).

Все дифференциальные уравнения, не имеющие однородного последнего множителя, этим самым исключаются. В случае уравнений Гамиль-

* Comptes rendus de l'Academie des Sciences, 1911, 153, 1103—1108.

тона и в случае, когда параметры x являются гамильтоновскими переменными, множитель W равен 1. Известно, что это несовместимо с законом Планка.

Представим себе систему коротковолновых резонаторов *. Между ними может происходить обмен энергией с помощью атомов. Атомы, описывая очень вытянутые траектории, могут переходить от одного резонатора к другому и передавать им при соударении энергию. Сами эти атомы, для простоты изложения, можно считать длинноволновыми резонаторами **. Предположим, что имеется длинноволновой резонатор. Обозначим его смещение x , количество движения y , энергию ξ , фазу движения φ . Предположим также, что имеется коротковолновой резонатор, смещение которого x_2 , количество движения y_2 , энергия η и фаза ψ . Тогда уравнение движения можно написать в виде

$$y_i = m_i \frac{dx_i}{dt}, \quad \frac{dy_1}{dt} = -h_1 x_1 + Z_1, \quad \frac{dy_2}{dt} = -h_2 x_2 + Z_2,$$

где Z — члены, обусловленные соударениями и отличные от нуля только в момент удара. Вероятность можно представить в виде $W dx_1 dx_2 dy_1 dy_2$ или, что то же самое, в виде $W d\xi d\eta d\varphi d\psi$, если за новые переменные принять энергии и фазы. Так как W должен быть последним множителем не только в момент удара (и следовательно, для уравнений, в которых отсутствуют члены Z), то он будет зависеть исключительно от ξ и η , а так как нарушения законов механики следует искать только в коротковолновых резонаторах, то мы можем предположить, что W есть функция только η .

Теперь вообразим себе систему, состоящую из n одинаковых коротковолновых резонаторов с энергиями $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ и из p одинаковых длинноволновых резонаторов (атомов) с энергиями $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$. В силу закона сохранения энергии имеем

$$\sum \xi + \sum \eta = h,$$

где h — заданная постоянная. Я обозначу через Y среднее значение η , а через X — среднее значение ξ . Тогда

$$Mdh = \int \prod d\sigma d\tau, \quad MXdh = \int \prod \xi_1 d\sigma d\tau, \quad MYdh = \int \prod \eta_1 d\sigma d\tau,$$

$$\prod = W(\eta_1) W(\eta_2) \dots W(\eta_n), \quad d\sigma = d\eta_1 d\eta_2 \dots d\eta_n, \quad d\tau = d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_p,$$

где интегрирование проводится по области, определенной неравенствами

$$\xi_i > 0, \quad \eta_i > 0, \quad h < \sum \xi + \sum \eta < h + dh.$$

* Пуанкаре называет такие резонаторы резонаторами с коротким периодом (Прим. ред.).

** Т. е., по терминологии Пуанкаре, резонаторы с большим периодом. (Прим. ред.).

Кроме весьма особых случаев, отношение Y к X зависит от целых чисел n и p , но мы будем рассматривать только те случаи, когда эти числа очень велики. Даже тогда вовсе не очевидно а priori, что это отношение независимо от частного n/p . Пока эта независимость не доказана, могут еще оставаться сомнения в правильности рассуждений Планка, потому что если такой независимости нет, то будет невозможным конечное состояние, и тогда встает вопрос, применимы ли еще уравнения Больцмана и принципы термодинамики.

Мы можем написать

$$(p-1)! M = \int_0^h \varphi(x) (h-x)^{p-1} dx,$$

где $\varphi(x) dx$ определяется через

$$\varphi(x) dx = \int \prod d\eta_i \quad (\eta_i > 0, \quad x < \sum \eta_i < x + dx).$$

Предположим, что $\tau(x)$ при очень больших n имеет вид

$$N \theta\left(\frac{x}{n}\right) F^n\left(\frac{x}{n}\right),$$

где N — постоянный множитель, зависящий только от n . Основной вклад в интегралы дают участки, расположенные вблизи того значения x , при котором произведение

$$F^n\left(\frac{x}{n}\right) \left(\frac{h}{n} - \frac{x}{n}\right)^p$$

имеет максимум.

Отсюда легко получить

$$X = \frac{F(Y)}{F'(Y)}.$$

Это показывает, что соотношение между X и Y не зависит от частного n/p .

Если $W = \eta^m$, то $F(Y) = Y^{m+1}$, $X = \frac{Y}{m+1}$.

Если $W = e^{a\eta}$, то $F(Y) = Y e^{aY}$, $X = \frac{Y}{aY+1}$.

Наконец, по гипотезе Планка $W=0$, за исключением случая, когда η — кратно ε ; для этих значений W становится бесконечным, так что интеграл $\int W d\eta$ (распространенный на малый интервал, содержащий одно из этих особых значений), равен 1. Тогда находим

$$\int \varphi(x) dx = \frac{(\beta + n - 1)!}{\beta! (n-1)!},$$

если интеграл от первого члена распространен на очень малый интервал, содержащий значение x , кратное ε и равное $\beta\varepsilon$, тогда, как в противоположном случае, тот же интеграл равен нулю. Тогда

$$F(Y) = \left(1 + \frac{\varepsilon}{Y}\right)^{\frac{Y}{\varepsilon}} \left(1 + \frac{Y}{\varepsilon}\right),$$

откуда

$$\frac{\varepsilon}{X} = \log \left(1 + \frac{\varepsilon}{Y}\right), \quad Y = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{X}} - 1}.$$

Это и есть формула Планка.

Для более общей теории следует пойти окольным путем. Пусть

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{\infty} W e^{-\alpha\eta} d\eta. \quad (3)$$

Тогда

$$\Phi^n(\alpha) = \int_0^{\infty} \varphi(x) e^{-\alpha x} dx,$$

где по формуле Фурье

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Phi^n(\alpha) e^{\alpha x} d\alpha;$$

интеграл берется либо вдоль прямой, либо вдоль кривой так, чтобы действительная часть α оставалась положительной. Отсюда

$$M = \frac{1}{2\pi} \iint \Phi^n(\alpha) e^{\alpha x} (h - x)^p dx d\alpha,$$

или, полагая $x = n\lambda$, $p = kn$, $h = n\beta$, получим

$$M = K \iint \Phi^n(\alpha) e^{n\alpha\lambda} (\beta - \lambda)^{kn} d\lambda d\alpha,$$

где K — постоянный множитель. Следует сохранить лишь те части интеграла, которые соответствуют максимуму произведения

$$\Phi(\alpha) e^{\alpha\lambda} (\beta - \lambda)^k.$$

Отсюда следует, что значения X и Y будут как раз теми значениями $\frac{\beta - \lambda}{K}$ и λ , которые соответствуют этому максимуму.

Это дает

$$Y = -\frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)}, \quad X = \frac{1}{\alpha}.$$

В гипотезе Планка имеем

$$\Phi = \frac{1}{1 - e^{-\alpha\epsilon}}, \quad Y = \frac{\epsilon}{e^{\frac{\epsilon}{X}} - 1}.$$

Для $W = \eta^m$ имеем

$$\Phi = \frac{k}{\alpha^{m+1}}, \quad Y = (m + 1) X.$$

Для $W = e^{\gamma\eta}$ имеем

$$\Phi = \frac{1}{\alpha - \gamma}, \quad Y = \frac{X}{1 - \gamma X}.$$

Теперь мы можем ответить на вопрос, поставленный вначале. Если закон, связывающий X с Y , определен, то это же относится и к функции Φ (с точностью до постоянного множителя), а следовательно, и к W . Поэтому гипотеза квантов — *единственная*, которая приводит к закону Планка. Легко заметить, что частные гипотезы, которые мы должны были сделать, чтобы дать правильное представление и облегчить изложение, не имеют отношения к этому выводу.

Но экспериментальная закономерность всегда бывает лишь приближенной, и совершенно очевидно, что можно придумать законы, расхождение которых с законом Планка было бы меньше ошибок наблюдения. Они могли бы привести к непрерывной функции W . Заметим во всяком случае, что если $\Phi(\alpha)$ остается конечной при α бесконечной, а это происходит всякий раз, когда закон излучения будет таким, что полное излу-

чение будет конечным, интеграл $\int_0^{\eta_0} W d\eta$ останется конечным, если η_0

будет стремиться к нулю. Иначе говоря, функция W будет представлять при $\eta=0$ тот же вид прерывности, что и в формуле Планка, что исключает возможность представлять явления с помощью дифференциальных уравнений.

Наше последнее замечание относится ко второй теории Планка, которая приводит к закону

$$Y = \frac{\epsilon}{2} \frac{e^{\frac{\epsilon}{X}} + 1}{e^{\frac{\epsilon}{X}} - 1}.$$

Предыдущие правила, примененные к этому закону, показывают, что W равно нулю, за исключением случая, когда η есть нечетное кратное $\epsilon/2$. В этом случае W — конечна. Это не та гипотеза, из которой исходил Планк. Поэтому вторая теория обоснована предшествующим анализом хуже, чем первая.

О ТЕОРИИ КВАНТОВ *

1. Введение

Всем известно, к какой гипотезе пришел Планк, исследуя законы излучения. Он считает, что энергия световых излучателей меняется скачкообразно, и это называют теорией квантов. Едва ли необходимо говорить, насколько такая концепция не совпадает со всем тем, что мы до сих пор представляли себе. Физические явления, по-видимому, перестают подчиняться законам, которые можно выразить с помощью дифференциальных уравнений, и это, вероятно, самое большое и самое глубокое потрясение, которое испытала физика со времени Ньютона. Я не буду говорить о мелких трудностях, они бросаются в глаза, и Планк первый этим обеспокоен.

Можно ли, тем не менее, избежать этих последствий? Многие думают, что это так; на недавнем конгрессе в Брюсселе Нернст сообщил мне некоторые соображения. Он считает, что удастся объяснить факты, если допустить, что масса не постоянна, как принято в классической механике, и зависит не только от скорости, как в новой механике, основанной на принципе относительности, а одновременно зависит от составляющих скорости и ускорения. Эти соображения Нернста и побудили меня приняться за настоящую статью, и я должен сразу же сказать, что вынужден был ответить отрицательно на вопрос, поставленный выдающимся физиком.

Планк представляет себе, что излучение твердых тел возникает из-за большого числа герцевских резонаторов. Каждый из таких резонаторов имеет собственный единственный период и излучает строго монохроматический свет. Вследствие обмена энергией, между этими резонаторами устанавливается распределение энергии, следующее определенной закономерности, и из этого возникает некоторое распределение в спектре излученной энергии. Эта гипотеза предполагает, что такие обмены энергией возможны (хотя каждый резонатор может поглощать или излучать только свет данного цвета), так как если бы этот обмен не был возможен, то не имело бы места стремление к окончательному распределению, и начальное распределение сохранялось бы неопределенное время. Но

* Journal de Physique théorique et appliquée, série 5, 1912, 2, 5—34.

такие обмены могут происходить путем двух совершенно разных механизмов.

1. По принципу Допплера—Физо. Предположим, что резонаторы находятся в движении, а излучаемый свет может отражаться, преломляться, дифрагировать и рассеиваться движущимися телами. В этом случае резонаторы разной длины волны могли бы обмениваться энергией через посредство эфира.

2. С помощью механических явлений, в частности столкновений. Нельзя считать, что имеется прямое воздействие одного резонатора на другой. Теория квантов не допустила бы этого, так как один из резонаторов может получать энергию только кратными какого-то кванта, тогда как второй может терять эту энергию только кратными другого кванта, несоизмеримого с первым. Впрочем, не говоря уже о теории квантов, хватает и других причин, по которым непосредственный обмен кажется неправдоподобным, или, во всяком случае, исключительным. Но между резонаторами должны, вероятно, двигаться материальные атомы, которые, сталкиваясь с резонаторами, могут передать им или забирать у них часть энергии. Обмен при этом должен осуществляться через вещество.

Хотя такое понимание резонаторов Планка довольно своеобразно и не имеет другой цели, как только внести ясность, у нас нет никакой причины не принять его, поскольку оно, по-видимому, не должно изменить основные результаты. Однако, хотя мы допускаем возможность обоих способов обмена, но в этой статье более подробно рассмотрим второй способ, т. е. механический обмен через вещество.

Вообразим себе, прежде всего, систему, состояние которой определено в каждый момент времени n параметрами $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Предположим, что законы, по которым эти параметры изменяются, выражены дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i, \quad (1)$$

где X — функции x . Мы можем представить состояние системы точкой n -мерного пространства с координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$. Вероятность того, что эта точка находится внутри элемента объема $d\tau$ такого пространства, будет $Wd\tau$, где W — некоторая функция $x_1, x_2, \dots, x_n$. Вероятность того, что эта точка находится внутри объема этого n -мерного пространства, будет $\int Wd\tau$, где интеграл распространен на этот объем.

Я понимаю под такой вероятностью отношение t/T , где T — очень большой период, простирающийся от момента θ до момента $\theta + T$, а t — время, в течение которого ($\theta < t < \theta + T$) представляющая точка оказывается внутри рассматриваемого объема. Следовательно, такая вероятность не имеет никакого смысла, если отношение t/T нельзя считать независимым от θ и T при очень больших t . Если это условие выполня-

ется и если функция W может быть определена, то вероятность должна удовлетворять уравнению в частных производных

$$\sum \frac{\partial (W X_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (2)$$

Иными словами, W должно быть последним множителем уравнений (1). Значит, если эти уравнения не допускают однородного последнего множителя, то функция W не существует, и можно говорить лишь о *среднем состоянии системы за очень большой промежуток времени*. И даже совокупность очень большого числа таких систем не будет стремиться к конечному состоянию. Это противоречит второму принципу термодинамики, по которому Вселенная стремится к конечному состоянию, из которого не может выйти после того, как его достигнет. Поэтому уравнения, описывающие явления природы, должны обладать, по крайней мере, одним однородным последним множителем.

Для случая классической механики дифференциальные уравнения должны быть уравнениями Гамильтона

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = Y_i = -\frac{dF}{dx_i},$$

и тогда имеем

$$\sum \frac{\partial X_i}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial Y_i}{\partial y_i} = 0.$$

Иначе говоря, последний множитель W равен 1. Известно, что эта гипотеза приводит к теореме равномерного распределения энергии.

2. Случай двух резонаторов

Рассмотрим систему, образованную двумя резонаторами, одним — длинноволновым, другим — коротковолновым. Каждый из них можно рассматривать как движущуюся массу, колеблющуюся по законам маятника около своего положения равновесия.

Обозначим для первого, длинноволнового, массу через m_1 , период через $2\pi \sqrt{\frac{h_1}{m_1}}$, смещение через x_1 , количество движения через y_1 , энергию через ξ , а фазу движения через φ . Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{m_1}} y_1 = \sqrt{2\xi} \cos \varphi, \quad \sqrt{h_1} x_1 = \sqrt{2\xi} \sin \varphi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{h_1}{m_1}},$$

и уравнения движения, когда это движение не возмущено столкновениями, имеют вид

$$y_1 = m_1 \frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{dy_1}{dt} = -h_1 x_1.$$

Обозначим для второго резонатора через m_2 , h_2 , x_2 , y_2 , η , ψ величины, соответствующие m_1 , h_1 , x_1 , y_1 , ξ , φ , так, чтобы

$$\frac{1}{\sqrt{m_1}} y_2 = \sqrt{2\eta} \cos \psi, \quad \sqrt{h_2} x_2 = \sqrt{2\eta} \sin \psi, \quad \frac{d\psi}{dt} = \sqrt{\frac{h_2}{m_2}};$$

$$y_2 = m_2 \frac{dx_2}{dt}, \quad \frac{dy_2}{dt} = -h_2 x_2.$$

Предположим, что оба резонатора колеблются вдоль одной прямой (хотя и около разных положений равновесия) таким образом, что они могут столкнуться. Тогда уравнения движения, возмущенного столкновениями, будут

$$y_i = m_i \frac{dx_i}{dt}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -h_i x_i + Z_i \quad (i = 1, 2). \quad (3)$$

Функции Z пренебрежимо малы всегда, кроме моментов столкновений. Поэтому функции x и y почти равны нулю, когда разность $x_1 - x_2$ имеет значения, далекие от значения, соответствующего столкновению, и крайне велики в противном случае.

Я не ищу более точного выражения для функций Z , опираясь на известные законы столкновений. Действительно, мы вынуждены предположить — и это как раз является предметом данного исследования, — что законы столкновений так изменились, что путают все предсказания. Зато мы не будем касаться других членов уравнений, кроме Z . Действительно, эти члены означают лишь то, что движение каждого резонатора при отсутствии возмущения остается синусоидальным. И это предположение совершенно необходимо, если мы хотим, чтобы каждый резонатор давал монохроматическое излучение.

Что касается длинноволнового резонатора, то мы можем предположить одновременно, что h_1 очень мало и что амплитуда колебаний очень велика. Мы подходим к пределу в случае свободно движущегося атома, движение которого прямолинейно и равномерно в промежутках между столкновениями.

Установив это, мы должны иметь последний множитель kW , где k — постоянный множитель, которым я потом воспользуюсь.

Вероятность выражается интегралом

$$\int kW d\tau = k \int W dx_1 dy_1 dx_2 dy_2,$$

что можно записать, перейдя к переменным ξ , η , φ , ψ :

$$k \frac{m_1 m_2}{h_1 h_2} \int W d\xi d\eta d\varphi d\psi. \quad (4)$$

Функция W должна оставаться последним множителем и не в момент столкновений, иначе говоря, если приравнять члены Z нулю. Это требует

$$\frac{y_1}{m_1} \frac{\partial W}{\partial x_1} - h_1 x_1 \frac{\partial W}{\partial y_1} + \frac{y_2}{m_2} \frac{\partial W}{\partial x_2} - h_2 x_2 \frac{\partial W}{\partial y_2} = 0,$$

или, в новых переменных,

$$V \sqrt{\frac{m_1}{h_1}} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + V \sqrt{\frac{m_2}{h_2}} \frac{\partial W}{\partial \psi} = 0,$$

откуда

$$W = f\left(\xi, \eta, \varphi \sqrt{\frac{h_1}{m_1}} - \psi \sqrt{\frac{h_2}{m_2}}\right).$$

Так как коэффициенты $\sqrt{\frac{h_1}{m_1}}$ и $\sqrt{\frac{h_2}{m_2}}$ обычно несоизмеримы, то единственная функция, однородная по x_1, y_1, x_2, y_2 и, следовательно, периодичная по φ и ψ , — это произвольная функция ξ и η .

Чтобы получить вероятность того, что энергии заключены соответственно между ξ и $\xi + d\xi$ и между η и $\eta + d\eta$, нужно проинтегрировать выражение (4) по φ и ψ от 0 до 2π .

Находим таким способом

$$4\pi^2 k \frac{m_1 m_2}{h_1 h_2} W d\xi d\eta,$$

что, положив произвольно

$$k = \frac{h_1 h_2}{4\pi^2 m_1 m_2},$$

сводится к $W d\xi d\eta$.

Значит, если представить состояние системы точкой на плоскости, координаты которой будут ξ и η , то вероятность того, что эта точка находится внутри некоторой области, будет

$$\int W d\xi d\eta.$$

Функция W может зависеть от ξ и от η , но так как резонатор с очень большим периодом можно уподобить атому, то мы должны допустить, что он следует законам обычной механики и что нарушения этих законов могут произойти только от присутствия другого резонатора. Это означает, что W зависит только от η . Данное предположение будет лучше обосновано в дальнейшем.

Мне нужно узнать, каким будет распределение энергии, иначе говоря, какими будут вероятные значения ξ и η , которые я назову X и Y . Заметим, что величины ξ и η связаны уравнением живых сил

$$\xi + \eta = h,$$

где h — заданная постоянная. Здесь

$$M dh = \int W d\xi d\eta,$$

где интегрирование распространено на область, определенную неравенствами

$$\xi > 0, \quad \eta > 0, \quad h < \xi + \eta < h + dh.$$

Тогда, по определению, будем иметь

$$MXdh = \int \xi W d\xi d\eta; \quad MYdh = \int \eta W d\xi d\eta.$$

Ясно, что я могу написать также

$$M = \int_0^h W(\eta) d\eta, \quad MX = \int_0^h (h - \eta) W(\eta) d\eta, \quad MY = \int_0^h \eta W(\eta) d\eta. \quad (5)$$

Во всех случаях имеем

$$X + Y = h.$$

Если $W=1$, то, как известно, $X=Y$. Во всяком случае, мы должны допустить, что длинноволновый резонатор следует принятым сейчас законам, и поэтому X выражает абсолютную температуру (с точностью до постоянного множителя, который при подобающем выборе единиц мы можем предположить равным 1). Если закон Планка верен, то

$$Y = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{X}} - 1},$$

где ε — постоянная. Было бы нетрудно с помощью формулы (5) определить W , чтобы найти этот закон, но делать это не имеет смысла, так как в природе дело обстоит совершенно иначе.

3. Случай нескольких резонаторов

В действительности мы должны вообразить не два, а очень большое количество резонаторов. Предположим, что имеется p длинноволновых одинаковых резонаторов с энергиями $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ и, кроме того, n коротковолновых одинаковых резонаторов с энергиями $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$. Мы можем их обозначить также через $R_1, R_2, \dots, R_p$, с одной стороны, и через $R'_1, R'_2, \dots, R'_n$ — с другой. Их фазы мы обозначим через $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ и $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$. Тогда дифференциальные уравнения должны допустить существование последнего множителя kU (где k — постоянный множитель, право распоряжаться которым мы оставляем за собой), так что если представить состояние системы точкой $(2n+2p)$ -мерного пространства с координатами ξ, η, φ и ψ , то вероятность того, что эта точка окажется внутри некоторого объема этого пространства, будет

$$\int kU d\omega,$$

где $d\omega$ — произведение $d\xi, d\eta, d\varphi$ и $d\psi$.

Рассмотрим теперь столкновения между R_i и R'_k . Пусть W — значение последнего множителя, если бы существовали только эти два резонатора. В предыдущем разделе мы видели, что W — это функция ξ_i и η_k , мы даже вынуждены были прийти к предположению, что W зависит только от η_k , но я на время оставляю это предположение. Столкновение между R_i и R'_k заставит внезапно (или очень быстро) измениться переменные ξ_i , η_k , φ_i , ψ_k , имеющие отношение к этим двум резонаторам, и не изменит переменные, имеющие отношение к другим резонаторам. Чтобы распределение вероятностей при этом не изменилось, нужно, чтобы kU было

$$kU = FW(\xi_i, \eta_k),$$

где $W(\xi_i, \eta_k)$ — последний множитель в том виде, который он имел бы, если бы существовало только два резонатора, а F — функция от переменных, относящихся к другим резонаторам. Значит, если представить себе, например, резонаторы R_1 , R_2 , и R'_1 , то можно написать

$$kU = F_1(\xi_2, \dots) W(\xi_1, \eta_1)$$

и, с другой стороны,

$$kU = F_2(\xi_1, \dots) W(\xi_2, \eta_1),$$

где F_1 зависит от всех резонаторов, кроме R_1 и R'_1 , а F_2 — от всех резонаторов, кроме R_2 и R'_1 . Это возможно только, если

$$kU = \Phi w'(\xi_1) w'(\xi_2) w(\eta_1),$$

где $w'(\xi_1)$, $w'(\xi_2)$, $w(\eta_1)$ — функции одной переменной, зависящей, соответственно, только от ξ_1 , ξ_2 и η_1 , тогда как Φ зависит только от переменных, относящихся к другим резонаторам, кроме R_1 , R_2 и R'_1 .

В окончательном виде получим

$$kU = kw'(\xi_1) w'(\xi_2) \dots w'(\xi_p) w(\eta_1) w(\eta_2) \dots w(\eta_n).$$

Теперь пора вернуться к сделанному выше предположению, которое мы ниже обсудим более подробно, и считать, что $w'(\xi_i) = 1$, так, чтобы вероятность зависела только от η , а не от ξ .

Во всяком случае, вероятность эта не зависит от фаз. Поэтому если мы выразим распределение энергий в системе точкой $(n+p)$ -мерного пространства как функцию ξ и η , то закон вероятностей можно получить, интегрируя

$$\int kU d\omega$$

по φ и ψ от 0 до 2π . Тогда находим

$$k(2\pi)^{n+p} \int U d\sigma d\tau,$$

где $d\sigma$ обозначает произведение $d\eta$, а $d\tau$ — произведение $d\xi$.

Мы распорядимся k таким образом, чтобы

$$k(2\pi)^{n+p} = 1$$

и, вспомнив, что w' предполагаются равными 1, а U сводится к произведению величин w , получим для выражения вероятности

$$\int U d\sigma d\tau = \int w(\eta_1) w(\eta_2) \dots w(\eta_p) d\sigma d\tau. \quad (6)$$

Уравнение живых сил запишем в виде

$$\sum \xi + \sum \eta = h.$$

Средние значения ξ_i все одинаковы в силу симметрии, это же относится и к средним значениям η_k . Я называю X средними значениями ξ_i , а Y — средними значениями η_k . Для определения этих величин у меня есть уравнения

$$Mdh = \int U d\sigma d\tau; \quad MXdh = \int \xi_1 U d\sigma d\tau; \quad MYdh = \int \eta_1 U d\sigma d\tau, \quad (7)$$

где интегрирования распространены на область, определенную неравенствами

$$\xi_i > 0, \quad \eta_k > 0, \quad h < \sum \xi + \sum \eta < h + dh. \quad (8)$$

4. Обсуждение формул

Прежде всего имеется основание спросить, независимо ли отношение X и Y от целых чисел n и p . Существует случай, когда это действительно так. Это случай, когда $w(\eta)$ есть степень η , т. е. η^m . Чтобы убедиться в этом, обратимся к следующим соображениям.

Разделим произвольно на два класса длинноволновые и коротковолновые резонаторы и обозначим через ξ'_i и η'_k энергии резонаторов первого класса, а через ξ''_i и η''_k — энергии резонаторов второго класса. Пусть U' — значение произведения U при наличии только резонаторов первого класса, а U'' — та же величина при наличии только резонаторов второго класса. Тогда

$$U = U' U''.$$

Обозначим через $d\sigma'$, $d\tau'$, $d\sigma''$, $d\tau''$ произведения $d\eta'$, $d\xi'$, $d\eta''$ и $d\xi''$. Получим

$$Mdh = \int U' U'' d\sigma' d\tau' d\sigma'' d\tau''.$$

Начнем с вычисления интеграла второй части, распространенного на область, которая определяется неравенствами

$$\begin{aligned} \xi'_i > 0, \quad \eta'_k > 0, \quad \xi''_i > 0, \quad \eta''_k > 0; \\ h' < \sum \xi' + \sum \eta' < h' + dh'; \quad h'' < \sum \xi'' + \sum \eta'' < h'' + dh''. \end{aligned} \quad (8bis)$$

Переменные здесь разделены, а интеграл распадается на два множителя

$$\int U' d\sigma' d\tau' \int U'' d\sigma'' d\tau''.$$

Эти два множителя не что иное, как $M' dh'$ и $M'' dh''$, если обозначить через M' (или M'') величину M при наличии резонаторов только первого (или второго) класса. Чтобы отыскать интеграл, распространенный на область (8), достаточно проинтегрировать заново по h' и h'' в области, определенной условиями

$$h' > 0, \quad h'' > 0, \quad h < h' + h'' < h + dh.$$

Тогда находим

$$M dh = \int M' M'' dh' dh'' \quad (h' > 0, \quad h'' > 0, \quad h < h' + h'' < h + dh),$$

или, что то же самое,

$$M(h) = \int_0^h M'(x) M''(h-x) dx. \quad (9)$$

Так как M — функция, которая зависит от n и p и которую я могу записать в виде $\varphi_{n,p}(h)$, то формулу (9) можно представить как

$$\varphi_{m+n, p+q}(h) = \int_0^h \varphi_{m,p}(x) \varphi_{n,q}(h-x) dx. \quad (9bis)$$

Если обозначить через $X'Y'$ (или $X''Y''$) средние значения ξ и η при наличии одних только резонаторов первого (или второго) класса, найдем

$$YM = \int_0^h Y' M' M'' dx, \quad (10)$$

где Y' и M' — функции x , а M'' — функции $h-x$.

Если считать, что $w(\eta) = \eta^m$, то

$$\varphi_{1,1} = \frac{h^{m+1}}{m+1}, \quad \varphi_{2,0} = h, \quad \varphi_{0,2} = h^{2m+1} \int_0^1 x^m (1-x)^m dx.$$

Я утверждаю, что в общем случае мы будем иметь

$$\varphi_{n,p} = K h^{mn+n+p-1},$$

где K — числовой множитель. Достаточно заметить, что определенный интеграл

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta dx$$

пропорционален $h^{\alpha+\beta+1}$ и применить формулу (9bis), чтобы признать, что теорема, верная для малых значений n и p , должна быть верна, в силу рекуррентности, для всех значений этих целых чисел.

Если включить в первый класс все коротковолновые резонаторы, а во второй — все длинноволновые, то

$$M' = K'h'^{mn+n-1}, \quad M'' = K''h''^{p-1}.$$

Мы должны получить

$$Y' = \frac{h'}{n}, \quad X'' = \frac{h''}{p},$$

так как в случае существования, например, n только коротковолновых резонаторов, а они все одинаковы, средняя величина Y' каждого из них должна быть n -й частью полной энергии h' . Значит, для формул (9) и (10) получим

$$M = K'K'' \int_0^h x^{mn+n-1} (h-x)^{p-1} dx,$$

$$MY = K'K'' \int_0^h \frac{x^{mn+n}}{n} (h-x)^{p-1} dx, \quad MX = K'K'' \int_0^h x^{mn+n-1} \frac{(h-x)^p}{p} dx.$$

Но интегрирование по частям дает

$$\int_0^h x^{\alpha+1} (h-x)^{\beta} dx = \frac{\alpha+1}{\beta+1} \int_0^h x^{\alpha} (h-x)^{\beta+1} dx.$$

Отсюда выводим

$$\frac{nY}{pX} = \frac{mn+n}{p},$$

откуда

$$\frac{X}{1} = \frac{Y}{m+1}.$$

Мы видим, что распределение энергии не зависит от величин n и p , но это единственный случай, когда такая независимость имеет место.

Рассмотрим случай $n=1$, $p=2$, так что имеются три резонатора, энергии которых соответственно будут η , ξ_1 и ξ_2 .

Тогда

$$M = \int w d\eta d\xi_1, \quad MX = \int \xi_1 w d\eta d\xi_1, \quad MY = \int \eta w d\eta d\xi_1,$$

где w зависит только от η , состояние системы представлено точкой на плоскости с координатами η и ξ_1 , а интегрирование распространено на треугольник

$$\eta > 0, \quad \xi_1 > 0, \quad \eta + \xi_1 < h.$$

Тогда если считать, что w определяет плотность вещества, то M определяет массу треугольника, а X и Y — ее центр тяжести. Этот центр тяжести находится на медиане соответствующей стороны, которая находится на оси ξ_1 , так как вдоль прямых, параллельных этой оси, плотность постоянна.

Тогда

$$2X + Y = h.$$

Если мы начнем менять h , то центр тяжести XY опишет некоторую кривую C , и уравнение этой кривой даст нам искомое соотношение между X и Y .

Чтобы перейти к случаю $n=1$, $p=1$, нам нужно лишь взять

$$M = \int w d\eta, \quad XM = \int \xi_1 w d\eta = \int (h - \eta) w d\eta, \quad YM = \int \eta w d\eta,$$

распространив интегрирование на прямую

$$\xi_1 + \eta = h,$$

служащую основанием нашего треугольника. Тогда точка XY представляет собой центр тяжести этого основания.

Если мы хотим, чтобы формула распределения энергии была для $n=1$, $p=1$ такой же, как для $n=1$, $p=2$, нужно, чтобы этот новый центр тяжести находился при изменяющихся h также на кривой C .

Я утверждаю, что это возможно, только если кривая C — прямая, проходящая через начало координат. Действительно, если бы C не была прямой, иначе говоря, если бы отношение Y/X не было постоянным, то мы могли бы взять h достаточно малым, чтобы кривая от 0 до h не имела точки перегиба и была поэтому выпуклой.

Разобьем треугольник на бесконечно узкие трапеции, прсведя параллельные основанию $\xi_1 + \eta = h$. Каждая из этих трапеций будет иметь свой центр тяжести на C . Общий центр тяжести треугольника не изменится, если сосредоточить в нем массы всех трапеций. Следовательно, это центр тяжести кривой C , если считать, что плотность ее повсюду положительна. Но центр тяжести выпуклой кривой не может находиться на этой кривой. следовательно, центр тяжести треугольника не может находиться на C , что противоречит предположению. Значит, C — прямая

$$\frac{Y}{X} = m + 1,$$

откуда

$$\frac{\int_0^h \eta w d\eta}{\int_0^h (h - \eta) w d\eta} = m + 1.$$

Так как отношение этих двух интегралов не зависит от h , то мы получим то же отношение, дифференцируя числитель и знаменатель по h ; но

$$\frac{d}{dh} \int_0^h \eta w d\eta = h w(h), \quad \frac{d}{dh} \int_0^h (h - \eta) w d\eta = \int_0^h w d\eta,$$

откуда

$$\frac{h w(h)}{\int_0^h w d\eta} = m + 1, \quad \int_0^h w d\eta = h^{m+1}, \quad w = \eta^m,$$

что и требовалось доказать.

Значит, закон распределения энергии только в исключительных случаях не зависит от целых n и p . На первый взгляд кажется, что из этого следует, будто никакое тепловое равновесие невозможно, и это находится в противоречии со вторым принципом термодинамики. Однако вспомним, что числа n и p всегда очень велики. Уместно, следовательно, поставить вопрос иначе: *независим ли закон распределения энергии от отношения n/p при очень больших целых n и p ?*

Если такая независимость не имеет места, то термодинамическое равновесие невозможно. Все теоремы Больцмана, рассматривающие возможность этого равновесия как постулат, оказываются несостоятельными. Само понятие энтропии становится бессмысленным. Поэтому пока эта независимость не доказана, могут оставаться сомнения в правильности рассуждений Планка, основывающихся на существовании энтропии и теорем Больцмана. Этого достаточно, чтобы оправдать предпринятую мною работу.

5. Случай большого числа резонаторов

Вернемся для общего случая (т. е. для любого w) к уравнениям (9) и (10), включив, как и выше, в один и тот же класс резонаторы с одинаковым периодом. Тогда мы сможем записать

$$M' = \varphi_n(h'), \quad M'' = K'' h''^{p-1}, \quad Y' = \frac{h'}{n}, \quad X'' = \frac{h''}{p}$$

и получим

$$M = K'' \int_0^h \varphi_n(x) (h-x)^{p-1} dx; \quad (11)$$

$$MY = \frac{K''}{n} \int_0^h x \varphi_n(x) (h-x)^{p-1} dx; \quad MX = \frac{K''}{p} \int_0^h \varphi_n(x) (h-x)^p dx. \quad (12)$$

Предположим, что для очень больших n функция $\varphi_n(x)$ может быть записана в следующем виде:

$$\varphi_n(x) = H N F^n\left(\frac{x}{n}\right) \theta\left(\frac{x}{n}\right), \quad (13)$$

где F и θ — две функции от x/n , первая из них степени n ; N — численный коэффициент, зависящий только от n ; H — выражение, стремящееся к 1 при n , стремящемся к бесконечности. Мы положим $p = kn$ и предположим, что p и n очень велики, но их отношение k — конечно.

Положим также, что

$$\frac{x}{n} = \omega, \quad \frac{h}{n} = \beta, \quad \Phi = F(\omega) (\beta - \omega)^k.$$

Тогда

$$M = n^p K'' N \int_0^\beta H \theta(\omega) \Phi^n(\omega) \frac{d\omega}{\beta - \omega},$$

$$MY = n^p K'' N \int_0^\beta \omega H \theta(\omega) \Phi^n(\omega) \frac{d\omega}{\beta - \omega}, \quad MX = \frac{n^p K'' N}{k} \int_0^\beta H \theta(\omega) \Phi^n(\omega) d\omega.$$

Под знаком интеграла находится функция Φ в очень высокой степени. Поэтому элемент интеграла, соответствующий максимуму Φ , будет преобладать. Следовательно, соотношение интегралов MY/M , MX/M можно вычислить, принимая во внимание только эту часть. Тогда получим

$$Y = \omega, \quad X = \frac{\beta - \omega}{k},$$

где ω — значение, при котором Φ имеет максимум. Значение это дано уравнением

$$\frac{F'(\omega)}{F(\omega)} - \frac{k}{\beta - \omega} = 0,$$

или же

$$X = \frac{F(Y)}{F'(Y)}. \quad (14)$$

Это закон распределения энергии, другими словами, искомое соотношение между X и Y . Мы видим, что оно независимо от отношения n/p .

Пусть сначала $w = \eta^m$. Тогда

$$\varphi_n = Kx^{mn+n-1},$$

$$F = \left(\frac{x}{n}\right)^{m+1}, \quad \theta = \left(\frac{x}{n}\right)^{-1}, \quad H = 1, \quad N = Kn^{mn+n-1}, \quad \frac{F'(Y)}{F(Y)} = \frac{m+1}{Y},$$

и, наконец,

$$X = \frac{Y}{m+1}.$$

Пусть теперь $w = e^{\gamma\eta}$, тогда

$$\varphi_n(x)dx = \int e^{\gamma\sum\eta_i} d\sigma,$$

где интеграл распространен на область

$$\eta_i > 0, \quad x < \sum\eta < x + dx.$$

Отсюда выводим

$$\varphi_n(x)dx = e^{\gamma x} \int d\sigma = \frac{e^{\gamma x} x^{n-1} dx}{(n-1)!}.$$

Теперь, приравняв $h = x = n\omega$, получим

$$F(\omega) = e^{\gamma\omega}\omega, \quad \theta = \frac{1}{\omega}, \quad H = 1, \quad N = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \frac{F'(Y)}{F(Y)} = \gamma + \frac{1}{\omega},$$

откуда, наконец,

$$X = \frac{Y}{\gamma+1}.$$

6. Закон Планка

В гипотезе Планка энергия резонатора может быть равна только кратному ϵ , так как ϵ — квант. Вероятность здесь, следовательно, прерывна. Функция $w(\eta)$ равна нулю каждый раз, когда η не кратно ϵ . Когда η становится кратным ϵ , функция w становится, напротив, бесконечной, так что

интеграл $\int_{\eta_0}^{\eta_1} w d\eta$ равен числу, кратному ϵ , заключенному между η_0 и η_1 .

Посмотрим, каковы последствия этого предположения и посмотрим, в частности, что происходит с функцией $\varphi_n(x)$. По определению, имеем

$$\varphi_n(x)dx = \int w(\eta_1)w(\eta_2)\dots w(\eta_n)d\sigma,$$

где интегрирование должно быть распространено на область

$$\eta_i \geq 0, \quad x \leq \sum\eta \leq x + dx.$$

В занимающем нас случае интеграл должен быть заменен конечной суммой. Так как функция под знаком интеграла разрывна, она будет равна числу точек, расположенных внутри области, n координат которых (η_i) кратны ε (предполагается, что границы области принадлежат самой области).

Рассмотрим интеграл $\int \varphi_n(x) dx$, распространенный на малый интервал. Одно из двух: либо этот интервал содержит $\gamma\varepsilon$, кратное ε , либо не содержит значений, кратных ε . Во втором случае интеграл будет равен нулю, в первом он равен числу распределений целого числа γ по сумме из n положительных или равных нулю целых чисел. Это число распределений дается формулой

$$\frac{(\gamma + n - 1)!}{\gamma! (n - 1)!}.$$

В формулах (11) и (12) интегралы должны быть заменены суммами. Тогда

$$M = K'' \sum \frac{(\gamma + n - 1)!}{\gamma! (n - 1)!} (h - \gamma\varepsilon)^{p-1},$$

где суммирование распространено на все целые γ , причем $\gamma\varepsilon$ должно быть меньше h . Формулы для M_Y и M_X можно вывести из предыдущей, умножив подынтегральное выражение на

$$\frac{\gamma\varepsilon}{n}, \quad \frac{h - \gamma\varepsilon}{p}.$$

Заменяем теперь факториалы их приближенными значениями

$$\begin{aligned} (\gamma + n)! &= (\gamma + n)^{\gamma+n} e^{-\gamma-n} \sqrt{2\pi(\gamma + n)}, \\ \gamma! &= \gamma^\gamma e^{-\gamma} \sqrt{2\pi\gamma}; \quad n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}, \end{aligned}$$

отсюда

$$\frac{(\gamma + n - 1)!}{\gamma! (n - 1)!} = \frac{(\gamma + n)!}{\gamma! n!} \frac{n}{\gamma + n} = \left(1 + \frac{n}{\gamma}\right)^\gamma \left(1 + \frac{\gamma}{n}\right)^n \sqrt{\frac{\gamma + n}{2\pi\gamma n}} \frac{n}{\gamma + n}.$$

Имеем

$$x = n\omega = \gamma\varepsilon,$$

откуда

$$\frac{(\gamma + n - 1)!}{\gamma! (n - 1)!} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\omega}\right)^\gamma \left(1 + \frac{\omega}{\varepsilon}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sqrt{\frac{\omega + \varepsilon}{\omega}} \frac{\varepsilon}{\omega + \varepsilon}.$$

Из этого видно, что можно принять

$$F(\omega) = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\omega}\right)^{\frac{\omega}{\varepsilon}} \left(1 + \frac{\omega}{\varepsilon}\right), \quad N = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, \quad \theta(\omega) = \sqrt{\frac{\omega + \varepsilon}{\omega}} \frac{\varepsilon}{\omega + \varepsilon},$$

и второй член сведется, как и следует, к $F^n \theta N$. Наши рассуждения применимы к суммам, как были раньше применимы к интегралам — единственные элементы суммы, которые могут дать существенный эффект, это те, которые соответствуют максимуму F . И мы приходим опять к формуле (14).

Но легко найти, что

$$\frac{F'(Y)}{F(Y)} = \frac{1}{\varepsilon} \log \left(1 + \frac{\varepsilon}{Y} \right),$$

откуда

$$\frac{\varepsilon}{X} = \log \left(1 + \frac{\varepsilon}{Y} \right), \quad Y = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{X}} - 1}.$$

Это и есть закон Планка.

7. Другой метод

Тем не менее этот результат не вполне удовлетворителен. Действительно, мы еще не знаем: 1) будет ли распределение независимо от отношения n/r при любом значении функции w , 2) только ли гипотеза предыдущего раздела приводит к закону Планка.

Чтобы ответить на эти вопросы, я воспользуюсь другим способом вычисления, основанным на применении интеграла Фурье.

Положим, что

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{\infty} w(\eta) e^{-\alpha\eta} d\eta. \quad (15)$$

Если функция $w(\eta)$ остается конечной при $\eta = \infty$ или же становится бесконечной, как полином степени η , где η — целое число, и если действительная часть α положительна, то интеграл в правой части конечен. Если формула остается верной, когда действительная часть α равна нулю, мы сможем написать

$$\Phi(i\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\eta) e^{-i\beta\eta} d\eta,$$

где $\psi(\eta)$ — функция, равная w при $\eta > 0$ и равная 0 при $\eta < 0$. Таким образом, мы получаем интеграл Фурье в обычном виде и из него получаем

$$w(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(i\beta) e^{i\beta\eta} d\beta.$$

Но это возможно, только когда функция $w(\eta)$ стремится к нулю при $\eta = \infty$. В противном случае формула Фурье не имеет места.

Она остается тем не менее верной *mutatis mutandis* *. Действительно, пусть α — комплексная величина $\gamma + i\beta$, где действительная часть (γ) положительна. Тогда мы получим

$$\Phi(\gamma + i\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\eta) e^{-\gamma\eta} e^{-i\beta\eta} d\eta.$$

На этот раз значение $\psi(\eta) e^{-\gamma\eta}$ стремится к нулю при $\eta = \infty$. Поэтому формулу Фурье можно применять без всяких затруднений. Это дает

$$w(\eta) e^{-\gamma\eta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\gamma + i\beta) e^{i\beta\eta} d\beta.$$

Действительная часть γ рассматривается как постоянная, а β принимает любые значения от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, точка α описывает прямую, перпендикулярную оси действительных значений. Получаем

$$d\alpha = i d\beta,$$

откуда, наконец,

$$w(\eta) = \frac{1}{2i\pi} \int \Phi(\alpha) e^{\alpha\eta} d\alpha. \quad (16)$$

Возведя обе части формулы (15) в n -ю степень, получим

$$\Phi^n(\alpha) = \int w(\eta_1) w(\eta_2) \dots w(\eta_n) e^{-\alpha \sum \eta} d\sigma.$$

Проинтегрируем по n переменным, от нуля до бесконечности; выполним сначала интегрирование по области

$$\eta_i > 0, \quad x < \sum \eta < x + dx.$$

Находим

$$\varphi_n(x) e^{-\alpha x} dx.$$

Остается проинтегрировать для всех значений x от 0 до бесконечности. Это дает

$$\Phi^n(\alpha) = \int_0^\infty \varphi_n(x) e^{-\alpha x} dx. \quad (15 \text{ bis})$$

Обращаясь с этим выражением так же, как с формулой (15), получим

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2i\pi} \int \Phi^n(\alpha) e^{\alpha x} d\alpha. \quad (16 \text{ bis})$$

Интеграл (16 bis), как и интеграл (16), следует брать по прямой, перпендикулярной действительной оси. Этот путь интегрирования может

* *Mutatis mutandis* (лат.) — с соответствующими изменениями. (Прим. перев.).

измениться, если действительная часть будет все время оставаться положительной, а мнимая меняться от $-\infty$ до $+\infty$.

И в самом деле, функция $\Phi(\alpha)$ голоморфна на всей полуплоскости, где действительная часть α положительна.

Если мы заменим $\varphi_n(x)$ в уравнениях (11) и (12) ее значением (16 bis), то получим

$$M = \frac{K''}{2i\pi} \iint \Phi^n(\alpha) e^{\alpha x} (h-x)^{p-1} dx d\alpha, \quad (11 \text{ bis})$$

$$MY = \frac{K''}{2ni\pi} \iint x \Phi^n(\alpha) e^{\alpha x} (h-x)^{p-1} dx d\alpha, \\ MX = \frac{K''}{2pi\pi} \iint \Phi^n(\alpha) e^{\alpha x} (h-x)^p dx d\alpha. \quad (12 \text{ bis})$$

Считая далее, что

$$x = n\omega, \quad h = n\beta, \quad p = kn,$$

имеем

$$M = \frac{n^p K''}{2i\pi} \iint \Theta^n \frac{d\alpha d\omega}{\beta - \omega}, \\ MY = \frac{n^p K''}{2i\pi} \iint \Theta^n \frac{\omega d\alpha d\omega}{\beta - \omega}, \quad MX = \frac{n^p K''}{2i\pi} \iint \Theta^n \frac{\beta - \omega}{k} \frac{d\alpha d\omega}{\beta - \omega},$$

положив, что

$$\Theta = \Phi(\alpha) e^{\alpha\omega} (\beta - \omega)^k.$$

Интегрирование производится от нуля до β по ω и α по всей прямой, перпендикулярной действительной оси.

Следует принимать во внимание лишь те элементы интегрирования, которые соответствуют максимуму функции Θ , имеющей высокую степень, во всяком случае, если путь интегрирования проходит через этот элемент. Но, как мы заметили выше, можно изменить форму пути. И мы это сделаем так, чтобы это условие выполнялось.

Получим, следовательно,

$$Y = \omega, \quad X = \frac{\beta - \omega}{k},$$

где ω — значение, соответствующее максимуму. Чтобы выразить, что Θ проходит через максимум, напомним, что ее логарифмические частные производные по α и ω равны нулю. Это дает

$$\frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)} + \omega = \alpha - \frac{k}{\beta - \omega} = 0.$$

Поэтому

$$\frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)} = -Y, \quad X = \frac{1}{\alpha}. \quad (17)$$

Исключая из этих двух уравнений α , получаем искомое соотношение между X и Y . Мы видим, что при любом ω закон распределения энергии не зависит от отношения двух целых чисел n и p , лишь бы они были очень велики.

Для $w = \eta^m$ имеем

$$\Phi = \frac{k}{\alpha^{m+1}}, \quad Y = (m + 1) X.$$

Для $w = e^{\gamma\eta}$ имеем

$$\Phi = \frac{1}{\alpha - \gamma}, \quad Y = \frac{X}{1 - \gamma X}.$$

Заметим, что в последнем случае интеграл (15) не конечен, а следовательно, функция Φ определена только тогда, когда действительная часть α больше γ .

Переходим к гипотезе Планка. В этом случае интеграл (15) следует заменить суммой. Нужно оставить лишь значения η , кратные ε ; например, $\eta = m\varepsilon$. Интеграл $\int w d\eta$, равный нулю в большинстве случаев, равен 1, если распространить его на очень маленький промежуток, включающий одно из этих выделенных значений. Тогда формула (15) принимает вид

$$\Phi = \sum e^{-m\alpha\varepsilon} = 1 + e^{-\alpha\varepsilon} + e^{-2\alpha\varepsilon} + \dots,$$

т. е.

$$\Phi = \frac{1}{1 - e^{-\alpha\varepsilon}}.$$

Из формулы (17)

$$Y = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{X}} - 1}.$$

Это формула Планка.

8. Необходимость гипотезы Планка

Теперь мы можем ответить на поставленный вначале вопрос. Когда закономерность, связывающая Y и X , определена, логарифмическая производная Φ'/Φ также определена. Следовательно, так же дело обстоит, с точностью до постоянного множителя, и с функцией Φ , а потому (из формулы (16)) и с w .

Значит, гипотеза квантов — единственная гипотеза, приводящая к закону Планка.

Но экспериментальная формула всегда лишь приближительна. Нельзя ли представить себе законы, разница которых с законом Планка была бы меньше ошибок наблюдения, и которые привели бы к непрерывной функции w ? Если функция w непрерывна, я утверждаю, что Φ равна нулю

при $\alpha = \infty$, иными словами, при низкой температуре. Действительно, w , представляющая вероятность, существенно положительна. Отсюда следует, что интеграл (15) убывает при возрастающем α , потому что все элементы убывают. Пусть $\alpha = \alpha_0 + \alpha'$, а η — произвольная величина. Тогда

$$\Phi = \int_0^{\eta_0} w e^{-\alpha \eta} d\eta + \int_{\eta_0}^{\infty} w e^{-\alpha \eta} d\eta.$$

Первый интеграл меньше $\int_0^{\eta_0} w d\eta$, второй меньше

$$e^{-\alpha' \eta_0} \int_{\eta_0}^{\infty} w e^{-\alpha_0 \eta} d\eta < e^{-\alpha' \eta_0} \Phi(\alpha_0).$$

Отсюда

$$\Phi(\alpha) < \int_0^{\eta_0} w d\eta + e^{-\alpha' \eta_0} \Phi(\alpha_0).$$

А так как α' стремится к бесконечности одновременно с α , то будем иметь

$$\Phi(\infty) < \int_0^{\eta_0} w d\eta.$$

$\Phi(\infty)$ — предел, к которому стремится убывающая функция $\Phi(\alpha)$ при α , стремящемся к бесконечности. Поэтому, если Φ не равна нулю, значит интеграл второй части нашего равенства не стремится к нулю вместе с η_0 . Это невозможно, если функция непрерывна или даже конечна. Напротив, нужно было бы, чтобы она представляла при $\eta=0$ как раз тот же тип прерывности, что и в гипотезе Планка.

Если $\Phi(\infty)=0$, это значит, что интеграл

$$\int_{\alpha}^{\infty} \frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)} d\alpha$$

бесконечен. Функция под знаком интеграла может стать равной нулю при $\alpha = \infty$, причем как $1/\alpha$. Если бы она стремилась к нулю как $1/\alpha^k$, где $k > 1$, то интеграл был бы конечен.

Чтобы пойти далее, напомним некоторые принципы теории излучения. По закону Вина энергия излучения черного тела между длинами волн λ и $\lambda + d\lambda$ выражается формулой

$$u_{\lambda} d\lambda = \frac{d\lambda}{\lambda^5} F(\lambda T),$$

где T — абсолютная температура. С другой стороны, если обозначить через ν частоту, а через $u_\nu d\nu$ — энергию излучения, заключенную между частотами ν и $\nu + d\nu$, то, как показал Планк (Acad. de Berlin. Sitzungsber., 1899, p. 461; Physik. Zeitschrift, 1900—1901), мы имеем

$$u_\nu d\nu = u_\lambda d\lambda = K\nu^2 Y d\nu, \quad (18)$$

где K — численный коэффициент, а Y , как и выше, представляет собой среднюю энергию резонаторов с длиной волны λ . Отсюда выводим

$$Y = \frac{u_\nu}{K\nu^2} = \frac{u_\lambda}{K\nu^2} \frac{d\lambda}{d\nu} = K' u_\lambda \lambda^4 = \frac{K' F(\lambda T)}{\lambda}.$$

Но T — не что иное, как X , если считать единицы выбранными подобающим образом, а $X = 1/\alpha$. Следовательно, из (17) получим

$$Y d\alpha = -d \log \Phi(\alpha), \quad Y dX = X^2 d \log \Phi,$$

или

$$K' \frac{F(\lambda X) dX}{\lambda X^2} = d \log \Phi.$$

В этом соотношении предполагается, что λ — постоянная. Оно показывает, что первый член не меняется, если X заменить на μX , а λ на λ/μ , где μ — произвольная постоянная, значит, Φ есть функция λX , и мы имеем, считая теперь λ и X переменными,

$$K' \frac{F(\lambda X) (\lambda dX + X d\lambda)}{\lambda^2 X^2} = d \log \Phi,$$

или, если считать X постоянным,

$$K' \frac{F(\lambda X) d\lambda}{\lambda^2 X} = d \log \Phi,$$

или, наконец,

$$u_\lambda d\lambda = \frac{K'}{X} \frac{d \log \Phi}{\lambda^3}.$$

Тогда полное излучение будет равно

$$\int_0^\infty u_\lambda d\lambda = \frac{X}{K'} \int \frac{d \log \Phi}{\lambda^3}.$$

Если бы функция w была непрерывной, то Φ превратилось бы в нуль, а $\log \Phi$ стал бесконечным при $\alpha = \infty$, иначе говоря, при $\lambda X = 0$. Следовательно, функция под знаком интеграла становится бесконечной при $\lambda = 0$, причем так, что $\int d \log \Phi$ или, а fortiori, что $\int \frac{d \log \Phi}{\lambda^3}$ становится бесконечным.

Значит, при любом законе излучения, если считать, что полное излучение конечно, мы приходим к функции w , представляющей прерывности, аналогичные квантам.

Это предполагает, тем не менее, правильность формулы (18), и по этому пункту позволительны сомнения, раз Планк смог его установить, не иначе, как опираясь на принципы классической электродинамики, которую его теория как раз и имела целью заменить.

9. Вторая теория Планка

Известно, что Планк предложил вторую теорию, немного отличающуюся от первой. В первой теории резонаторы могут излучать или поглощать энергию только скачками. Во второй они могут ее излучать только скачками, а поглощать непрерывно. В этой новой теории Планк полагает

$$Y = \frac{\varepsilon}{2} \frac{e^{\frac{\varepsilon}{\bar{X}}} + 1}{e^{\frac{\varepsilon}{\bar{X}}} - 1},$$

откуда

$$\frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)} = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{e^{\alpha\varepsilon} + 1}{e^{\alpha\varepsilon} - 1} = -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{e^{\alpha\varepsilon} - 1}$$

и

$$\Phi(\alpha) = \frac{e^{-\alpha \frac{\varepsilon}{2}}}{1 - e^{-\alpha\varepsilon}} = e^{-\frac{\alpha\varepsilon}{2}} + e^{-\frac{3\alpha\varepsilon}{2}} + e^{-\frac{5\alpha\varepsilon}{2}} + \dots$$

Обратясь к формуле (15), мы видим, что w всюду равна нулю, кроме некоторых выделенных значений, для которых она бесконечна, причем эти значения — нечетные кратные $\varepsilon/2$. Это не то предположение, из которого Планк исходил. Действительно, если бы энергия резонатора всегда была нечетным кратным $\varepsilon/2$, то для него было бы невозможно поглощать энергию непрерывно.

Любопытно исследовать, каким образом два одинаковых по виду рассуждения привели в одном случае к правильному, в другом — к неправильному выводу. Замечу только, что в своем рассуждении Планк вводит обмен энергией не путем столкновений, а лишь за счет излучения и поглощения.

10. Оправдание ограничивающих предположений

Мы сделали для упрощения и, в особенности, для уточнения некоторое количество довольно частных и ограничивающих предположений. Можно поставить вопрос, играют ли они существенную роль, так как в этом случае их искусственный характер мог бы вызвать недоверие.

Сначала мы предположили, что для простого случая двух резонаторов последний множитель $W(\xi, \eta)$ не зависит от ξ . Затем мы увидели, что, не делая никакого ограничивающего предположения, мы должны иметь во всех случаях

$$W(\xi, \eta) = w(\eta) w_1(\xi);$$

положим тогда из формулы, подобной (15):

$$\Phi_1(\alpha_1) = \int_0^\infty w_1(\xi) e^{-\alpha_1 \xi} d\xi. \quad (15 \text{ ter})$$

Получим тогда (считая $\sum \xi = y$, $\sum \eta = x$, $x + y = \sum \xi + \sum \eta = h$), что

$$M = \int \Phi^n(\alpha) \Phi_1^p(\alpha_1) e^{\alpha x} e^{\alpha_1(h-x)} dx d\alpha d\alpha_1.$$

Положим теперь

$$x = n\omega, \quad h - x = p\omega_1, \quad \omega = \frac{h}{n} - k\omega_1$$

и получим, с точностью до того же постоянного множителя,

$$M = \int \Phi^n(\alpha) \Phi_1^p(\alpha_1) e^{n\alpha\omega} e^{p\alpha_1\omega_1} d\omega d\alpha d\alpha_1,$$

$$MY = \int \omega \Phi^n \Phi_1^p e^{n\alpha\omega} e^{p\alpha_1\omega_1} d\omega d\alpha d\alpha_1,$$

$$MX = \int \omega_1 \Phi^n \Phi_1^p e^{n\alpha\omega} e^{p\alpha_1\omega_1} d\omega d\alpha d\alpha_1.$$

Мы видим теперь, что

$$Y = \omega, \quad X = \omega_1 = \frac{h}{p} - \frac{\omega}{k},$$

если придавать ω , α и α_1 значения, при которых выражение

$$\Phi(\alpha) \Phi_1^k(\alpha_1) e^{\alpha\omega} e^{k\alpha_1\omega_1}$$

имеет максимум.

Приравняв нулю логарифмические производные этого выражения по α , α_1 и ω (предполагается, что ω_1 заменено его значением как функции ω), получаем

$$\frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)} + \omega = \frac{\Phi_1'(\alpha_1)}{\Phi_1(\alpha_1)} + \omega_1 = \alpha - \alpha_1 = 0.$$

И, наконец, формулы

$$\frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)} = -Y, \quad \frac{\Phi_1'(\alpha)}{\Phi_1(\alpha)} = -X, \quad (17 \text{ bis}).$$

которые могут заменить формулы (17). Отсюда выводим следующий закон распределения энергии.

Каждый резонатор связан с некоторой функцией $\Phi(\alpha)$, а его средняя энергия при заданной температуре представлена в виде $-\Phi'(\alpha)/\Phi(\alpha)$, где α — функция температуры, одинаковая для всех резонаторов. Но опыт учит, что есть тела, энергия которых пропорциональна (мы скажем бы даже равна, если должным образом выбрать единицы) абсолютной температуре. И это происходит, в частности, с резонаторами с очень большим периодом. В формулах (17 bis) X и Y выражены как функция вспомогательной переменной α .

Предположим, что нам из опыта известно соотношение между X и Y . Мы могли бы произвольно выбрать одну из функций Φ или Φ' , иначе говоря, одно из соотношений (17 bis); второе мы вывели бы из него. Ясно, что этот выбор всегда может быть сделан так, чтобы интегралы

$$\int_0^\infty X d\alpha, \quad \int_0^\infty Y d\alpha$$

были бесконечными, т. е. таким образом, чтобы w и w_1 были непрерывными функциями. Но это означало бы отказ от предположения, при котором $w_1=1$. Что отсюда может последовать?

Столкновения между атомами (длинноволновыми резонаторами) будут тогда, с точки зрения статистической механики, описываться интегралом

$$\int w_1(\xi_1) w_1(\xi_2) \dots w_1(\xi_p) d\tau,$$

который играет ту же роль, что интеграл M в предыдущем рассуждении. Мы найдем для этих атомов закон равномерного распределения, однако нам придется отказаться от закона Максвелла для распределения скоростей. Столкновения атомов не могут больше происходить по обычным законам механики; в частности, *в соответствии с законом сохранения количества движения*. Эти выводы кажутся мне недопустимыми, и представляется предпочтительнее предположить, что $w_1=1$.

Формулы (17), примененные к двум коротковолновым резонаторам, показывают, что закон распределения не будет затронут, если столкновения произойдут не между одним длинноволновым и одним коротковолновым резонатором, а между двумя резонаторами, хотя и с разными, но короткими периодами.

Вместо простых резонаторов Планка можно взять более сложные системы. Тогда W , если предположить, что имеются две системы, может зависеть не только от энергий ξ и η , но и от других переменных ξ' , ξ'' , ..., относящихся к первой системе, а также от η' , η'' , ..., относящихся ко второй. Мы должны получить, по причинам, изложенным выше,

$$W = w(\eta, \eta', \eta'', \dots) w_1(\xi, \xi', \xi'' \dots).$$

Совокупность систем удовлетворяет интегралу живых сил

$$\sum \xi + \sum \eta = h.$$

Я не предполагаю ничего другого и рассматриваю интеграл

$$u(\eta) = \int w(\eta, \eta', \eta'', \dots) d\eta' d\eta'' \dots,$$

распространенный на все значения, которые могут принимать переменные $\eta', \eta'', \dots$. Тогда $u(\eta)$ и аналогичная функция $u_1(\xi)$, образованная при помощи w_1 , будут играть ту же роль, которую мы приписали $w(\eta)$ и $w_1(\xi)$. Можем предположить (если имеется $n+p$ систем)

$$U = u(\eta_1) u(\eta_2) \dots u(\eta_n) u_1(\xi_1) u_1(\xi_2) \dots u_1(\xi_p),$$

$$M = \int U d\sigma d\tau; \quad MY = \int \eta_1 U d\sigma d\tau; \quad MX = \int \xi_1 U d\sigma d\tau,$$

и наш анализ может продолжаться до конца без изменений.

Образовав последний множитель, следует искать дифференциальные уравнения, которые его допускают, либо подобрать какие-нибудь уравнения с резкими скачками, которые могли бы сыграть роль этих дифференциальных уравнений, когда последний множитель w не непрерывен. Без сомнения, задача эта довольно трудная. Я не буду ею заниматься в настоящее время.

Напомним, заканчивая, что обмен энергией может происходить двумя путями — по принципу Допплера—Физо и через столкновения. В этой статье мы рассматривали только второй путь. Я вернусь к первому в другой статье, но должен заметить, что *если допустить возможность столкновений*, оба пути должны привести к одному и тому же закону распределения, иначе нарушался бы второй принцип термодинамики. Это и позволило мне ограничиться рассмотрением только одного способа обмена.

ГИПОТЕЗА КВАНТОВ *

Введение

Можно задать себе вопрос: не находится ли механика на пороге нового переворота? Недавно в Брюсселе состоялся конгресс **, на котором собралось около двадцати физиков различных национальностей; здесь постоянно можно было услышать разговоры о механике новой, которая противопоставлялась механике старой. А о какой старой механике шла речь? О той механике Ньютона, которая безраздельно господствовала еще в конце XIX века? Нет, здесь старой уже считалась механика Лоренца, механика теории относительности ***, та, которая менее пяти лет назад еще считалась верхом смелости.

Означает ли это, что механика Лоренца добилась лишь мимолетного успеха, что она была только капризом моды, и что мы находимся на грани возврата к древним идолам, от которых неосмотрительно отказались? Ни в коей мере вчерашние завоевания не скомпрометированы; во всех пунктах, где она расходится с ньютоновской, механика Лоренца сохраняется. Продолжают верить, что никакое движущееся тело не сможет превзойти скорости света, что масса тела не постоянна, а зависит от скорости и от угла, образуемого этой скоростью и направлением силы, действующей на тело, что никакой опыт не может выявить, находится ли тело в покое или в абсолютном движении, то ли по отношению к абсолютному пространству, то ли даже по отношению к эфиру. Просто к этим смелым идеям хотят добавить новые, еще более неожиданные. Теперь спрашивают уже не о том, нуждаются ли в модификации дифференциальные уравнения динамики, а вообще, можно ли выражать законы движения дифференциальными уравнениями. И в этом состоит наиболее глубокая революция, которую претерпела философия природы со времени Ньютона. Светлый гений Ньютона ясно осознавал (или думал, что осознает — теперь мы начинаем и это ставить под сомнение), что состояние движущейся системы, или, более общо, всей Все-

* Revue scientifique, 1912, 17, 225—232.

** Речь идет о I Сольвеевском конгрессе, который состоялся в Брюсселе в 1911 г. Здесь Пуанкаре непосредственно столкнулся с кругом проблем, связанных с квантовой теорией. (Прим. перев.).

*** Пуанкаре пользуется термином «механика принципа относительности». (Прим. перев.).

ленной, может зависеть только от своего непосредственно предшествующего во времени состояния, что все изменения в природе должны происходить непрерывным образом. Конечно, эту идею открыл не он; она содержалась в мыслях древних и схоластов, которые провозгласили: «Natura non facit saltus» *. Но там она задышалась под массой сорной травы, которая мешала ей развиваться и которую вычистили в конце концов великие философы XVII века.

И вот именно эта фундаментальная идея сегодня оспаривается; ставится вопрос о том, не следует ли ввести в законы природы дискретность, причем не кажущуюся, а по существу, и мы должны прежде всего объяснить, каким образом могли прийти к столь необычной точке зрения.

Термодинамика и вероятность

Обратимся к кинетической теории газов; газы состоят из молекул, движущихся с большими скоростями по всем направлениям. Их траектории были бы прямолинейны, если время от времени молекулы не сталкивались бы между собой или со стенками сосуда. Благодаря случайному характеру этих столкновений в конце концов в газе устанавливается определенное распределение скоростей как по направлению, так и по величине. При нарушении этого среднего распределения оно само по себе стремится восстанавливаться.

Таким образом, несмотря на чрезвычайную сложность движений, наблюдатель, воспринимающий только средние величины, замечает лишь простые законы, являющиеся результатом игры случая и больших чисел. Он наблюдает *статистическое равновесие*. Так, например, скорости распределены равномерно по всем направлениям, ибо если в какое-то мгновение они стремились бы принять одно общее направление, то уже через очень короткий промежуток времени столкновения заставили бы их изменить направления.

Расчет приводит к другому выводу: живая сила, которую приобретает *в среднем* каждая молекула, пропорциональна числу ее степеней свободы. Поясняю: тело может обладать определенным числом небольших движений. Например, материальная точка может перемещаться вдоль трех осей координат — это означает, что у нее три степени свободы; сфера может двигаться поступательно параллельно любой из трех осей и, кроме того, может вращаться вокруг своих трех осей — она имеет шесть степеней свободы. Поскольку молекулы не являются простыми материальными точками, они подвержены деформациям, а значит у них большее число степеней свободы. Например, у молекулы аргона их три, а у молекулы кислорода — пять. Тогда согласно сформулированному выше закону, называемому *законом равномерного распределения*, если в статистическом равновесии молекула аргона обладает кинетической энергией,

* Природа не делает скачков (лат.). (Прим. перев.).

равной трем, молекула кислорода должна иметь кинетическую энергию, равную пяти. Другими словами, молекулярные удельные теплоемкости аргона и кислорода при постоянном объеме относятся как 3 : 5.

И этот закон, соответственно интерпретированный, верен не только для газов; он фактически вытекает из самого вида, который обычно придают уравнениям динамики, т. е. вида, к которому их привел Гамильтон. Если общие законы динамики применимы к жидкостям или твердым телам, то эти тела должны подчиняться закону равномерного распределения *mutatis mutandis*.

Принцип Карно, или второе начало термодинамики, учит нас тому, что мир стремится к определенному конечному состоянию, из которого он уже не сможет выйти, следовательно, он утверждает, что статистическое равновесие возможно. Если это было бы не так, то всегда можно было бы найти конструкцию, позволяющую осуществить так называемый «перпетуум мобиле второго рода», например нагревать паровую машину льдом, поскольку лед, как бы он ни был холоден, имеет температуру выше абсолютного нуля, а значит, содержит некоторое количество тепла. Если бы условия статистического равновесия были разными для тел *A* и *B*, *B* и *C*, наконец *C* и *D*, то, беря поочередно одну или другую пару, было бы легко бесконечно менять условия этого равновесия; рассматриваемые тела никогда бы не знали окончательного покоя и не было бы истинного статистического равновесия; принцип Карно был бы неверен.

Благодаря какому особому совпадению условия этого равновесия будут всегда одинаковыми, независимо от вида рассматриваемых тел? Предыдущие рассуждения позволяют нам это понять: причина заключается в том, что общие законы динамики, выраженные дифференциальными уравнениями Гамильтона, справедливы для всех тел.

Эти представления до сих пор всегда подтверждались опытом, причем данные их проверок столь многочисленны, что совпадения нельзя приписывать случайности. Отсюда следует, что если новые опыты выявят исключения, то необходимо будет не отбрасывать теорию, а видоизменять и расширять ее с тем, чтобы она позволяла охватывать и новые факты.

Некоторые возражения возникли в умах с самого начала. Молекулы и сами атомы не являются материальными точками, а если они обладают размерами, то позволительно ли их уподоблять абсолютно твердым телам? Как бы проста ни была молекула аргона, это не материальная точка, а сфера. Почему же эта сфера не может вращаться? Это дало бы шесть степеней свободы вместо трех *, если только не предположить, что соударения, способные изменить поступательное движение молекулы, совершенно не влияют на ее вращение, что они не могут вызвать ни малейшей деформации молекул и т. д. Кроме того, каждая линия спектра соответствует одной

* То, что отношение удельных теплоемкостей не изменится, если приписывать шесть степеней свободы аргону и десять кислороду, ни о чем не говорит. Кинетическая теория газов, основанная на теореме вириала, требует трех, а не шести степеней свободы.

степени свободы и нечего даже говорить, что спектр кислорода содержит больше пяти линий. Почему некоторые степени свободы как будто не играют никакой роли, почему они, так сказать, заморожены, пока не вмешаются таинственные обстоятельства?

Закон излучения

В начале физиков не очень заботили эти трудности, но два новых факта привели к изменению положения вещей. Первый — это так называемый закон *черного излучения*. Абсолютно черным является тело, у которого коэффициент поглощения равен единице. Подобное тело, будучи накалено, испускает свет всех длин волн, и интенсивность этого света меняется по определенному закону, представленному некоторой функцией температуры и длины волны. Непосредственное наблюдение здесь невозможно, но существует способ обхода этой трудности: можно заключить раскаленное тело в замкнутую оболочку; тогда испускаемый телом свет после ряда отражений будет полностью поглощен и не сможет выйти из полости. Когда установится состояние равновесия, температура полости станет повсюду одинаковой, и полость окажется заполненной излучением, подчиняющимся закону черного излучения.

Ясно, что здесь имеем случай статистического равновесия, так как обмен энергией будет продолжаться до тех пор, пока каждая часть системы будет получать в среднем за короткий промежуток времени точно столько же, сколько она теряет. Но именно здесь и начинаются трудности. В полости содержится хоть и очень большое, но конечное число молекул вещества, обладающих лишь конечным числом степеней свободы; напротив, у эфира их бесконечное множество, поскольку он может колебаться бесконечным числом способов, соответствующих различным длинам волн, с которыми полость находится в резонансе. Если применить закон равномерного распределения к этой системе, то эфир заберет всю энергию, ничего не оставляя веществу.

Можно было бы ограничить свободу эфира, приписывая ему связи, которые сделали бы его неспособным передавать, например, очень короткие волны; мы бы избавились так от указанного противоречия, но пришли бы к закону, который, не будучи абсурдным, тем не менее не соответствует опыту. Это закон Рэлея, согласно которому излученная энергия для данной длины волны пропорциональна абсолютной температуре, а при заданной температуре обратно пропорциональна четвертой степени длины волны.

Истинный закон, подтвержденный опытом, — это закон Планка; излучение для малых длин волн или при низких температурах намного слабее того, которое требуется законом Рэлея, соответствующим закону равномерного распределения.

Второй факт вытекает из измерений удельной теплоемости твердых тел при очень низких температурах (в жидком воздухе или жидком водо-

роде). Вместо того, чтобы оставаться точно постоянными, удельные теплоемкости быстро уменьшаются, стремясь к нулю при температуре абсолютного нуля. Все происходит так, будто молекулы по мере охлаждения теряют степени свободы, будто некоторые из их движений в конце концов замораживаются.

Кванты энергии

Объяснение этим явлениям надо искать, не отбрасывая принципы термодинамики. Прежде всего нужно признать возможность статистического равновесия, без которого от принципа Карно ничего не останется, ибо в термодинамике нельзя допустить бреши без того, чтобы не рухнуло все здание. Джинс пытался все согласовать, предполагая, что наблюдаемое нами равновесие является не окончательным, а каким-то временным. Но подобную точку зрения трудно принять. Его теория, не предсказывая ничего, не противоречит опыту, но она оставляет без объяснения все известные законы, ограничиваясь тем, что не противоречит им.

Эти законы предстают как результат не знаю уж какой счастливой случайности.

Планк искал другое объяснение найденного им закона; по его мнению, речь идет о настоящем равновесии, и если оно не соответствует закону равномерного распределения, то это означает, что неточны уравнения Гамильтона. Чтобы прийти к эмпирическому закону, он ввел в эти уравнения весьма удивительные изменения.

Как следует себе представить излучающее тело? Мы знаем, что резонатор Герца посылает в эфир герцевские волны, являющиеся не чем иным, как световыми волнами. Раскаленное тело рассматривается, как состоящее из очень большого числа маленьких резонаторов. Когда тело нагревается, эти резонаторы приобретают энергию, начинают колебаться, а следовательно, излучать.

Гипотеза Планка заключается в предположении, что каждый из этих резонаторов может поглощать или испускать энергию только *резкими скачками*, так что запас накопленной ими энергии является кратным одной и той же величине, называемой квантом, которая должна состоять из целого числа *квант*. Эта неделимая единица, этот квант различен для разных резонаторов и обратно пропорционален длине волны, так что резонаторы с коротким периодом могут приобретать энергию только большими порциями, тогда как резонаторы с большим периодом могут поглощать или испускать малые количества энергии. Что отсюда вытекает? Для раскачивания резонатора малого периода требуются большие усилия, так как для этого необходима энергия, по меньшей мере равная его кванту, имеющему большую величину. Поэтому вероятность того, что этот резонатор останется в покое, велика, особенно при низких температурах; именно поэтому в черном излучении сравнительно мало света с малыми длинами волн.

Эта гипотеза хорошо объясняет факты, если только допустить, что соотношение между энергией резонатора и его излучением такое же, как и в старой теории. И в этом состоит первая трудность. Почему это соотношение сохраняется, если все остальное разрушено? Но ведь нужно же что-то сохранить, иначе не на чем будет строить.

Уменьшение удельных теплоемкостей также объясняется. Когда температура падает, энергия очень многих вибраторов убывает до величины, меньшей собственного кванта, и эти вибраторы вместо того, чтобы слабо колебаться, вовсе перестают колебаться, почему общая энергия и уменьшается быстрее, чем это следовало по старой теории. Это все лишь качественные соображения, но не так уж трудно получить и удовлетворительное количественное совпадение.

Обсуждение предыдущей гипотезы

Установление статистического равновесия возможно только при наличии обмена энергией между резонаторами, иначе резонаторы сохраняли бы бесконечно долго свою произвольную начальную энергию и окончательное распределение не подчинялось бы никакому закону. Обмен не мог бы происходить через излучение, если резонаторы были бы фиксированы внутри неподвижной оболочки. Действительно, в этом случае каждый резонатор мог бы излучать или поглощать только свет определенной длины волны, и его энергия могла бы передаваться только резонатору того же периода.

Совершенно другое дело, если предположить, что оболочка деформируема или содержит подвижные тела. Отражаясь от движущегося зеркала, свет меняет длину волны в соответствии с известным принципом Доплера—Физо. В этом заключается первый способ обмена энергией — через излучение.

Но существует и второй способ. Резонаторы могут воздействовать механически друг на друга либо прямо, либо через посредство движущихся атомов и молекул, которые, перемещаясь от одного резонатора к другому, сталкиваются с ними. Это обмен через соударения. Недавно я исследовал этот способ и вновь нашел и подтвердил результаты Планка *.

Как выше уже было показано, все способы обмена энергией с необходимостью должны привести к одним и тем же условиям статистического равновесия, ибо в противном случае принцип Карно оказался бы неверным. Это необходимо, чтобы прийти к согласию с данными эксперимента, но, кроме того, нужно дать удовлетворительное объяснение такому удивительному совпадению, иначе мы вынуждены будем приписывать его какому-то ниспосланному случаю. В старой механике объяснение было найдено: оно заключалось в универсальности уравнений Гамильтона. Найдём ли мы в новой теории нечто подобное?

* См. наст. том, стр. 516. (Прим. ред.).

Я еще не завершил исследования обмена через излучение и еще не знаю, известны ли все условия равновесия, к которым приводит этот способ обмена; но меня не удивит, если будут открыты новые условия, которые смогут причинить нам определенные хлопоты.

Пока известно одно такое условие, выявленное трудами Вина, — это так называемый закон Вина, согласно которому произведение энергии излучения на пятую степень длины волны зависит только от произведения температуры на длину волны.

Сразу видно, что закон Вина совместим со статистическим равновесием, которое устанавливается благодаря обмену энергией при соударениях, только если энергия при этом меняется квантами, *обратно пропорциональными длине волны*. Здесь сказывается *механическое* свойство резонаторов, явно независимое от принципа Допплера—Физо, и трудно понять, в результате какой таинственной предустановленной гармонии эти резонаторы наделены именно тем единственным механическим свойством, которое оказалось подходящим. Если статистическое равновесие неизменно, то это происходит не в силу одной универсальной причины, а в результате стечения многих независимых обстоятельств.

При использованном Планком методе изложения эта двойственность способов обмена не выявляется, она содержится в скрытом виде, и я счел необходимым обратить внимание на этот вопрос.

Это не единственная трудность. Один резонатор не может уступать энергию другому иначе, чем порциями, кратными своему кванту, а с другой стороны, резонатор может поглощать только целые кратные собственного кванта. Поскольку оба кванта в общем случае несоизмеримы, этого достаточно для исключения возможности прямого обмена. Но обмен может происходить через посредство атомов, если предположить, что энергия этих атомов может меняться непрерывно.

И это еще не самое страшное; резонаторы должны терять или приобретать каждый квант скачком, или, точнее говоря, они либо приобретают свой квант целиком, либо не получают ничего. Но ведь для отдачи или приобретения кванта необходимо определенное время, этого требует явление интерференции. Два кванта, испущенные одним резонатором в разные моменты, не интерферировали бы между собой. Действительно, два акта испускания должны рассматриваться как два независимых явления, и нет никаких оснований считать, что интервал времени между ними постоянен. Интервал даже не может быть постоянным. Он должен быть больше для слабого света, чем для сильного, по крайней мере, если не предполагать, что он постоянен, что каждое испускание может состоять из нескольких квантов и что интенсивность зависит от числа квантов, испущенных в одном акте. Но и последнее не проходит. Чтобы получить результаты, согласующиеся с наблюдениями интерференции, указанный интервал нужно считать малым по сравнению с периодом колебаний. С другой стороны, величина кванта следует из самой формулы Планка; значит, должен сущест-

зовать минимум дозволенной интенсивности света, тогда как наблюдались испускания света с интенсивностью ниже этого минимума.

Итак, каждый квант интерферирует сам с собой. Таким образом, необходимо, чтобы квант, обратившись в форму световых колебаний эфира, делился на несколько частей, запаздывающих одна относительно другой на многие длины волн и, следовательно, не испущенных одновременно.

Как будто здесь имеется противоречие, но, может быть, его удастся разрешить. Представим себе систему, состоящую из определенного числа одинаковых осцилляторов Герца, каждый из которых заряжается от источника электричества. Как только заряд достигает определенной величины, проскакивает искра, начинается излучение, и ничто не в состоянии помешать этому, пока осциллятор полностью не разрядится. Таким образом, он либо теряет свой квант целиком, либо ничего не теряет (здесь квант — это количество энергии, соответствующее разрядному потенциалу). Но этот квант теряется не вдруг, каждое испускание длится некоторое время, и испущенные волны в состоянии правильно интерферировать.

Планк предположил, что соотношение между энергией резонатора и его частотой таково же, как и в электродинамике Максвелла. Можно отказаться от этой гипотезы и предположить, что механические соударения происходят по старым законам. Тогда распределение энергии между резонаторами происходило бы согласно закону равномерного распределения, но резонаторы с коротким периодом при равной энергии излучали бы меньше. Подобное предположение позволило бы понять закон излучения, но не объясняло бы аномалии теплоемкости при низких температурах, если только не допускать кроме того, что обмен при соударениях невозможен для очень холодных твердых тел и что их молекулы обмениваются теплом на малых расстояниях только через излучение.

Можно было бы идти еще дальше и предположить, что соударений вообще нет, что все силы, считающиеся механическими, имеют электромагнитное происхождение, что они вызваны дальнодействием, обусловленным в свою очередь излучением. Тогда нужно было бы считать, что существует только один способ обмена — через излучение при помощи эффекта Доплера—Физо. Может быть, в этом случае пришли бы к гипотезам, совершенно отличным от гипотезы квантов.

Кванты действия

В некотором смысле новая концепция соблазнительна. С некоторых пор существует тенденция к атомистике: вещество представляется состоящим из неделимых атомов, электричество уже не непрерывно, не делимо до бесконечности, а распадается на тождественные между собой электроны одинакового заряда; с недавнего времени мы уже говорим о магнетонах, или атомах магнетизма. С этой точки зрения кванты выступают как *атомы* энергии. К сожалению, это сравнение нельзя доводить до конца. Атом во-

дорода, например, действительно неизменен: он сохраняет массу, каковы бы ни были соединения, в которые он входит в качестве составной части. Электроны также сохраняют свою индивидуальность, испытывая самые различные изменения. Но верно ли это для так называемых атомов энергии? Пусть, например, мы имеем три кванта в резонаторе, длина волны которого равна 3, и эта энергия переходит к резонатору с длиной волны 5. Тогда они представляют собой уже не 3, а 5 квантов, потому что кванты нового резонатора меньше, а значит при переходе число таких атомов и их величина изменились.

Вот почему наш разум еще не удовлетворен этой теорией; она должна еще объяснить, *почему* квант резонатора обратно пропорционален длине волны. Именно это заставило Планка решиться изменить способ изложения своих идей. Но здесь я попадаю в затруднительное положение, не желая ни изменять Планку, опережая его мысли и идя дальше, чем он сам того хотел, ни указывая, куда, как мне кажется, он хотел идти. Поэтому я ограничусь лишь возможно более точным переводом его текста, несколько сокращая его. Прежде всего напомним, что изучение термодинамического равновесия свелось к вопросу статистики и вероятности. «Вероятность непрерывной переменной получается рассмотрением независимых элементарных областей равной вероятности. . . В классической динамике для определения этих элементарных областей пользуются теоремой о том, что два физических состояния, из которых одно является необходимым следствием другого, равновероятны. Если обозначить через q одну из обобщенных координат и через p — соответствующий ей момент, то согласно теореме Лиувилля в физической системе область $\iint dpdq$, рассматриваемая в произвольный момент, не меняется со временем, если q и p меняются в соответствии с уравнениями Гамильтона. С другой стороны, p и q могут принять в заданный момент всевозможные, независимые друг от друга, значения. Отсюда следует, что элементарная область вероятности является бесконечно малой порядка $dpdq$. . . Новая гипотеза должна иметь целью такое ограничение изменчивости p и q , чтобы эти переменные менялись бы только скачком, или чтобы они рассматривались как отчасти связанные друг с другом. Мы достигаем таким образом сокращения числа элементарных областей вероятности, тогда как протяженность каждой из них увеличивается. Гипотеза кванта действия состоит в предположении, что эти равновеликие области не бесконечно малы, а конечны и для каждой из них

$$\iint dpdq = h,$$

где h — постоянная».

Считаю необходимым дополнить эту цитату несколькими пояснениями. Я не могу объяснить здесь ни что такое действие, обобщенные координаты и моменты, ни те различные интегралы, которыми пользуется Планк; ограничусь лишь утверждением, что элемент энергии равен произведению

частоты на элемент действия. И если, как мы уже говорили, квант энергии пропорционален частоте, то это потому, что квант действия является универсальной постоянной, настоящим атомом.

Но я должен все-таки попытаться объяснить, что собой представляют элементарные области вероятности. Эти области неделимы, т. е. как только мы знаем, что находимся внутри одной из этих областей, то этим все определено. Если бы события, которые должны последовать, не были бы полностью определены этим фактом, если бы они различались при переходе от одной части области к другой, рассматриваемая область не была бы неделимой с точки зрения вероятности, поскольку вероятность некоторых будущих событий не была бы одинаковой в различных ее частях.

Это сводится к утверждению, что все состояния системы, соответствующие одной и той же области, неразличимы, т. е. они образуют одно-единственное состояние. Таким образом, мы приходим к следующей формулировке, более точной, чем данная Планком, но не противоречащей, как мне думается, его идее:

Физическая система обладает конечным числом различных состояний; она перескакивает из одного состояния в другое, не проходя через непрерывный ряд промежуточных состояний.

Допустим, простоты ради, что состояние системы зависит только от трех параметров, так что мы можем представить его геометрически точкой в пространстве. Ансамбль точек, изображающих различные возможные состояния, не заполняет полностью пространство или какую-либо область пространства, как обычно предполагается, а представляет собой большое число изолированных точек в пространстве. Правда, эти точки распределены очень густо, что и создает у нас иллюзию непрерывности. Все эти состояния должны считаться равновероятными. Действительно, если признать детерминизм, то за каждым из этих состояний должно с необходимостью следовать другое, столь же вероятное, поскольку первое с достоверностью влечет за собой второе. Мы постепенно увидим также, что если исходить из некоторого начального состояния, то все те состояния, которые будут когда-нибудь достигнуты, оказываются равновероятными. Остальные состояния нельзя считать возможными.

Но изолированные точки, изображающие состояния, не должны быть распределены в пространстве произвольным образом. Распределение должно быть таким, чтобы, проводя наблюдения с помощью грубых чувств, прийти к общим законам динамики, например к уравнениям Гамильтона. Одно сравнение, значительно более близкое к действительности, чем нам кажется, возможно, поможет мне быть лучше понятым. При непосредственном наблюдении жидкости вначале создается впечатление, что вещество непрерывно. Более точный опыт показывает, что жидкость несжимаема, т. е. объем любой ее части постоянен. Некоторые соображения заставляют нас в дальнейшем считать, что жидкость состоит из молекул, очень маленьких и многочисленных, но дискретных. Тогда мы не можем уже представлять себе распределение этих молекул, без ограничения своей

фантазии. Вследствие несжимаемости мы вынуждены предположить: два равных маленьких объема содержат равное число молекул. Для распределения возможных состояний Планк вынужден был прибегнуть к аналогичному ограничению, и именно это он выразил в уравнениях, которые были приведены выше и в более детальное обсуждение которых я не могу здесь входить.

Правда, можно было бы себе представить и смешанные гипотезы. Допустим еще раз, что физическая система зависит только от трех параметров и что ее состояние может изображаться точкой в пространстве. Ансамбль точек, изображающих возможные состояния, может не оказаться ни областью пространства, ни роем изолированных точек; он может состоять из большого числа маленьких поверхностей или небольших кривых, отдаленных одна от другой. Пусть, например, одна из материальных точек системы может описывать только определенные траектории, но они описываются непрерывным образом, за исключением случая, когда она перескакивает с одной траектории на другую под влиянием соседних точек. Это может быть случай резонаторов, о которых мы говорили выше. Кроме того, допустимо, что состояние вещества может меняться лишь скачками, т. е. проходя через конечное число возможных состояний, тогда как состояние эфира меняется непрерывно. Все это совместимо с идеями Планка.

Но мы без сомнения предпочтем первое решение, которое свободно от всяких побочных гипотез. Нужно отдавать себе отчет в тех следствиях, которые содержит в себе это решение.

Все сказанное применимо к любой изолированной системе, а также к Вселенной. Следовательно, Вселенная должна скачком переходить из одного состояния в другое, но в промежутках между скачками она остается неизменной, и различные моменты, в течение которых она сохраняет свое состояние, нельзя было бы уже отличить друг от друга; мы приходим, таким образом, к прерывному течению времени, к атомам времени.

Новая теория Планка

Вернемся к менее общим и более конкретным проблемам, например к теории излучения. Хочу сказать несколько слов о видоизменении собственной теории, предложенном Планком. Согласно его новым идеям, испускание света происходит скачкообразно квантами, но поглощение непрерывно. Таким образом он хотел избавиться от следующего затруднения, которое, не знаю почему, казалось ему более обременительным именно в отношении поглощения. Свет попадает на резонатор непрерывно. Если он может поглощаться только квант за квантом, то он должен накапливаться в своего рода преддверии резонатора, пока не станет достаточным, чтобы войти. Во второй теории эта трудность отпадает, но остается необходимость существования зала ожидания для энергии, которая покидает резонатор, ибо эфир может передавать ее только бесконечно малыми долями.

В новой теории резонаторы сохраняют остаток энергии даже при абсолютном нуле. Если принять новую точку зрения Планка, то нужно будет видоизменить соотношение между энергией излучающего тела и интенсивностью его излучения. Излучение уже будет пропорционально не энергии, а только избытку этой энергии над остатком, сохраняющимся при абсолютном нуле.

Признаться ли мне, что я не вполне удовлетворен этой гипотезой? Планк говорит только об испускании и поглощении, причем говорит так, будто резонатор неподвижен: нет речи ни об обмене энергией при соударениях, ни о принципе Допплера—Физо. При этих условиях, как я уже говорил выше, не может быть речи о стремлении к некоторому окончательному состоянию; доказательство, с помощью которого пытаются обосновать существование такого состояния, просто иллюзорно. Автор ничего не говорит о том, являются ли изменения, вызванные соударениями, непрерывными, как при поглощении, или дискретными, как при испускании. При применении общей теории соударений мы уже не получаем результатов Планка. Поэтому удобнее придерживаться его первоначальных идей.

Идеи Зоммерфельда

Зоммерфельд предложил теорию, которую он хочет связать с теорией Планка, хотя единственное общее у них — буква h , входящая в формулы обеих теорий, и название «квант действия», которое они дают весьма различным величинам, обозначенным этой буквой.

Столкновение электронов следует совершенно другим законам, нежели соударение больших тел, законы которых доступны опытной проверке и известны нам. Когда электрон встречает препятствие, он останавливается тем быстрее, чем больше его скорость (если бы этот закон был применим к железнодорожным составам, то проблема их торможения предстала бы в новом свете). То же относится и к возбуждению рентгеновских лучей. Катодные лучи представляют собой движущиеся электроны. Попадая на антикатод, эти электроны останавливаются, и такая резкая остановка приводит к возбуждению эфира, колебания которого порождают рентгеновские лучи. Теория Зоммерфельда объясняет, почему рентгеновские лучи обладают тем большей проникающей способностью и «жесткостью», чем больше скорость катодных лучей. Действительно, чем больше эта скорость, тем резче остановка, а следовательно, тем сильнее возмущение эфира и меньше его период.

Выводы

Мы увидели, каково состояние вопроса: старые теории, которые, казалось, объясняли все известные до сих пор явления, натолкнулись на неожиданное препятствие. Можно было думать, что эти теории нуждаются в модификации. Некая гипотеза возникла впервые у Планка, но она оказалась столь странной, что стремились найти любые способы, чтобы от нее

избавиться. Эти способы пока ничего не дали. Однако это не помешало новой теории разрешить целый ряд трудностей вполне реальных, не просто выдумок, вызванных ленью нашего ума, который отказывается менять свои привычки.

Сейчас невозможно предвидеть, каков будет окончательный выход. Найдется ли совершенно новое объяснение или, наоборот, сторонникам новой теории удастся устранить те препятствия, которые мешают ее безоговорочному признанию? Будет ли править Вселенной дискретность и окончателен ли ее триумф? Или будет установлено, что эта прерывность только кажущаяся и скрывает последовательность непрерывных процессов? Первый, увидевший столкновение, думал, что видит прерывное явление, а мы сегодня понимаем, что он видел лишь очень быстрые, но непрерывные изменения скорости. Пытаться сегодня дать ответ на этот вопрос — пустая трата чернил.

НАСТОЯЩЕЕ И БУДУЩЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ*

Каково современное состояние математической физики? Какие проблемы стоят перед ней? Каково ее будущее? Ожидается ли изменение в направлении ее развития? Теми же, что и нам, представятся цель и методы этой науки десять лет спустя нашим ближайшим преемникам? Или, напротив, нам предстоит быть свидетелями коренного преобразования? Таковы вопросы, которые мы вынуждены поставить, приступая сегодня к нашему рассмотрению.

И если эти вопросы легко поставить, то ответить на них трудно. Даже если бы у нас и появилось стремление отважиться на прогноз, мы бы легко избавились от этого искушения, представив себе все те нелепости, которые были бы сказаны выдающимися учеными начала прошлого столетия, если бы их спросили о том, какова будет наука в XIX веке. Они считали бы себя слишком дерзкими в своих предсказаниях, и какими скромными нашли бы мы их теперь! Так что не ждите от меня никаких пророчеств.

И хотя, как все осторожные медики, я не люблю делать прогноза, но тем не менее не могу отказаться от установления некоторого диагноза. Да, действительно есть признаки серьезного кризиса, как если бы мы находились накануне изменения. Не будем, однако, слишком волноваться.

Мы уверены, что больная не умрет, и мы можем даже надеяться, что этот кризис будет спасительным, поскольку история прошлого гарантирует нам это. Действительно, этот кризис — не первый, и чтобы понять его, следует вспомнить предыдущие. Надеюсь, мне простят небольшой исторический экскурс.

Математическая физика, как мы знаем, произошла от небесной механики, которая произвела ее на свет в конце XVIII века, в ту пору, когда сама она только что достигла полного развития. Дитя поразительно походило на свою мать, особенно в первые годы.

Вселенная состоит из масс несомненно очень больших, но разделенных такими огромными расстояниями, что они представляются нам материальными точками; эти точки притягиваются обратно пропорционально квадрату расстояния, и это притяжение есть единственная сила, которая влияет на их движение. Но если бы наши чувства были достаточно тонки,

* Bulletin des Sciences Mathématiques, série 2, 1904, XXVIII, 302—324.

чтобы наблюдать все детали тел, изучаемых физиком, то картина, которая нам открылась бы, едва ли отличалась от той, которую рассматривает астроном. Там мы тоже увидели бы материальные точки, разделенные огромными — по сравнению с их размерами — расстояниями и движущиеся по орбитам согласно точным законам. Эти бесконечно малые звезды есть атомы. Как и настоящие небесные светила, они притягиваются или отталкиваются, и это притяжение или отталкивание, направленное по линии их соединения, зависит только от расстояния. Закон, согласно которому эта сила меняется как функция расстояния, может быть, не есть закон Ньютона, но это аналогичный закон. Вместо показателя степени — 2 мы, вероятно, имеем другой показатель, и именно от этого изменения показателя степени проистекает все различие физических явлений, разнообразие свойств и ощущений, весь красочный и звучный мир, который нас окружает, одним словом — вся природа.

Такова основная идея в чистом виде. Остается лишь искать в различных случаях, какое значение следует придать этому показателю степени, чтобы учесть все факты. Именно по этому образцу Лаплас, например, построил свою изящную теорию капиллярности: он рассматривает ее как частный случай притяжения, или, как он говорит, всемирного тяготения, и никто не удивляется, находя эту теорию в одном из пяти томов «Небесной механики». Более близкий пример: Брю полагал, что он проник в последнюю тайну оптики, когда показал, что атомы эфира притягиваются обратно пропорционально шестой степени расстояния; и разве сам Максвелл не говорит где-то, что атомы газа отталкиваются обратно пропорционально пятой степени расстояния. Мы имеем степень: —6 или —5 вместо —2, но всегда степень.

Среди теорий того времени лишь одна составляет исключение — это теория Фурье, согласно которой атомы действуют друг на друга на расстоянии; они обмениваются теплотой, но не притягиваются и не перемещаются. С этой точки зрения теория Фурье должна была представляться в глазах его современников и в его собственных несовершенной и временной.

Эта концепция не была лишена величия, она была привлекательна, и многие из нас не отказались от нее окончательно; они знают, что нельзя добраться до самых элементарных составных частей тел, иначе как терпеливо распутывая сложный узел, который дают нам наши чувства; что нужно продвигаться вперед шаг за шагом, не пренебрегая ни одной промежуточной ступенью, что наши предшественники были неправы, когда хотели миновать эту ступень; но они верят, что когда доберутся до этих первичных элементов, то там найдут величественную простоту небесной механики.

Эта концепция не была и бесполезной; она оказала нам неоценимую услугу, поскольку помогла определить фундаментальное понятие закона.

Я поясню свою мысль. Как древние понимали закон? Для них это была внутренняя гармония, так сказать, статическая и неизменная;

это была модель, которой природа старалась подражать. Для нас закон совсем иное — это постоянная связь между явлением сегодня и явлением завтра, одним словом, это дифференциальное уравнение.

Такова идеальная форма физического закона, и первым был в нее облачен закон Ньютона. Если потом эта форма прочно обосновалась в физике, так именно благодаря тому, что копировали, насколько возможно, этот закон Ньютона, подражали небесной механике.

Однако наступил день, когда концепция центральных сил оказалась недостаточной, и это первый из тех кризисов, о которых я вам только что говорил.

Как же тогда поступили? Отказались проникать в детали структуры Вселенной, изолировать составные части этого огромного механизма, анализировать одну за другой силы, которые приводят их в движение, и удовлетворились тем, что взяли в качестве руководства некоторые общие принципы, цель которых как раз в том и состоит, чтобы освободить нас от кропотливого исследования. Что же это значит? Предположим, что перед нами какая-либо машина. Единственное, что видно — это первое и последнее колесо, а передачи, промежуточные колеса, с помощью которых движение передается от одного к другому, спрятаны внутри и недоступны нашему обзору; мы не знаем, осуществляется ли передача зубчатыми колесами или приводными ремнями, или шатуном, или какими-либо другими устройствами. Скажем ли мы, что невозможно ничего понять в этой машине, пока нам не разрешат разобрать ее? Вы хорошо знаете, что нет, и что принципа сохранения энергии достаточно, чтобы выделить наиболее интересный пункт: мы легко установим, что выходное колесо вращается в 10 раз медленнее входного, поскольку оба эти колеса видны; отсюда мы можем заключить, что пара сил, приложенная к первому колесу, уравновесит в 10 раз большую пару сил, приложенную ко второму колесу. Для этого нет никакой необходимости проникать в механизм этого равновесия и знать, каким образом силы компенсируются внутри машины; достаточно быть уверенными в том, что эта компенсация не может не иметь места.

Так вот, при рассмотрении Вселенной принцип сохранения энергии может оказать нам ту же услугу. Вселенная — это тоже машина, гораздо более сложная, чем все машины индустрии, машина, почти все составные части которой глубоко спрятаны от нас. Но, наблюдая движение видимых частей, мы можем с помощью этого принципа сделать выводы, которые останутся справедливыми, каковы бы ни были детали невидимого механизма, приводящего их в движение.

Принцип сохранения энергии, или принцип Майера, несомненно самый важный, но не единственный; есть и другие, из которых мы можем извлечь ту же пользу. А именно:

Принцип Карно, или принцип деградации энергии.

Принцип Ньютона, или принцип равенства действия противодействию.

Принцип относительности, согласно которому законы физических

явлений должны быть одинаковыми для неподвижного наблюдателя и для наблюдателя, совершающего равномерное поступательное движение, так что мы не имеем и не можем иметь никакого способа определять, находимся ли мы в подобном движении или нет.

Принцип сохранения массы, или принцип Лавуазье.

Я добавлю еще принцип наименьшего действия.

Применения этих пяти или шести общих принципов к различным физическим явлениям достаточно для того, чтобы узнать все то, что вообще можно в разумных пределах надеяться познать. Самым замечательным примером этой новой математической физики бесспорно является электромагнитная теория света Максвелла. Что такое эфир, как расположены его молекулы, притягиваются ли они или отталкиваются? Мы ничего об этом не знаем; но мы знаем, что эта среда передает одновременно оптические и электрические возмущения, мы знаем, что эта передача должна происходить согласно общим принципам механики, и этого нам достаточно, чтобы получить уравнения электромагнитного поля.

Эти принципы есть обобщение результатов экспериментов, и, по-видимому, в самой их общности заложена значительная степень достоверности. Действительно, чем более они общие, тем чаще мы имеем возможность их проверять; и эти испытания, умножаясь и приобретая самые разнообразные и неожиданные формы, в конечном счете не оставляют места сомнению.

Такова вторая фаза истории математической физики, и мы еще не вышли из нее. Скажем ли мы, что первая фаза была бесполезной, что в течение пятидесяти лет наука шла ложным путем и что ничего не останется, как только забыть столько затраченных усилий, которые заранее были приговорены к неудаче порочной идеей? Ни в коем случае. Считаете ли вы, что вторая фаза могла осуществиться без первой? Гипотеза центральных сил содержала все принципы; она повлекла их за собой как необходимые следствия; она имела следствием и закон сохранения энергии, и закон сохранения массы, и равенство действия противодействию, и закон наименьшего действия, которые, правда, представлялись не как экспериментальные истины, а как теоремы, и их формулировка была в чем-то более точной и, в то же время, менее общей, чем в современной форме.

Именно математическая физика наших предшественников сблизила нас понемногу со всеми этими принципами, приучила узнавать их под различными одеяниями, в которые они рядились. Их сравнивали с экспериментальными данными, выясняли, как надо было изменить их формулировку, чтобы приспособить к этим данным, кое-где их расширяли и укрепляли.

Таким образом, их начали рассматривать как экспериментальные истины; концепция центральных сил стала тогда бесполезной поддержкой и, скорее, помехой, поскольку она использовала принципы в их гипотетической форме.

Таким образом, рамки научных идей благодаря их эластичности не были сломлены, а лишь расширились; наши предшественники, установившие их, трудились не напрасно; в современной науке мы узнаем общие черты намеченного ими эскиза.

Предстоит ли нам теперь вступить в третью фазу? Находимся ли мы накануне второго кризиса? Рухнут ли в свою очередь принципы, на которых мы все построили? С некоторых пор имеются основания ставить эти вопросы.

Слушая эти слова, вы несомненно думаете о радио, этом великом революционере нашего времени, и действительно, я вернусь к нему вскоре. Но есть и другое; не только закон сохранения энергии находится под угрозой, все другие принципы тоже в опасности, и мы сейчас это увидим, рассмотрев их последовательно.

Начнем с принципа Карно. Это единственный принцип, который не является непосредственным следствием гипотезы центральных сил. Более того, если он кажется не противоречащим прямо этой гипотезе, то, по крайней мере, не может быть согласован с ней без определенных усилий. Если бы физические явления были обусловлены исключительно движениями атомов, взаимное притяжение которых зависело только от расстояния, то, по-видимому, все эти явления должны были бы быть обратимыми; если бы все начальные скорости изменили свое направление на обратное, то атомы, по-прежнему подчиненные тем же силам, должны были бы описывать траектории в противоположном направлении, точно так же как Земля при изменении начальных условий ее движения на обратные, описывала бы в противоположном направлении ту же самую эллиптическую орбиту, которую она описывает в прямом направлении. В таком случае, если физическое явление возможно, то и обратное ему явление также должно существовать, и возможно обратить течение времени.

Однако в природе этого нет, и это как раз то, чему учит принцип Карно; тепло может переходить от горячего тела к холодному, но невозможно затем заставить его повернуть обратно и восстановить исчезнувшую разницу температур. Движение может полностью исчезнуть и превратиться в теплоту путем трения; обратное превращение происходит лишь частично.

Старались примирить это кажущееся противоречие. Если мир стремится к единообразию, то не потому, что его составные части, сначала несхожие, стремятся стать все менее и менее различными, а потому, что случайно перемещаясь, они в конце концов смешиваются. Для глаза, который различал бы все элементы, различие по-прежнему оставалось бы таким же большим. Каждая крупинка сохраняет свою оригинальность и не подражает своим соседям; но когда смесь становится все более однородной, наши грубые ощущения замечают лишь единообразие. Вот почему, например, температуры стремятся выравниваться, не имея возможности вернуться к первоначальным значениям.

Пусть в стакан воды падает капля вина; каким бы ни был закон внутреннего движения жидкости, мы вскоре увидим ее однородно окрашенной в розовый цвет, и, начиная с этого момента, сколько ни тряси сосуд, вино и вода не смогут больше разделиться. Вот другой пример необратимого процесса: нетрудно спрятать ячменное зерно в мешке пшеницы, но найти его затем там и извлечь — практически невозможно. Все это объяснили Максвелл и Больцман, но наиболее четко изложил Гиббс в своих элементарных принципах статистической механики — в книге, слишком мало читаемой, поскольку она несколько трудна для чтения.

Для тех, кто придерживается этой точки зрения, принцип Карно — лишь нестрогий принцип, что-то вроде уступки несовершенству наших чувств; мы не различаем элементов смеси потому, что наше зрение слишком слабое; мы не умеем заставить эти элементы разделиться потому, что наши руки слишком грубы; воображаемый демон Максвелла, который может сортировать молекулы, умел бы заставить мир возвращаться назад. Возможно, что это произойдет и самопроизвольно, только вероятность этого бесконечно мала. Нам пришлось бы долго ждать стечения обстоятельств, которые допустили бы обратное движение, но рано или поздно они реализуются после долгих лет, для написания числа которых понадобились бы миллионы цифр. Эти оговорки оставались, однако, чисто теоретическими и не вызывали беспокойства, а принцип Карно сохранял всю свою практическую ценность. Но вот картина меняется. Биолог, вооруженный микроскопом, давно заметил в своих препаратах беспорядочное движение маленьких частичек в суспензии — броуновское движение. Он подумал сначала, что это биологическое явление, но вскоре увидел, что неодушевленные тела танцевали с не меньшим рвением, чем одушевленные; тогда биолог уступил место физикам. К несчастью, долгое время этот вопрос не интересовал физиков; свет концентрируют для освещения микроскопического препарата, рассуждали они, свет не бывает без теплоты, отсюда неравенства температур и внутренние течения в жидкости; они и вызывают движения, о которых идет речь.

Гуи пришла мысль разобраться в этом вопросе, и он увидел, или полагал, что увидел, что это объяснение не выдерживает критики, что движения становятся все более быстрыми по мере того, как частицы уменьшаются, а способ освещения не оказывает влияния. И если движения не прекращаются или, скорее, беспрестанно возникают, ничего не заимствуя у внешнего источника энергии, то какие же выводы следует сделать? Мы не должны, конечно, из-за этого отказываться от закона сохранения энергии, однако на наших глазах то движение переходит в теплоту путем трения, то, наоборот, теплота превращается в движение и при этом ничего не теряется, поскольку движение постоянно продолжается. Это противоположно принципу Карно. А если это так, то чтобы увидеть мир возвращающимся назад, нам больше не нужно бесконечно проницательного взгляда максвелловского демона, нам достаточно нашего микроскопа. Тела слишком крупные, например в десятую долю милли-

метра, со всех сторон получают удары от движущихся атомов, но они не сдвигаются, потому что ударов очень много и по закону случайных величин они компенсируются. Однако частицы более мелкие получают слишком мало толчков, для того чтобы компенсация происходила наверняка, и они беспрестанно колеблются. И вот уже один из наших принципов в опасности.

Обратимся к принципу относительности; этот принцип не только подтверждается ежедневным опытом, не только является необходимым следствием гипотезы центральных сил, но и необычайно естественно воспринимается нашим разумом.

И тем не менее в нем тоже пробита брешь. Предположим, что имеются два наэлектризованных тела; хотя они нам кажутся покоящимися, оба они вовлечены в движение Земли. Движущийся электрический заряд, как учит нас Роуланд, эквивалентен току; таким образом, эти два заряженных тела эквивалентны двум параллельным токам одного и того же направления, а два таких тока должны притягиваться. Измеряя притяжение, мы измерим скорость Земли — не скорость Земли относительно Солнца или системы неподвижных звезд, но ее абсолютную скорость.

Я хорошо знаю, что на это мне возразят: здесь измеряется не абсолютная скорость, а скорость относительно эфира. Какое слабое утешение! Разве не видно, что из принципа, понятого таким образом, ничего уже нельзя будет извлечь? Этот принцип уже не смог бы ничему нас научить именно потому, что он больше не боялся бы никакого опровержения. Если нам придется измерять что-нибудь, мы всегда сможем сказать, что это не абсолютная скорость, и если это не будет скоростью относительно эфира, то это может быть скоростью относительно какого-то нового неизвестного флюида, которым мы заполним пространство.

К тому же и эксперимент опровергает подобную интерпретацию принципа относительности: все попытки измерить скорость Земли относительно эфира привели к отрицательным результатам. На этот раз экспериментальная физика оказалась более верна принципу, чем математическая физика; теоретики не посчитались бы с ним, чтобы согласовать другие общие представления, но эксперимент упорно подтверждал его.

Испробовали множество способов; наконец, Майкельсон достиг самых высоких пределов точности, но все было тщетно.

И именно для того чтобы объяснить это упорство, математики вынуждены проявить сегодня всю свою изобретательность.

Задача их нелегка, и если Лоренц благополучно справился с ней, так только путем нагромождения гипотез.

Наиболее хитроумной была идея местного времени. Представим себе двух наблюдателей, которые хотят выверить свои часы с помощью оптических сигналов; они обмениваются сигналами, но так как им известно, что распространение света не мгновенно, они посылают их перекрестно. Когда наблюдатель в пункте *В* замечает сигнал пункта *А*, его часы должны показывать не то время, что часы пункта *А*, а время, увеличенное

на постоянную, представляющую продолжительность передачи. Положим, например, что наблюдатель в пункте A отправляет свой сигнал, когда его часы показывают нулевое время, и что наблюдатель в пункте B принимает сигнал, когда его часы показывают время t . Часы выверены, если запаздывание, равное t , представляет продолжительность передачи сигнала. Для проверки наблюдатель в пункте B в свою очередь посылает сигнал, когда его часы показывают время 0; наблюдатель в пункте A должен принять сигнал, когда его часы показывают время t . Тогда часы сверены.

И, действительно, они показывают одно и то же время в одно и то же физическое мгновение, но при условии, что оба пункта неподвижны. В противоположном случае продолжительность распространения не будет одинаковой в двух направлениях, потому что пункт A , например, движется навстречу оптическому возмущению, исходящему из B , тогда как пункт B удаляется от возмущения, посланного из A . Часы, сверенные таким образом, не будут поэтому показывать истинное время; они покажут так называемое *местное время*, так что одни часы будут отставать от других. Однако это неважно, поскольку у нас нет никакого способа заметить это. Все явления, которые произойдут в A , например, будут запаздывать, но запаздывать одинаково, и наблюдатель не заметит этого, потому что его часы отстают; таким образом, как того требует принцип относительности, у наблюдателя не будет никакого способа узнать, находится ли он в покое или в абсолютном движении.

К несчастью, этого недостаточно, и требуются дополнительные гипотезы; необходимо допустить, что все движущиеся тела испытывают одинаковое сжатие в направлении движения. Например, один из диаметров Земли уменьшается на $\frac{1}{200\,000\,000}$ вследствие движения нашей планеты, тогда как другой диаметр сохраняет свою длину.

Таким образом, оказываются скомпенсированными последние маленькие разности. И потом имеется еще гипотеза относительно сил. Каково бы ни было происхождение сил, — будь то тяготение или упругость, — они должны уменьшаться в определенной пропорции в мире, вовлеченном в равномерное поступательное движение. Точнее, должны уменьшаться составляющие, перпендикулярные движению; параллельные составляющие не меняются. Вернемся теперь к нашему примеру двух наэлектризованных тел; они отталкиваются, но в то же время, если все вовлечено в равномерное движение, эти тела эквивалентны двум параллельным токам одного направления, которые притягиваются.

Таким образом, это электродинамическое притяжение уменьшает электростатическое отталкивание, и результирующее отталкивание оказывается более слабым, чем в случае двух покоящихся тел. Но поскольку для измерения этого отталкивания мы должны уравновесить его другой силой и так как все силы уменьшаются в равной пропорции, то мы ничего не замечаем. Таким образом, все, по-видимому, приведено в порядок,

но рассеяны ли сомнения? Что случилось бы, если мы могли бы сообщаться сигналами, которые уже не были бы световыми и скорость распространения которых отличалась бы от скорости света? Если бы после сверки часов оптическим способом мы захотели проверить их юстировку с помощью этих новых сигналов, то обнаружили бы расхождения, которые выявили бы общее поступательное движение обоих пунктов. И разве нельзя себе представить подобные сигналы, если мы, вместе с Лапласом, допустим, что универсальное притяжение передается в миллион раз быстрее света? Итак, в последнее время принцип относительности мужественно отстояли, но сама энергия этой защиты показывает, насколько серьезна была атака.

Поговорим теперь о принципе Ньютона равенства действия и противодействия. Этот принцип тесно связан с предыдущим, и, по-видимому, падение одного повлекло бы за собой падение другого. Поэтому не удивительно, что здесь мы встречаем те же трудности.

Полагают, что электрические явления обусловлены перемещением маленьких заряженных частиц, именуемых *электронами* и погруженных в среду, которую мы называем *эфиром*. Движения этих электронов вызывают возмущения в прилегающем эфире. Эти возмущения распространяются во всех направлениях со скоростью света, и другие электроны, первоначально покоящиеся, в свою очередь приходят в движение, когда возмущение достигает соприкасающихся с ними областей эфира. Таким образом, электроны действуют друг на друга, но это действие не прямое, оно осуществляется через посредство эфира. Может ли в таких условиях осуществляться уравнивание действия и противодействия, по крайней мере, для наблюдателя, принимающего во внимание только движение материи, т. е. электронов, и игнорирующего движения эфира, которое он не может видеть? Конечно, нет. Даже если бы это уравнивание было точным, оно не могло бы быть одновременным. Возмущение распространяется с конечной скоростью; таким образом, оно достигает второго электрона лишь тогда, когда первый давно уже вернулся в состояние покоя. Следовательно, этот второй электрон испытывает действие первого с запаздыванием, и, конечно, в этот момент он не действует на первый электрон, потому что вокруг этого первого электрона ничто уже не движется.

Анализ фактов позволит нам продвинуться еще дальше. Представим, например, вибратор Герца, типа тех, что используют в беспроводной телеграфии; он посылает энергию во всех направлениях, но мы можем снабдить его параболическим зеркалом, как это сделал Герц со своими более маленькими вибраторами, чтобы послать всю энергию в одном направлении. Что произойдет тогда, согласно теории? Аппарат должен податься назад, как если бы он был пушкой, а энергия, им испущенная, была бы ядром; но это противоречит принципу Ньютона, потому что здесь наш снаряд не имеет массы, это не материя, это — энергия. Так же обстоит дело и с сигнальным фонарем маяка, снабженным рефлектором, поскольку свет есть не что иное, как возмущение электромагнитного поля.

Фонарь должен будет испытать отдачу так, как если бы свет, который он посылает, был бы снарядом. Что же это за сила, которая вызывает отдачу? Это то, что называли *давлением Максвелла—Бартоли*. Оно очень мало, и стоило немалых трудов обнаружить его с помощью самых чувствительных радиометров; но важно то, что оно существует.

Если вся энергия, испущенная нашим вибратором, попадет в приемник, он поведет себя так, как если бы он получил механический толчок, который представляет в некотором смысле компенсацию отдачи вибратора. Противодействие будет равно действию, но оно не будет с ним одновременным; приемник сместится вперед, однако не в тот момент, когда вибратор передвинется назад. Если энергия будет распространяться бесконечно, нигде не встретив приемник, то компенсация никогда не произойдет.

Могут возразить, что пространство, которое разделяет вибратор и приемник, через которое возмущение передается от одного к другому, не пустое, что оно заполнено не только эфиром, но и воздухом, или даже в межпланетных пространствах каким-то неуловимым, но все же весомым флюидом, что это вещество испытывает толчок, как и приемник, в момент, когда энергия достигает его, и, в свою очередь, отталкивается, когда возмущение покидает его. Это спасло бы принцип Ньютона, но это неверно. Если бы энергия, распространяясь, оставалась все время привязанной к некоторому материальному носителю, то движущаяся материя увлекала бы за собой свет, но Физо показал, что ничего подобного не происходит, по крайней мере для воздуха. Майкельсон и Морли затем подтвердили это. Можно предположить также, что движение собственно материи точно компенсируется движением эфира, но это привело бы нас к тем же соображениям, что и раньше. Понимаемый таким образом принцип в состоянии все объяснить, поскольку, каковы бы ни были видимые движения, всегда есть возможность вообразить гипотетические движения, которые их компенсируют. Но если он и может все объяснить, то не позволяет нам ничего предвидеть, он не позволяет нам сделать выбор между различными возможными гипотезами, поскольку все объясняет заранее. Таким образом, он становится бесполезным.

И, кроме того, предположения, которые следовало бы сделать относительно движения эфира, не столь удовлетворительны. Если электрические заряды удваиваются, то естественно было бы предположить, что скорости различных атомов эфира тоже удваиваются, и для компенсации необходимо, чтобы средняя скорость эфира учетверилась.

Вот почему долгое время я думал, что в конце концов откажусь от этих выводов теории, противоречащих принципу Ньютона. Однако недавние эксперименты по движению электронов, испускаемых радиом, по-видимому, подтверждают эти выводы.

Теперь перейдем к принципу Лавуазье о сохранении масс. Несомненно, это тот принцип, который нельзя затронуть, не поколебав основ механики. И, однако, теперь некоторые думают, что он кажется нам верным только потому, что в механике рассматриваются лишь умеренные

скорости и что он перестал бы быть справедливым для тел, движущихся со скоростью, сравнимой со скоростью света. В настоящее время считается, что эти скорости реализованы. Катодные лучи и лучи радия, по-видимому, состоят из очень маленьких частиц, или электронов, движущихся со скоростями, несомненно меньшими скорости света, но которые все же составляют одну десятую или одну треть этой скорости.

Эти лучи могут отклоняться как электрическим, так и магнитным полем, и сравнивая эти отклонения, можно одновременно измерять скорость электронов и их массу (или, скорее, отношение их массы к заряду). Но когда дошли до скоростей, близких к скорости света, то увидели, что необходима поправка. Будучи наэлектризованными, эти молекулы не могут перемещаться, не приводя в колебание эфир; чтобы привести их в движение, нужно преодолеть двойную инерцию: самой молекулы и эфира. Полная, или наблюдаемая, масса — та, которую измеряют, — состоит из двух частей: реальной, или механической, массы молекулы и электродинамической массы, представляющей инерцию эфира.

Расчеты Абрагама и эксперименты Кауфмана показали, что собственно механическая масса равна нулю и что масса электронов, или, по крайней мере, отрицательных электронов, имеет исключительно электродинамическое происхождение. Вот что заставляет нас изменить определение массы; мы более не можем различать механическую и электродинамическую массы, поскольку тогда первая исчезает. Нет другой массы, кроме электродинамической, но в этом случае масса не может оставаться постоянной, она увеличивается со скоростью и, более того, зависит от направления. Тело, движущееся со значительной скоростью, проявляет различную инерцию по отношению к силам, стремящимся отклонить его, и тем силам, которые стремятся ускорить или замедлить его движение.

Есть еще одна возможность: пусть самые элементарные составные части тел есть электроны; одни заряжены отрицательно, другие — положительно. Отрицательные электроны не имеют массы, это установлено. Но положительные электроны, согласно тому немногому, что нам о них известно, по-видимому, гораздо более крупные. Может быть, помимо электродинамической массы они имеют собственно механическую массу. Тогда истинная масса тела представляет сумму масс положительных электронов; отрицательные электроны не принимаются в расчет; определенная таким образом масса может быть постоянной.

Увы! Эта возможность также ускользает от нас. Вспомним, что было сказано по поводу принципа относительности и усилий, предпринятых для его спасения. Дело не только в спасении принципа, но и в неоспоримых результатах экспериментов Майкельсона. Как мы видели выше, чтобы учесть эти результаты, Лоренц был вынужден предположить, что в среде, совершающей равномерное поступательное движение, все силы, независимо от их происхождения, уменьшаются в одинаковой пропорции. Более того, недостаточно, чтобы это имело место для реальных сил; нужно еще, чтобы то же самое выполнялось и для сил инерции. Таким образом, говорит

он, нужно, чтобы поступательное движение влияло на массы всех частиц в той же степени, что и на электромагнитные массы электронов.

Таким образом, механические массы должны изменяться согласно тем же законам, что и электродинамические массы; следовательно, они не могут быть постоянными.

Нужно ли подчеркивать, что нарушение принципа Лавуазье повлечет за собой нарушение принципа Ньютона? Этот последний означает, что центр тяжести изолированной системы движется по прямой линии; но если нет больше постоянной массы, то нет больше и центра тяжести; неизвестно даже, что означает это понятие. Вот почему выше я сказал, что опыты с катодными лучами, по-видимому, подтверждают сомнения Лоренца относительно принципа Ньютона.

На основе всех этих результатов, если они подтвердятся, возникла бы совершенно новая механика, которая характеризовалась бы, главным образом, тем фактом, что никакая скорость не могла бы превысить скорости света *, подобно тому, как температура не может упасть ниже абсолютного нуля. Для наблюдателя, совершающего поступательное движение, о котором он не подозревает, никакая наблюдаемая скорость также не могла бы превысить скорости света; и здесь было бы противоречие, если бы мы не вспомнили, что этот наблюдатель пользуется не теми часами, что покоящийся наблюдатель, а часами, отмечающими «местное время».

Здесь перед нами возникает вопрос, постановкой которого я и ограничусь: если нет больше массы, то во что превращается закон Ньютона? Масса имеет два аспекта: это и коэффициент инерции, и масса тяготения, входящая в качестве множителя в закон ньютоновского притяжения. Если коэффициент инерции не постоянный, может ли быть постоянной масса притяжения? Вот в чем вопрос.

По крайней мере у нас оставался еще закон сохранения энергии, и он казался более устойчивым. Надо ли напоминать, что и он, в свою очередь, впал в немилость? Это событие произвело еще больший шум, чем предыдущие, и осталось во всех мемуарах. Начиная с первых работ Беккереля, и особенно, когда Кюри открыли радий, выяснилось, что любое радиоактивное тело является неиссякаемым источником радиации. Казалось, его активность не меняется в течение месяцев и лет. И в этом уже было нарушение принципов. Радиация представляла фактически энергию, которая испускалась и испускалась, не иссякая, из одного и того же куса радия. Однако количества энергии были слишком малы для измерений; так, по крайней мере, думали и не очень беспокоились по этому поводу.

Картина изменилась, когда Кюри догадались поместить радий в калориметр; тогда увидели, что количество непрерывно создаваемой теплоты весьма значительно. Было предложено множество объяснений, но в по-

* Поскольку тела противопоставляли бы возрастающую инерцию силам, стремящимся ускорить их движение, и эта инерция становилась бы бесконечной при приближении к скорости света.

добном случае нельзя сказать: чем больше, тем лучше. Пока какое-либо из них не восторжествует над другими, мы не можем быть уверены, что хотя бы одно из них верно. Однако в последнее время одно из этих объяснений, кажется, берет верх, и есть основания надеяться, что мы держим ключ к разгадке тайны.

Сэр У. Рамзай предположил, что радий подвергается превращению, что запасы энергии в радиии огромны, но они не бесконечны. Превращение радия давало бы в миллион раз больше теплоты, чем все известные превращения; радий истощился бы за 1250 лет; довольно быстро, но, по крайней мере, мы можем придерживаться этого мнения еще несколько сот лет. А пока наши сомнения остаются в силе.

Что же сохранилось в целости среди таких руин? Пока остается невредимым принцип наименьшего действия, и как, по-видимому, считает Лармор, этот принцип намного переживет другие. Действительно, он является еще более общим и неопределенным.

Какую позицию займет математическая физика в этом кризисе принципов? Но прежде, чем слишком волноваться, следует спросить себя, верно ли все это. Все эти нарушения принципов встречаются в области бесконечно малого: чтобы видеть броуновское движение, необходим микроскоп; электроны очень легки, радий встречается чрезвычайно редко, и каждый раз его имеют не более, чем несколько миллиграммов. Тогда можно спросить себя, нет ли рядом с бесконечно малым, которое мы увидели, другого бесконечно малого, которого мы не видим, и которое составляет противовес первому?

Именно этот вопрос должен быть разрешен в первую очередь, и, по-видимому, только эксперимент может ответить на него. Таким образом, нам ничего не остается, как только уступить место экспериментаторам. и в ожидании, пока они окончательно разрешат спор, не заниматься столь беспокойными проблемами, а мирно продолжать нашу работу, как если бы принципы все еще оставались вне сомнений. Конечно, нам есть чем заняться, не выходя за пределы области, где эти принципы можно применять с полной уверенностью, есть чем заполнить свою деятельность в течение периода сомнений.

Однако верно ли, что мы ничего не в состоянии сделать для освобождения нашей науки от этих сомнений? Надо признаться, что они вызваны не только экспериментальной физикой: и математическая физика внесла в это свой вклад. Экспериментаторы увидели, что радий выделяет энергию, но зато теоретики выявили все трудности, возникающие при распространении света в движущейся среде; вероятно, без теоретиков их бы не заметили. И если они сделали все возможное, чтобы поставить нас в затруднительное положение, то нужно, чтобы они помогли и выйти из него.

Надо, чтобы они подвергли критике все новые взгляды, которые я только что изложил перед вами, и не отказывались от принципов, не сделав честной попытки спасти их. Что же можно сделать в этом направлении? Это я сейчас постараюсь объяснить.

Среди самых интересных проблем математической физики особое место следует отвести проблемам, связанным с кинетической теорией газа.

Многое уже сделано для их решения, но многое еще остается сделать. Эта теория представляет вечный парадокс. Мы имеем обратимость в предположениях и несобратимость в следствиях, и между ними — пропасть. Достаточно ли статистических рассматриваний закона больших чисел, чтобы заполнить ее? Остается еще много темных мест, к которым нужно возвратиться и, безусловно, не один раз. Их разъяснение поможет лучше понять смысл принципа Карно и его место в системе динамики, лучше вооружиться для правильной интерпретации любопытного эксперимента Гун, о котором я говорил выше.

Не следует ли нам также постараться получить более удовлетворительную теорию электродинамики движущихся тел? Именно там, как я показал выше, накапливаются трудности. Сколько ни нагромождай гипотез, все равно нельзя удовлетворить сразу всем принципам. Пока удавалось спасать одни принципы не иначе, как жертвуя другими, но еще не утрачена надежда добиться лучших результатов. Давайте всесторонне рассмотрим теорию Лоренца, усовершенствуем ее понемногу, и, может быть, все уладится.

Так, вместо того чтобы предполагать, что движущиеся тела испытывают сжатие в направлении движения и что это сжатие одинаково, независимо от природы тел и действующих на них сил, нельзя ли принять более простую или более естественную гипотезу? Можно представить, например, что эфир видоизменяется, когда он движется относительно погруженной в него материальной среды; что, изменившись, он уже более не передает возмущения во все направления с одной и той же скоростью. Он передает более быстро те возмущения, которые распространяются параллельно движению среды, вдоль или против движения, и менее быстро — те возмущения, которые распространяются перпендикулярно. Волновая поверхность представляла бы в таком случае не сферу, а эллипсоид, и можно было бы обойтись без столь необычного сжатия тел.

Я привожу это лишь в качестве примера, поскольку видоизменения, которые можно было бы испробовать, безусловно, допускают бесконечно много вариаций.

Возможно также, что астрономия когда-нибудь снабдит нас данными по этой проблеме: в общем именно она подняла вопрос, познакомив нас с явлением абберрации света. Исходя из грубой теории абберрации, получают довольно курьезные результаты. Из-за движения Земли видимые положения звезд отличаются от их истинных позиций, и так как ее движение изменяется, то и видимые положения тоже меняются. Мы не можем знать истинного положения звезд, но мы можем наблюдать изменения видимого положения.

Таким образом, наблюдения абберрации показывают нам не движение Земли, а его изменения. Следовательно, они не могут дать нам сведений относительно абсолютного движения Земли.

По крайней мере это верно в первом приближении. Но это было бы не так, если бы умели измерять тысячные доли секунды. Тогда бы увидели, что амплитуда колебания зависит не только от изменения движения, которое хорошо известно (как движение нашего шара по его эллиптической орбите), но и от средней величины движения, так что константа абберации оказалась бы не совсем одинаковой для всех звезд и разности дали бы нам абсолютное движение Земли в пространстве.

Это означало бы в иной форме нарушение принципа относительности. Правда, нам еще далеко до того, чтобы измерять тысячную долю секунды, но в конце концов некоторые полагают, что полная абсолютная скорость Земли может быть гораздо больше ее скорости относительно Солнца: если она была бы равна, например, 300 километрам в секунду вместо 30, то этого было бы достаточно, чтобы явление стало наблюдаемым.

Думаю, что, рассуждая таким образом, мы допускаем слишком упрощенную теорию абберации. Как уже говорилось, Майкельсон показал, что физические процессы не в состоянии выявить абсолютное движение. Я убежден, что то же самое относится и к астрономическим процессам, как бы далеко мы ни продвигались в точности.

Во всяком случае, данные, которые астрономия представит в этом направлении, станут когда-нибудь ценными для физика. А пока теоретики сделали бы полезное дело, строя теорию абберации, которая заранее учитывала бы отрицательный результат опыта Майкельсона.

Но вернемся на землю. Здесь мы тоже способны помочь экспериментаторам. Мы можем, например, подготовить почву, тщательно изучая динамику электронов; разумеется, исходя не из одной-единственной гипотезы, но увеличивая, насколько возможно, число гипотез; а физики затем используют нашу работу, чтобы найти решающий эксперимент, который должен отдать предпочтение одной из них.

К динамике электронов существуют разные подходы, но среди этих путей есть один, которым несколько пренебрегали, хотя он и является одним из тех, которые обещают нам больше всего неожиданностей. Дело в том, что спектральные линии излучения вызываются движениями электронов, и эффект Зеемана доказывает это. В раскаленном теле все, что колеблется, чувствительно к действию магнита, следовательно, наэлектризовано. Это первый очень важный пункт, но далее его мы не продвинулись. Почему спектральные линии распределены согласно регулярному закону? Эти законы изучены экспериментаторами в самых мельчайших подробностях, они очень точны и относительно просты. Первое исследование этих распределений заставляет думать о гармонических соотношениях, которые встречаются в акустике, но различие очень большое; дело не только в том, что частоты колебаний не представляют последовательных кратных одного и того же числа, но мы даже не находим здесь никакого аналога корням тех трансцендентных уравнений, к которым нас приводят многие задачи математической физики: задача о колебаниях упругого тела произвольной формы, задача о колебаниях Герца в вибра-

торе произвольной формы, задача Фурье при охлаждении твердого тела. Законы более простые, но совершенно иной природы; в качестве примера одного из отличий упомянем, что для высших гармоник число колебаний стремится к конечному пределу, вместо того, чтобы расти бесконечно. В этом все еще не отдают себе отчета, но я думаю, что именно здесь находится одна из наиболее важных тайн природы. Линдеман сделал похвальную попытку, однако, на мой взгляд, безуспешную. Эту попытку надо повторить вновь. Таким образом, мы проникнем, так сказать, в самые сокровенные глубины вещества.

Имея в виду ту частную задачу, которая занимает нас сегодня, заметим, что мы лучше поймем динамику электронов и, возможно, нам будет легче согласовать ее с принципами, когда выясним, почему колебания раскаленных тел так отличаются от обычных упругих колебаний, почему электроны ведут себя не так, как известное нам вещество.

Предположим теперь, что все эти усилия терпят неудачу (во что я, в действительности, не верю); что же тогда делать? Следует ли пытаться подправить испорченные принципы, совершив то, что мы, французы, называем *сoup de rouse* *? Это, конечно, всегда возможно, и я не отказываюсь ни от чего, что было сказано раньше. Вы могли бы мне сказать, если бы хотели затеять спор со мной: «Не писали ли Вы, что принципы, хотя и произошли из опыта, теперь находятся вне пределов досягаемости эксперимента, поскольку они стали условными соглашениями? А теперь Вы говорите нам, что последние достижения эксперимента ставят эти принципы под угрозу?!»

Так вот, я был прав раньше, и я прав сегодня. Я был прав раньше, и то, что происходит сегодня, является тому новым доказательством. Возьмем, например, калориметрический эксперимент Кюри с радием. Можно ли согласовать его с принципом сохранения энергии? Это пытались сделать многими способами; я хотел бы обратить ваше внимание на один из них; нельзя сказать, что он одерживает верх сегодня, но это одно из предложенных объяснений. Предположим, что радий есть не что иное, как посредник, который лишь накапливает излучения неизвестной природы, пронизывающие пространство во всех направлениях и проходящие сквозь все тела — кроме радия, — не изменяясь и не оказывая на тела никакого действия. Один только радий отбирает у них немного энергии и затем возвращает ее нам в различных видах.

Какое выгодное объяснение и как оно удобно! Во-первых, оно непроверяемо и потому неопровержимо. Во-вторых, его можно использовать для объяснения любого нарушения принципа Майера; оно заранее дает ответ не только на возражение Кюри, но и на все возражения, которые экспериментаторы могли бы представить в будущем. Новая и неизвестная энергия может быть использована во всех случаях. Это как раз то, что я говорил, и отсюда ясно видно, что наш принцип за пределами досягае-

* Уловка, ухищрение. (Прим. перев.).

мости эксперимента. А если это так, то чего же мы добились нашим *coup de pousse*? Принцип сохранен, но чему он впредь может служить? Он позволял нам предвидеть, что в таких-то и таких-то обстоятельствах мы можем рассчитывать на такое-то количество полной энергии, он нас ограничивал. Но теперь, когда в нашем распоряжении есть этот неопределенный запас новой энергии, мы больше ничем не ограничены, и как я уже писал, если принцип перестает быть плодотворным, то эксперимент, хотя и не противоречит ему прямо, но все же осуждает его.

Таким образом, это не то, что следовало бы делать. Мы должны строить заново. Но хотя мы и поставлены перед такой необходимостью, мы все-таки можем найти себе утешение. Не надо думать, что наука способна только на труд Пенелопы, что она лишь воздвигает эфемерные здания, которые затем вынуждена уничтожать сверху донизу своими же собственными руками.

Как я говорил, мы уже проходили через подобный кризис. Я показал вам, что в математической физике принципов находят черты прежней математической физики, физики центральных сил; и то же самое повторится, если нам предстоит познакомиться с третьей математической физикой. Так линяющее животное разбивает свою слишком тесную оболочку и становится более молодым, но под его новой оболочкой легко узнают черты прежнего организма.

Мы не можем предвидеть, в каком направлении пойдет развитие. Не исключено, что на первый план выдвинется кинетическая теория газа, которая будет развиваться и послужит моделью для других теорий. Тогда явления, сначала казавшиеся нам простейшими, представятся в виде результата большого числа элементарных фактов, которые сводятся к одной цели лишь законами случая. Физический закон приобретет тогда совершенно новый аспект; это уже не будет только дифференциальное уравнение, он примет характер статистического закона.

Возможно, мы должны создать совершенно новую механику, которую мы лишь смутно представляем, механику, где инерция возрастала бы со скоростью и скорость света являлась бы непреодолимым пределом. Обычная механика, более простая, оставалась бы как первое приближение, справедливое для скоростей не слишком больших, так что новая динамика включала бы старую. Нам не пришлось бы сожалеть о нашей вере в принципы, и более того, поскольку скорости, слишком большие для прежних формул, являлись бы лишь редким исключением, наиболее верным в практике было бы поступать так, как если бы мы продолжали верить в них. Они так полезны, что за ними надо сохранить место. Исключить их совсем — означало бы лишиться себя ценного оружия. В заключение я хочу сказать, что мы не дошли до этого, и ничто еще не доказывает, что принципы не выйдут из борьбы победившими и невредимыми.

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ
И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ РАБОТ
АНРИ ПУАНКАРЕ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕЗЮМЕ *

Введение

Я разделил работы, подлежащие обзору, следующим образом:

1. Дифференциальные уравнения.
2. Общая теория функций.
3. Различные вопросы чистой математики (алгебра, арифметика, теория групп, Analysis situs).
4. Небесная механика.
5. Математическая физика.
6. Философия науки.
7. Преподавание, популяризация, разное (биографии, различные доклады).

Излишне добавлять, что я следовал этим различным целям не независимо одна от другой и что между ними имеется много непредвиденных связей. И действительно, можно будет заметить, что некоторые мемуары появятся несколько раз в двух или трех различных разделах.

Цифры в скобках отсылают к номерам библиографии.

* Анализ работ Анри Пуанкаре, сделанный им самим. См.: Acta mathematica, 1921, 38, 36—135.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

I. Общие вопросы [1, 2, 47, 48, 49, 52, 54, 189 (глава II)]. Как только принципы исчисления бесконечно малых были установлены, аналитик оказался перед лицом трех проблем:

- решение алгебраических уравнений;
- интегрирование алгебраических функций;
- интегрирование дифференциальных уравнений.

История этих трех проблем одинакова. После длинных и тщетных усилий свести эти проблемы к более простым геометры уступили, наконец, необходимости изучения проблем самих по себе и они были вознаграждены.

Долго надеялись, что удастся решить все уравнения в радикалах. От этого пришлось отказаться, и сегодня алгебраические функции нам столь же хорошо известны, как и радикалы, к которым их желали привести. Точно так же и интегралы от алгебраических дифференциалов, которые долго пытались привести к логарифмическим или тригонометрическим функциям, выражаются сегодня посредством новых трансцендентностей.

Примерно то же должно было произойти и с дифференциальными уравнениями. Число уравнений, интегрируемых в квадратурах, крайне ограничено, и постольку, поскольку не решались изучать свойства интегралов самих по себе, вся эта аналитическая область оставалась всего лишь обширной *terra incognita*, которая казалась навсегда запретной для геометра.

Коши был первым, кто проник в нее, благодаря изобретению искусного метода, который он назвал *исчислением пределов* *. В дальнейшем Фукс, Брио и Буке, и Ковалевская с успехом использовали этот же метод.

Поэтому отправной точкой мне послужили работы именно этих геометров.

Перед лицом проблемы столь сложной эти разные ученые вместо того, чтобы изучать поведение интегралов дифференциальных уравнений или же уравнений в частных производных *для всех значений переменной*, т. е. во всей плоскости, вначале занялись определением свойств этих интегралов *в окрестности данной точки*. Они выяснили тут, что эти свойства будут очень различными в зависимости от того, идет ли речь об обычной или

* Речь идет о методе мажорант Коши. (Прим. перев.).

особой точке. В окрестности обычной точки дифференциальное уравнение может быть представлено в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1)$$

и y может быть разложено по степеням $(x - x_0)$.

В окрестности особой точки дифференциальное уравнение можно представить в одном из следующих двух видов:

$$(x - x_0) \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (2)$$

$$(x - x_0)^m \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (3)$$

если оно первого порядка, или в аналогичном виде, если оно более высокого порядка, или в частных производных. В случае, когда дифференциальное уравнение дано в виде (2) (или в аналогичном, если оно второго порядка или высших порядков), Брио и Буке отметили некоторые свойства интегралов, а Фукс дал разложение в ряды в частном случае линейных уравнений.

Я дополнил результаты Коши относительно обычных точек [189, гл. II], показав, при каких условиях решение можно разложить не только по степеням независимой переменной, но и по степеням начальных значений или произвольного малого параметра. Я показал, каким образом эти ряды по степеням параметра или начальных значений могут остаться сходящимися не только для малых значений независимой переменной, но и для произвольных значений этой переменной. Но особенно я занимался выяснением, что происходит в окрестности особой точки.

Я попытался вначале изучить уравнение (2), предполагаемое нелинейным, и найти разложения в ряды его интегралов. Я выяснил [1], что эти интегралы могут быть разложены в ряды по степеням $(x - x_0)$ и $(x - x_0)^\lambda$, где λ — константа, которую легко определить, или, в частном случае, по степеням $(x - x_0)$ и $\ln(x - x_0)$. Результат этот можно дальше распространить на уравнения высшего порядка.

Затем я решил изучать [2] с той же точки зрения уравнения в частных производных первого порядка. Коши и Ковалевская научили тому, как разлагать в ряды интегралы этих уравнений в окрестности обыкновенной точки. Оставалось изучить эти интегралы в окрестности особой точки, как это сделали Брио и Буке для дифференциалов. Приступив к этой проблеме, я встретил два рода особенностей: первые — случайные и специальные для частного интеграла, который подлежит рассмотрению, а вторые — существенные и происходящие уже от самого уравнения в частных производных. В первом случае я легко увидел, что интегралы удовлетворяют алгебраическим уравнениям, коэффициенты которых голоморфны по

отношению к переменным. Во втором случае приходится преодолевать бóльшие трудности.

Я рассмотрел сперва уравнение

$$X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda z, \quad (4)$$

где все X являются голоморфными функциями от $x_1, x_2, \dots, x_n$ (когда эти переменные достаточно близки к нулю) и обращаются в нуль вместе с этими переменными.

Чтобы это уравнение допускало голоморфный интеграл, необходимо сначала, чтобы λ удовлетворяло некоторому алгебраическому уравнению степени n ; однако это условие не достаточно, корни этого уравнения должны быть дополнительно подчинены специальному условию: выпуклый многоугольник, который содержит все точки плоскости, отвечающие корням, не должен содержать начала. Если это условие выполнено, всегда имеется голоморфный интеграл, и это, вообще говоря, не так в противоположном случае. Мы увидим в дальнейшем, каковы следствия этого факта в общей теории функций.

Рассмотрим далее уравнения

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n};$$

я выяснил, что интегралы этой системы имеют вид

$$\frac{T_1^{\lambda_1}}{K_1} = \frac{T_2^{\lambda_2}}{K_2} = \dots = \frac{T_n^{\lambda_n}}{K_n},$$

где все T являются голоморфными функциями по отношению к x и где λ являются корнями алгебраического уравнения, о котором мы только что сказали, а K — константы интегрирования.

Это, впрочем, верно, лишь если λ удовлетворяют высказанному выше условию, и в этом случае можно найти разложение различных частных интегралов уравнения (4).

Все, что я сейчас говорил, применяется лишь к самым простым особым точкам, аналогичным особым точкам уравнения (2). Для особенностей более высокого порядка, таких, какие представляются уравнением (3), почти ничего не известно. Эти особенности высшего порядка возникают, в частности, в изучении линейных уравнений, интегралы которых называются тогда *нерегулярными*, но даже в этом специальном случае мы знаем относительно них совсем немного.

Томе, который изучал их, показал, что в этом случае уравнения удовлетворены формально рядами следующего вида:

$$e^{P(x)} \varphi\left(\frac{1}{x}\right),$$

где $P(x)$ — целый многочлен по x , а $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ — ряд, записанный по убывающим степеням x . (Я допускаю здесь для определенности, что особая точка отнесена в бесконечность.) Но чтобы ряды представляли искомые интегралы, нужно было бы, чтобы они были сходящимися, что имеет место лишь в очень частных случаях. Мне пришла идея применить к этим нерегулярным интегралам преобразование Лапласа [3, 47, 52 и 54], и я получил таким путем в новом и простом виде условия сходимости этих рядов, но случай сходимости был всего лишь исключением, и казалось, что в общем случае ничего из разложений Томе извлечь нельзя. Оказалось, что это не так. Уже давно известен один ряд, именно Стирлинга, который, хотя и расходится, может быть законно употреблен для представления функции

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

так как, если x очень велико, то ошибка, совершенная по отношению к этой функции при остановке на надлежащем члене, чрезвычайно мала. Я показал, что ряды Томе имеют то же свойство. Хотя они и расходятся, они представляют интегралы предложенных уравнений таким же образом, как ряд Стирлинга представляет функцию $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. Я нашел попутно некоторое число свойств линейных уравнений, между которыми отмечу такое:

Если линейное уравнение порядка n имеет коэффициентами целые многочлены порядка m ($m < n$), то оно допускает $n-m$ голоморфных во всей плоскости интегралов.

Однако изучение интегралов дифференциальных уравнений *в окрестности данной точки*, какова бы ни была его польза с точки зрения числовых вычислений, может рассматриваться лишь как первый шаг. Эти разложения, которые справедливы только в очень ограниченной области, не дают нам в отношении этих уравнений того, что в отношении алгебраических дифференциалов дает Θ -функция: они не могут рассматриваться как истинное интегрирование.

Поэтому их следует принять лишь как отправную точку в более глубоком изучении интегралов дифференциальных уравнений, где мы были бы намерены выйти из ограниченных областей, где мы были бы систематически подготовлены исследовать интегралы по всей плоскости.

Но это изучение может проводиться с двух разных точек зрения:

1. Можно задаться целью выразить интегралы посредством разложений, справедливых *всегда* и более не ограниченных какой-либо частной областью. При этом приходят к введению в науку новых трансцендентностей; и это введение необходимо, так как старые известные функции позволяют интегрировать лишь небольшое число дифференциальных уравнений.

2. Однако этот способ интегрирования, который дает нам знание свойств уравнения с точки зрения теории функций, один не достаточен, если мы желаем применять дифференциальные уравнения к вопросам меха-

ники или физики. Наши разложения не показали бы нам, по крайней мере без значительного труда, будет ли, например, функция постоянно возрастать или она будет колебаться между определенными пределами, или она будет возрастать сверх всякого предела. Другими словами, если функцию рассматривать с точки зрения определения плоской кривой, мы ничего не узнаем об общей форме этой кривой. В некоторых приложениях все эти вопросы имеют такую же важность, как и вычисления, и они составляют новую проблему, которую нам приходится решать.

В следующих разделах я собираюсь говорить об усилиях, которые пришлось приложить для решения этих двух проблем.

II. Фуксовы функции [5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 31, 14, 15, 16, 17, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 36, 37, 38, 88, 131, 32, 33, 34, 43, 44, 29, 30, 3, 58, 53, 59]. Желая, как я это объяснил выше, выразить интегралы дифференциальных уравнений посредством сходящихся *всюду* рядов, я естественно приступил сначала к линейным уравнениям. Эти уравнения, которые в новое время были объектом работ Фукса, Томе, Фробениуса, Шварца, Клейна и Альфана, на деле лучше всего были изучены. С давних пор мы знаем разложение их интегралов в *окрестности данной точки*, и в достаточно большом числе случаев их сумели полностью проинтегрировать с помощью давно известных функций. Поэтому у меня было больше всего шансов прийти к результату, приступив к изучению именно этих уравнений.

Но необходимо было принять какое-либо условие относительно коэффициентов уравнений, которые я хотел изучать.

В самом деле, если бы я принял в качестве коэффициентов *произвольные функции*, я и в качестве интегралов получил бы также *произвольные функции* и, следовательно, не смог бы сказать ничего ценного о природе этих интегралов, что было моей целью. Мне пришлось поэтому обратиться к линейным уравнениям с рациональными и алгебраическими коэффициентами. Чтобы несколько упростить дальнейшее изложение, я буду предполагать, что коэффициенты рациональны.

Вот классификация, которую я принял для этих уравнений и которая наиболее естественна с точки зрения той задачи, которую мы желаем решать [27, 44]. Пусть γ — интеграл линейного уравнения порядка n с рациональными коэффициентами. Положим

$$z = e^{\int \lambda dx} \left(F_{n-1} \frac{d^{n-1} \gamma}{dx^{n-1}} + F_{n-2} \frac{d^{n-2} \gamma}{dx^{n-2}} + \dots + F_1 \frac{d\gamma}{dx} + F_0 \gamma \right), \quad (5)$$

где λ и F — рациональные функции от x . Ясно, что z , как и γ , будет удовлетворять некоторому линейному уравнению порядка n с рациональными коэффициентами. Я скажу, что эти два уравнения принадлежат к одному *семейству*. И действительно, как легко увидеть, знание свойств функции γ влечет за собой знание свойств z .

В каждом семействе имеется бесконечное число различных уравнений, но некоторые функции коэффициентов имеют одно и то же значение для

уравнений одного семейства; другими словами, имеются, как я это показал в моей заметке от 22 мая 1882, *инварианты*, остающиеся неизменными, когда производится подстановка вида (5). Эти инварианты не инварианты Альфана. Этот искусный геометр имеет в виду преобразования, которые состоят в замене x произвольной функцией от x' и умножении γ на другую произвольную функцию от x' . Напротив, функции, которые входят в мою подстановку (5), не произвольны, а рациональны. Ничто лучше не дало бы понять различия в точках зрения Альфана и моей. Альфан ищет прежде всего соотношения между различными интегралами, и он может безнаказанно вводить в свои вычисления любые функции; напротив, моя цель — изучение природы самого интеграла, а эта природа была бы, очевидно, изменена, если бы я умножил интеграл на произвольную функцию, как это делает Альфан.

Но это внутреннее изучение природы интегральных функций не может быть произведено без введения новых трансцендентностей, о которых я теперь скажу несколько слов. Эти трансцендентные функции имеют большую аналогию с эллиптическими функциями, и этому не следует удивляться, так как если я измыслил эти новые функции, то лишь чтобы сделать для линейных дифференциальных уравнений то же самое, что для интегралов от алгебраических дифференциалов делают посредством эллиптических и абелевых Θ -рядов.

Таким образом, путеводной нитью в моих поисках мне служила аналогия с эллиптическими функциями. Эллиптические функции являются однозначными функциями, которые не меняются, когда переменную увеличивают на некоторые периоды. Это понятие настолько полезно в математическом анализе, что всем геометрам уже давно приходилось думать, как следовало бы обобщить его, найдя однозначные функции одной переменной x , которые остаются неизменными, когда эту переменную подвергают некоторым преобразованиям, причем эти преобразования не могут быть выбраны произвольным образом. Они должны, очевидно, образовывать группу, и более того, в этой группе не должно быть бесконечно малых преобразований, т. е. таких, которые заставляют бесконечно мало изменяться x . Иначе, повторяя неограниченно такое преобразование, можно заставить x меняться непрерывно, и наша функция, которая не меняется, когда переменная непрерывно увеличивается, сводилась бы к константе. Другими словами, наша группа должна быть *разрывной* [3, 5, 6, 32]. В таком случае первая проблема, которую нам следует решить, состоит в том, чтобы найти все разрывные группы, которые могут быть здесь построены.

В случае эллиптических функций преобразования группы (которая очевидным образом разрывна) состоят в добавлении к x некоторых констант. Здесь новая аналогия с эллиптическими функциями может прийти нам на помощь. Для изучения этих функций плоскость делят на параллелограммы, известные под названием *параллелограммов периодов*. Все параллелограммы можно получить из одного из них различными подста-

новками группы, так что знание функции в одном из параллелограммов влечет за собой знание ее во всей плоскости.

Точно так же, если обратиться к более сложной разрывной группе, порождающей трансцендентную функцию более высокого порядка, то можно подразделить плоскость (или область плоскости, где существует эта функция) на бесконечное число областей или криволинейных многоугольников так, чтобы можно было получить все эти области, применяя к одной из них все преобразования группы. Знание функции в одной из этих областей влечет за собой знание ее для всех возможных значений переменной.

Легко увидеть, каков должен быть специальный вид той разрывной группы, которую здесь следует ввести. Вспомним способ получения эллиптических функций: рассматривают некоторые интегралы, называемые интегралами *первого рода*, затем посредством приема, известного под названием *обращения*, переменную x рассматривают как функцию от интеграла, и определенная таким образом функция оказывается однозначной и двойкопериодической.

Точно так же и здесь мы возьмем линейное уравнение второго порядка и посредством некоторого рода обращения представим переменную x как функцию, но на этот раз не интеграла, а *отношения* z двух интегралов нашего уравнения. В некоторых случаях функция, определенная этим путем, оказывается однозначной и тогда она остается неизменяемой при бесконечном числе линейных подстановок, переводящих z в $\frac{az + b}{cz + d}$.

При этом группа, образованная подстановками, должна быть разрывна и легко видеть, что криволинейные многоугольники, о которых была речь выше, ограничены дугами окружностей. Я предположил сперва, что коэффициенты подстановок были вещественными или, что сводится к тому же самому, что подстановки не меняют некоторой окружности, называемой *фундаментальной*. В этом случае дуги окружностей, которые служат сторонами наших криволинейных многоугольников, ортогональны этой фундаментальной окружности.

При каком же условии группа, порожденная одним данным криволинейным многоугольником, будет разрывной? Чтобы решить эту задачу, нужно преодолеть одну специальную трудность, которую я хочу объяснить в нескольких словах. Исходя из образующего криволинейного многоугольника, легко строятся соседние многоугольники, затем многоугольники, соседние с ними, и т. д. Таким образом получается род поверхности, которая беспрестанно увеличивается, и здесь требуется усмотреть, что поверхность никогда не покроет себя частично или целиком, т. е. что новый многоугольник, добавляемый к нашей поверхности, не покроеет частично какой-либо многоугольник, построенный прежде. Для этого недостаточно заметить, что наша поверхность односвязна и не имеет точек ветвления (*unverzweigt*). Этот способ рассуждения является лишь паралогизмом, который уже завлек некоторых ученых в различные ошибки и который в задаче, занимающей нас, навверное, сбил бы нас с пути. Нужно еще пока-

зять, что часть плоскости, покрываемая поверхностью, сама является односвязной (противоположное могло бы иметь место, и односвязная поверхность могла бы, перекрывая самое себя несколько раз, покрыть область плоскости кратной связности). У нас односвязная область, покрытая один и только один раз поверхностью, есть внутренность фундаментальной окружности.

Итак, речь идет о том, чтобы доказать, что строя последовательно наши многоугольники так, как я об этом говорил выше, мы никогда не выйдем из этой окружности и что мы неизбежно достигнем *любой* точки внутри окружности. Второе из этих предположений, возможно, давно бы остановило меня, если бы не помощь, которую я нашел в совершенно другой теории: я хочу сказать в *неевклидовой геометрии*. Эта геометрия, основанная на предположении, что сумма углов треугольника меньше двух прямых, кажется вначале лишь простой игрой ума, которая представляет интерес лишь для философии и не может быть никоим образом полезной для математика. Это не так, теоремы геометрии Лобачевского столь же верны, как и теоремы геометрии Евклида при условии, что их интерпретируют так, как нужно. Так, например, эти теоремы неверны по отношению к прямым, как мы их себе представляем, но если мы всюду, где Лобачевский говорит «прямая», скажем «окружность, ортогональная фундаментальной окружности», то они станут верными. Я оказался, таким образом, перед теорией, придуманной, правда, в метафизических целях, но каждое предложение которой, надлежащим образом интерпретированное, давало мне теорему, применимую к обычной геометрии. Оказалось, что комбинируя эти теоремы, я смог легко найти разрешение трудности, о которой я говорил выше.

Я смог, таким образом, построить все разрывные группы, образованные подстановками, сохраняющими фундаментальную окружность, и я назвал их *фуксовыми группами*.

Но стояла еще важная проблема: существуют ли для данной фуксовой группы однозначные функции, не изменяемые подстановками этой группы [33]? Я доказал это и назвал их фуксовыми функциями. К такому результату в некоторых частных случаях можно было прийти, применяя предложение, известное под названием *принципа Дирихле*, столь часто использованное Риманом и доказанное совсем недавно Шварцем. Я не знал этого принципа в то время, но и будь он мне известен, я бы им не воспользовался, так как он мог мне дать решение проблемы лишь в определенных частных случаях, и даже в этих случаях он мог бы послужить для доказательства существования функции, но не дал бы аналитического разложения.

Я должен был снова обратиться к аналогии с эллиптическими функциями. Известно, что эти функции могут рассматриваться как отношение двух трансцендентных функций не только однозначных, но еще и целых, которые называют Θ -рядами. Эти функции более не являются двоякопериодическими, но они умножаются на экспоненту, когда переменная увеличи

вается на один период. Точно так же и в моем случае я должен был искать выражения фуксовых функций в виде частного двух конечных и однозначных трансцендентных функций, вполне аналогичных Θ -функциям, которые воспроизводятся с умножением на простой сомножитель, когда переменная z подвергается преобразованиям из группы. Я легко нашел ряды, удовлетворяющие этим условиям, и назвал их *тета-фуксовыми*. Отношение двух подобных рядов было очевидным образом фуксовой функцией: значит, одним ударом я доказал существование этих функций и нашел их аналитическое выражение. Частное единицы и тета-фуксова ряда поддается также простому разложению, и именно рассмотрение этих новых разложений позволило мне показать обратно, что всякая фуксова функция может рассматриваться как отношение двух тета-фуксовых рядов.

Эти фуксовы функции бывают двух видов. Одни существуют во всей плоскости, другие — лишь внутри фундаментальной окружности. В обоих случаях между двумя фуксовыми функциями, имеющими ту же фуксову группу, имеется алгебраическое соотношение. Определение *рода* этого соотношения имеет капитальное значение. Я получил его сперва аналитически, а затем более просто из геометрии ситуации.

Благодаря этим алгебраическим соотношениям возможно использовать фуксовы функции для изучения алгебраических функций и кривых. Таким путем можно *выразить координаты точки алгебраической кривой фуксовыми функциями, т. е. однозначными, от одного параметра*. Тогда можно воспользоваться этими выражениями координат, чтобы получить некоторое число теорем об этих кривых. Равным образом их можно использовать, чтобы получить более простое представление теории абелевых функций.

Если в абелевом интеграле первого рода переменную заменить фуксовой функцией от z , то этот интеграл в свою очередь становится однозначной функцией z , аналитическое разложение которой легко находится. Таким образом, эти интегралы, которые уже были представлены через Θ -функцию, получают совершенно иное аналитическое выражение, в которое входят трансцендентные функции, зависящие лишь от одной переменной.

Но это не все. Всякая фуксова функция может рассматриваться, как порожденная обращением уравнения второго порядка с алгебраическими коэффициентами, т. е. ее можно получить, рассматривая переменную x как функцию от отношения двух интегралов этого уравнения. Наши трансцендентные функции немедленно снабжают нас, следовательно, интегралами бесконечного числа линейных уравнений, которые можно назвать *фуксовыми*.

Для того чтобы аналогия с эллиптическими функциями стала полной, нужно, чтобы и другие свойства этих функций, такие, как законы сложения, умножения и преобразования, могли бы быть распространены на новые трансцендентные функции.

Закон преобразования обобщается немедленно, с той, однако, разницей, что поскольку группа для фуксовых функций гораздо более сложна,

чем группа для эллиптических функций, приходится рассматривать гораздо больше разнообразных случаев. Что в особенности придает им интерес, так это то, что ими можно воспользоваться, чтобы бросить некоторый свет на вопрос о приведении абелевых интегралов [88]. Я вернусь к этому позже.

Напротив, теорема сложения не распространяется на все фуксовы функции. Это возможно лишь в одном частном случае и лишь для некоторых из этих трансцендентностей [131, 53]. Я имею в виду теперь те фуксовы функции, происхождение которых лежит в рассмотрении тернарных неопределенных квадратичных форм и к которым я еще вернусь в разделе, посвященном арифметике.

Линейные подстановки, коэффициенты которых не вещественны, но произвольны, также могут образовывать разрывные группы, которые я называл *клеяновыми* [13, 31, 14, 34]. При доказательстве существования этих групп я встретил ту же трудность, что и для фуксовых групп, и с первого взгляда казалось невозможным применить здесь неевклидову геометрию. В некоторых частных случаях трудность легко было преодолеть, но в общем случае она полностью оставалась. Я придумал тогда прием, который позволил мне воспользоваться неевклидовой геометрией не двух, а трех измерений, и легко доказал существование клейновых групп. Чтобы найти новую категорию функций, вполне аналогичных фуксовым, оставалось лишь применить методы, которые позволили мне уже один раз добиться успеха. Все достойное быть отмеченным различие составляет форма области, внутри которой эти функции существуют. Эта область вместо того чтобы быть кругом, ограничена неаналитической кривой, которая не имеет определенного радиуса кривизны. В других случаях эта область ограничена бесконечным числом окружностей.

Фуксовы функции доступны и другому способу обобщения: я говорю о гиперфуксовых функциях, придуманных Пикаром. Но поскольку они не могут быть применены к дифференциальным уравнениям в собственном смысле слова, я буду говорить о них во второй части, посвященной общей теории функций.

Уже полученные результаты заставляли предчувствовать, какой интерес представило бы определение коэффициентов группы линейного уравнения как функций от коэффициентов самого уравнения [36, 37, 43]. Сама проблема была не нова, и она уже служила предметом различных работ немецких математиков, в частности Фукса и Гамбургера. Я предложил новые методы вычислений, аналогичные методам этих ученых, и выяснил, что можно было бы варьировать эти методы до бесконечности. Но эти методы не дают нам с точки зрения общей теории функций никаких знаний о свойствах трансцендентных функций, а лишь их численные значения. Нужно было пытаться решить проблему с новой точки зрения. Я получил на этом пути различные результаты, которые могут представить некоторый интерес. Так, коэффициенты группы, рассматриваемые как функции некоторых коэффициентов уравнения (другие коэффициенты рассматри-

ваются как константы), являются их целыми функциями. Равным образом я изучил обратные функции, которые в некоторых случаях оказываются однозначными.

Результаты, полученные здесь, дают пока лишь очень неполное решение проблемы, которую я себе поставил, т. е. проблемы интегрирования линейных дифференциальных уравнений. Уравнения, которые я назвал выше *фуксовыми* и которые можно интегрировать простым обращением, являются лишь очень частным случаем линейных уравнений второго порядка. Мы не должны этому удивляться, если подумаем немного об аналогии с эллиптическими функциями. Прием обращения позволяет вычислить только эллиптические интегралы первого рода. Для интегралов второго и третьего рода нужно действовать другим способом.

Возьмем, например, интеграл второго рода

$$u = \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Рассмотрим в качестве вспомогательной переменной **ту**, которая дается интегралом первого рода

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

откуда через обращение

$$x = \operatorname{sn} z.$$

Замещая x через $\operatorname{sn} z$, находим, что u есть однозначная функция от z , $Z(z)$, которая увеличивается на константу, когда z увеличивается на период. Мы приходим к мысли применить аналогичный прием. Пусть дано линейное уравнение E произвольного порядка с алгебраическими по x коэффициентами; воспользуемся вспомогательным уравнением E' второго порядка, выбрав это уравнение так, чтобы x стало фуксовой функцией от отношения z двух интегралов E' и чтобы интегралы E были однозначными функциями z .

Всегда ли возможно сделать выбор так, чтобы удовлетворить всем указанным условиям? Этот вопрос возникает естественно. Он, впрочем, сводится к тому, будет ли всегда среди линейных уравнений, удовлетворяющих некоторым условиям, которые излишне тут указывать, одно фуксово уравнение. Я пришел к доказательству того, что на этот вопрос нужно ответить утвердительно. Я не могу объяснить здесь, в чем состоит метод, которым сначала мы оба, Клейн и я, воспользовались в изучении частных примеров, как Клейн пытался применить его в общем случае, и как я заполнил пробел, остававшийся в доказательстве немецкого геометра, построив теорию, которая представляет собой самую полную аналогию с теорией приведения квадратичных форм [16, 17, 25, 26, 43].

К тому же результату можно прийти совершенно другим путем, как это выяснили многие ученые. Достаточно доказать, что уравнение

$$\Delta u = e''$$

всегда допускает на заданной римановой поверхности решение с заданными особенностями. Пикар первый дал доказательство этой теоремы; я дал другое [58, 59], совершенно отличное, которое позволило дополнить результат Пикара, распространив его на случай, важный с точки зрения теории фуксовых функций, но оставленный этим геометром в стороне. Это случай, когда одна из вершин порождающего многоугольника лежит на фундаментальной окружности. Таким образом, вспомогательное уравнение E' всегда существует, однако недостаточно уметь доказывать его существование, нужно еще знать, как его построить. Это предмет последней части моего мемуара «О группах линейных уравнений». Я дал в ней приемы для построения уравнения E' , не точные, что невозможно, но со сколь угодно большим приближением.

Если теперь рассмотреть отношение z интегралов этого вспомогательного уравнения, то x оказывается фуксовой функцией от z , которую я обозначу $f(z)$, а интегралы уравнения E будут однозначными функциями z , которые подвергаются линейным преобразованиям, когда z подвергается преобразованиям из группы, так же, как функция $Z(z)$ увеличивается на константу, когда z изменяется на период [44]. Эти однозначные функции играют для интегрирования уравнения E ту же роль, какую функция $Z(z)$ играет для вычисления эллиптических интегралов второго рода. По этой причине я назвал их *дзета-фуксовыми*.

Эти дзета-фуксовы функции, очевидно, поддаются представлению их в виде отношения двух рядов, записанных по возрастающим степеням z . Оба ряда сходятся внутри фундаментальной окружности. Если функция $f(z)$ существует лишь внутри фундаментальной окружности (что мы предполагаем), то переменная z *никогда* не может выйти из этой окружности, так что наши два ряда всегда будут сходящимися. Кстати, коэффициенты этих рядов легко вычисляются рекуррентно. С этой точки зрения можно уже сказать, что эти разложения дают нам полное интегрирование уравнения E , поскольку они применимы всегда, а не ограничены какой-либо частной областью. Я, однако, не вполне доволен результатом, так как возможно дать дзета-фуксовым функциям гораздо более удовлетворяющие ум разложения, члены которых связаны друг с другом простым законом, благодаря чему из разложения очевидны характеристические свойства этих функций. Точно так же разложение $\operatorname{sn} z$ в ряд Эйзенштейна гораздо более удовлетворительно для ума (хотя оно и медленнее сходится), чем разложение функции по степеням z и k^2 . С этой целью я выразил дзета-фуксовы функции как частное двух рядов; знаменателем служит тета-фуксова функция, а числитель есть ряд с рациональными членами, где выражение общего члена очень просто.

Таким образом, возможно выразить интегралы линейных уравнений с алгебраическими коэффициентами с помощью новых трансцендентных функций так же, как интегралы от алгебраических дифференциалов выражались посредством абелевых функций. Впрочем эти последние интегралы сами поддаются выражению через посредство фуксовых функций, и таким образом получается их новое выражение, совершенно отличное от того, в которое входят Θ -ряды от нескольких переменных.

III. Нелинейные уравнения [22, 45, 46]. Оставалось для нелинейных уравнений проделать то, что я сделал для линейных, т. е. отыскать разложения интегралов, которые были бы *всегда* сходящимися. Мне не удалось их получить, я выяснил только, что можно бесконечным числом способов выразить эти интегралы рядами, которые сходятся для всех вещественных значений переменной. Вот каким образом я действовал [22, 51].

Я представляю дифференциальные уравнения в виде

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n},$$

где X_n — целые многочлены относительно переменных x . Это всегда возможно. Затем я ввожу вспомогательную переменную s , определенную из уравнения

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{ds}{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 + 1}.$$

Я могу тогда доказать, что если α выбрано надлежащим образом, то переменные x могут быть разложены по возрастающим степеням

$$\frac{e^{\alpha s} - 1}{e^{\alpha s} + 1},$$

и что эти разложения остаются справедливыми для всех вещественных значений s .

Если предыдущее применить к проблеме трех тел, мы увидим, что когда s меняется от $-\infty$ до $+\infty$, t меняется от $-\infty$ до $+\infty$, и, таким образом, разложения остаются сходящимися для всех значений времени. Исключение могло бы быть лишь при предположении, впрочем довольно маловероятном, при котором два тела могли бы прийти в столкновение в момент t_0 , и наши разложения ничего бы не сказали нам о том, что произошло бы вслед за моментом столкновения; в этом, впрочем, нет никакой проблемы. Сверх того, если *предположить*, что начальные элементы были выбраны таким образом, что взаимные расстояния остаются постоянно больше некоторого заданного предела, то переменную s можно заменить на само время и разложение провести по степеням

$$\frac{e^{\alpha t} - 1}{e^{\alpha t} + 1}.$$

Как я уже сказал выше, я привел это решение лишь в качестве примера.

Подобное интегрирование имеет совершенно другой и, очевидно, гораздо менее удовлетворяющий ум характер, чем интегрирование линейных уравнений посредством фуксовых функций. Уместно поэтому было спросить, не будут ли методы, оказавшиеся столь успешными для линейных уравнений, применимы к другим классам уравнений, хотя бы они и не обладали полной общностью.

Небольшое размышление показывает сразу же, в чем существенная разница между общим случаем и случаем линейных уравнений. Линейные уравнения имеют лишь конечное число особых точек, в то время как для нелинейных уравнений их имеется, вообще говоря, бесконечное множество. Это приводит нас к вопросу, не существуют ли другие классы уравнений с конечным числом особых точек.

Фукс опубликовал в «Sitzungsberichte» Берлинской академии мемуар, где он предлагает необходимые и достаточные условия для того, чтобы дифференциальное уравнение, и в частности первого порядка, имело только конечное число особых точек. Можно было некоторое время думать, что мы находимся на пути к новому классу однозначных трансцендентных функций и к новому классу интегрируемых уравнений.

Мне пришлось поэтому проделать более углубленное исследование вопроса [45, 46]; однако это исследование вынудило меня отказаться от надежды, которую я питал. Уравнения первого порядка, которые удовлетворяют условиям Фукса, либо сводятся к уравнениям Риккати и через них к линейным, либо интегрируемы эллиптическими или алгебраическими функциями. Следовательно, в действительности новый класс интегрируемых уравнений нам никогда не встретится.

Как бы то ни было, результат Фукса сохраняет еще свой интерес, так как он дает знание той категории дифференциальных уравнений, которые интегрируются алгебраически. Но во всяком случае проблема интегрирования нелинейных уравнений не может считаться решенной.

IV. Интегрирование уравнений посредством алгебраических и абелевых функций [7, 9, 39, 40, 55, 56, 57]. Хотя проблема интегрирования линейных уравнений решена в общем случае посредством использования новых трансцендентных функций, тем не менее интерес к частным случаям, где интегрирование можно провести с помощью более простых функций, таких, как алгебраические, эллиптические или абелевы, целиком сохраняется. Впрочем, приемы интегрирования алгебраическими и эллиптическими функциями легко вписываются в общий метод, который, таким образом, включает в себя как частные случаи уже известные приемы. При этом выясняется, что новый метод проливает свет на трудности, с которыми связано употребление частных приемов. В том, что касается поисков случаев алгебраической интегрируемости, первая проблема, которую здесь пришлось решать, состояла в том, чтобы найти все группы конечного порядка, содержащиеся в линейной группе.

Этот результат был получен Жорданом несколько лет назад, но я не думаю, чтобы этот ученый доказал, что всякой группе конечного порядка отвечает линейное уравнение, интегрируемое алгебраически. Использование фуксовых функций легко показало мне [39, 40], что всякой группе конечного порядка отвечает не одно, а бесконечное число уравнений, все интегралы которых алгебраические. Проникая в вопрос глубже, я искал, при каких условиях алгебраическая функция, группа Галуа которой задана, удовлетворяет уравнению порядка p . Я нашел, что некоторые определители, элементы которых выражаются иногда посредством корней из единицы, иногда же с помощью периодов абелевых интегралов первого рода, отвечающих рассматриваемой функции, должны обращаться все сразу в нуль. С другой стороны, возможно, кроме некоторых исключительных случаев, найти такую фундаментальную систему интегралов первого рода, чтобы нормальные периоды любого из них были линейными функциями с целыми коэффициентами нормальных периодов первого интеграла. Мне пришлось, таким образом, выражать искомое условие в виде некоторого соотношения между нормальными периодами интегралов первого рода, которые образуются с помощью рассматриваемой алгебраической функции.

Напротив, приемы интегрирования с помощью абелевых функций не вытекают из общего метода. К ним приходят, пытаясь обобщить методы интегрирования посредством эллиптических функций [9]. Известно, что теория эллиптических функций позволяет вычислить интегралы линейных уравнений второго порядка в трех различных случаях:

1) когда при рациональных коэффициентах уравнения имеются три особые точки, такие, что разность корней трех детерминантных уравнений равна соответственно $1/2$, $1/3$ и $1/6$ или $1/2$, $1/4$ и $1/4$, или же $1/2$, $1/3$ и $1/3$;

2) когда при рациональных коэффициентах уравнения имеется четыре особые точки, такие, что разность корней каждого детерминантного уравнения равна $1/2$;

3) когда при дважды периодических коэффициентах уравнения особенностями интегралов являются только полюсы.

Аппель обобщил третий случай, показав, что когда группа линейного уравнения сводится к пучку*, логарифмическая производная некоторых интегралов является алгебраической, и что интегрирование может быть выполнено с помощью некоторых абелевых функций. Мне хотелось подобным образом обобщить первый и второй случаи.

Я пришел здесь к бесконечному числу линейных уравнений третьего порядка с алгебраическими коэффициентами, интегралы которых выражаются посредством абелевых функций от двух переменных. Точно так же абелевы функции от p переменных позволяют интегрировать бесконечное число линейных уравнений порядка $p+1$.

Я указал также вкратце главные свойства групп этих уравнений.

* Т. е. к группе коммутирующих подстановок. (Прим. перев.)

Я пытался искать и те случаи, когда нелинейное уравнение доступно алгебраическому интегрированию, но ограничился уравнениями первого порядка и первой степени.

Путь был открыт Дарбу. В свою очередь я вступил на него в двух мемуарах, помещенных в «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo» [56, 57]. Проблема должна быть поставлена так: для данного дифференциального уравнения выяснить в конечное число шагов, будет или не будет оно интегрируемо алгебраически. Эту проблему, очевидно, можно было бы считать решенной, если бы мы могли определить верхнюю границу для степени общего интеграла, предполагая, что он алгебраический.

Давая некоторое число соотношений между степенью общего интеграла, его родом, числом особых точек различного вида, числом замечательных значений, при которых алгебраическая кривая, представляющая общий интеграл, распадается, и степенями этих компонент, я решил проблему в частном случае, именно в том, когда оба характеристических целых числа по отношению к каждому седлу равны 1.

В общем случае я получил лишь частные результаты. Например, я указал границу числа замечательных значений, для которых наша кривая распадается, и числа компонент; однако здесь играют роль еще два целых числа, которые остаются неизвестными, что мне мешало ограничить степень, за исключением некоторых частных случаев.

Если идти дальше, то алгебраические неравенства, которыми я пользовался, оказываются недостаточными, и трудности приобретают, так сказать, арифметическую природу; это я показываю на одном простом примере, где эти трудности могут быть преодолены, благодаря использованию эллиптических функций.

Я заканчиваю изучением того, что происходит в окрестностях некоторых особых точек. В окрестности любого узла можно найти два бесконечных ряда X_1 и X_2 по степеням переменных, которые, будучи приравнены нулю, дают нам два частных решения дифференциального уравнения. Тогда видно, что общий интеграл, если он алгебраический, сводится к рациональной однородной функции двух целых степеней от X_1 и X_2 . По подобное выражение нашего общего интеграла будет отвечать каждому узлу. Если мы приравняем два таких выражения, то анализ получаемого таким путем равенства, анализ, в который вовлекаются фуксовы функции, приводит к нескольким важным результатам.

V. Кривые, определяемые дифференциальными уравнениями [4, 19, 21, 18, 20, 50, 51]. Даже когда придут к тому, чтобы то, что было мною сделано для линейных уравнений, проделать для произвольного уравнения, т. е. найти разложения интегралов, справедливые во всей плоскости, это не будет еще основанием для отказа от результатов, которые можно получить другими методами, так как может случиться, что эти методы откроют нам частности, которые разложения не представляли бы нам сразу с очевидностью. Это соображение побудило меня встать на новую точку

зрения, и я не мог бы найти лучшего способа дать о ней представление, чем воспроизвести то, что писал в момент, когда начинал эти исследования *:

«Итак, необходимо изучать функции, определенные дифференциальными уравнениями, сами по себе, не пытаюсь сводить их к более простым функциям, так же, как это сделано для алгебраических функций, которые пытались сводить к радикалам и которые изучают теперь прямо, и так же, как это сделано для интегралов от алгебраических дифференциалов, которые долго пытались выразить в конечных терминах.

Исследовать, каковы свойства дифференциальных уравнений, является, таким образом, вопросом, имеющим самый большой интерес. По этому пути уже сделали первый шаг, изучив функцию *в окрестности одной точки плоскости*. Сегодня речь идет о том, чтобы идти дальше и изучать эту функцию *на всем протяжении плоскости*. В этом исследовании отправной точкой нам будет служить, разумеется, то, что уже известно об изучаемой функции *в некоторой области плоскости*.

Полное изучение функции состоит из двух частей: 1) качественной (так сказать), или геометрического изучения кривой, определенной функцией; 2) количественной, или вычисления значений функции.

Таким же образом, например, для изучения алгебраического уравнения начинают с того, что посредством теоремы Штурма выясняют, каково число вещественных корней; это качественная сторона изучения. Затем вычисляют численное значение этих корней, что составляет количественное изучение уравнения. Так же для изучения алгебраической кривой начинают с того, что строят эту кривую, как говорят в курсах элементарной математики, т. е. находят, какие ветви кривой замкнуты, какие бесконечны и т. д. После этого качественного изучения кривой можно найти некоторое число отдельных точек.

Естественно, что именно с качественной стороны должна начинаться теория всякой функции, и вот почему в первую очередь возникает следующая задача: *построить кривые, определяемые дифференциальным уравнением*.

Это качественное изучение; когда оно будет проделано полностью, то принесет самую большую пользу численному анализу функции, и это будет тем легче, что уже известны сходящиеся ряды, которые представляют изучаемую функцию в некоторой области плоскости, и главная трудность, которая теперь имеется, это найти прочную опору для перехода от одной области, где функция представлена одним рядом, к другой, где она выражена иным рядом **.

Впрочем, это качественное изучение и само по себе будет иметь первостепенный интерес. Различные и чрезвычайно важные вопросы анализа и механики могут быть сведены к нему. Возьмем, например, проблему трех тел. Разве нельзя спросить себя, не останется ли одно из тел всегда в не-

* Journal de Liouville, série 3, VII.

** Эти рассуждения на самом деле служили мне опорой в моих исследованиях по численному анализу функций [22].

которой области, или не сможет ли оно удаляться неограниченно; будет ли расстояние между двумя телами увеличиваться или уменьшаться до бесконечности или же оно останется всегда в некоторых пределах? Не можем ли мы поставить себе тысячу вопросов такого рода, которые все будут решены, когда мы сможем качественно построить траектории трех тел? И если мы рассмотрим большее число тел, то что такое вопрос о постоянстве элементов планет, как не чистый вопрос качественной геометрии, поскольку показать, что большая ось не имеет вековых изменений, это значит показать, что она постоянно колеблется между некоторыми пределами.

Таково широкое поле для открытий, которое лежит перед геометрами. Я не притязал на то, чтобы пройти его все, но хотел, по крайней мере, перейти его границы и ограничил себя одним очень частным случаем, тем, который естественно представляется с самого начала, т. е. изучением дифференциальных уравнений первого порядка первой степени».

Итак, я начал мои исследования [4, 18] с изучения кривых, определенных уравнением вида

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}, \quad (1)$$

где X и Y — целые многочлены от x и y , и выяснил прежде всего, что эти кривые могли иметь форму замкнутых кривых или же спиралей. Я доказал при этом следующую теорему:

Если кривая, определенная уравнением вида (1), не имеет точек остановки и пересекает любую алгебраическую кривую лишь в конечном числе вещественных точек, то она является замкнутой кривой.

Чтобы продвинуть дальше изучение формы этих кривых, я должен был начать изучение того, что происходит в окрестности произвольной особой точки. На самом деле проблема уже была решена предшествующими работами Брио и Буке и моими (Journal de l'École Polytechnique. cahier XLV и вступительная диссертация), но я должен был приспособить это решение к моей новой задаче. В мемуарах, которые я сейчас упомянул и где стоял на точке зрения теории функций, я придавал равную важность вещественному и мнимому. Для моей новой цели — качественной геометрии — меня интересовало теперь лишь вещественное, и мне пришлось провести специальное обсуждение, которое привело меня к различению четырех видов особых точек (не говоря о более сложных особых точках, которые представляются лишь в некоторых частных случаях и которые можно рассматривать как некоторое число совпавших простых точек).

Я дал этим четырем видам следующие названия:

1) *седла*, через которые проходят две и только две кривые, определенные уравнением;

2) *узлы*, где сходится бесконечное число кривых, определенных уравнением;

3) *фокусы*, вокруг которых эти кривые закручиваются, сближаясь наподобие логарифмической спирали;

4) *центры*, вокруг которых эти кривые располагаются в виде замкнутых циклов, охватывающих один другого, и все вместе охватывающие центр. (Центры встречаются лишь в крайне редких случаях).

Я изучил затем распределение этих особых точек в плоскости. Я показал при этом, что они всегда имеются (на конечном или бесконечном расстоянии) и что всегда имеется простое соотношение между числом седел, фокусов и центров, и также что на кривой $X=0$ седла или узлы и фокусы идут чередуясь.

Решив эти проблемы, я занялся соприкосновениями, которые может иметь заданная алгебраическая кривая с кривыми, определяемыми уравнением (1), и нашел, что в очень большом числе случаев существуют замкнутые ветви кривых, которые не касаются ни в одной точке никакой из кривых, удовлетворяющих нашему уравнению. Я назвал их *циклами без контакта* [20].

Легко понять важность нахождения циклов без контакта; нетрудно, в самом деле, увидеть, что кривая, определенная уравнением (1), может пересечь такой цикл лишь один раз. Если теперь мы представим себе подвижную точку, описывающую нашу кривую, то как только она выйдет из цикла без контакта, она уже более туда не сможет вернуться. Другими словами, если точка один раз занимала определенное положение, она уже никогда не сможет к нему более вернуться, ни даже вернуться в непосредственную окрестность этого положения. Координаты точки не будут колебаться между некоторыми пределами и не смогут быть представлены тригонометрическими рядами, так что, если желать применить здесь к траекториям подвижной точки тот же язык, который астрономы используют для орбит планет, следовало бы сказать, что орбита этой точки *неустойчива*.

Помимо циклов без контакта имеется другой род кривых, которые играют в этой теории капитальную роль: это *предельные циклы*. Я называю так замкнутые кривые, которые удовлетворяют нашему дифференциальному уравнению и к которым другие кривые, определенные нашим уравнением, приближаются неограниченно, никогда не достигая их. Это второе понятие не менее важно, чем первое. Действительно, пусть мы провели предельный цикл. Подвижная точка, о которой мы говорили выше, конечно, никогда не сможет перейти через него, и она останется навсегда внутри этого цикла или навсегда вне его. Правда, предельные циклы, вообще говоря, являются трансцендентными кривыми, которые невозможно строго построить.

Но часто можно построить две алгебраические замкнутые кривые, concentricные одна по отношению к другой, которые определяют нечто вроде кольца, так что можно будет различать три области в плоскости: внутренность кольца, кольцевую область и внешность кольца. Положим, каким-нибудь образом доказано, что предельный цикл находится в кольцевой области, тогда можно быть уверенным, что если наша подвижная точка находится во внутренней области, она никогда не сможет перейти

во внешнюю. Благодаря этому можно, несмотря на *неустойчивость* этой подвижной точки, предписать ее координатам верхние границы.

Я выяснил затем, что во всех случаях можно расчертить плоскость бесконечным числом замкнутых кривых, взаимно охватывающих друг друга и напоминающих по форме и расположению кривые уровня топографического плана. Следуя и дальше этому сравнению, я скажу, что в таком топографическом плане вершины и котловины будут представлены узлами и фокусами, а седла — особыми точками, которые я выше назвал этим именем. Среди наших замкнутых кривых одни будут кривыми без контакта, другие — предельными циклами. Кроме этих предельных циклов, другие кривые, определенные нашим уравнением, будут спиралями, которые асимптотически приближаются к особым точкам и предельным циклам.

Доказав, что число предельных циклов конечно, не считая некоторых исключительных случаев, я дал общий метод для определения их числа и для построения кольцевой области, в которой лежит в точности один предельный цикл.

В конце мемуара я дал несколько приложений этого метода. Укажу только последний из этих примеров — пример уравнения

$$\frac{dx}{-y + x(x^2 + y^2 - 2x - 3)(x^2 + y^2 - 2x - 8)} = \frac{dy}{x + y(x^2 + y^2 - 2x - 3)(x^2 + y^2 - 2x - 8)}.$$

Я разделил плоскость на четыре области, ограниченные тремя окружностями*

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 2x + 5,5, \quad x^2 + y^2 = 16, \quad (2)$$

охватывающими друг друга. Из этих четырех областей вторая и третья содержат предельные циклы, но только по одному, а две другие не содержат их. Отсюда следует, что если в исходный момент наша подвижная точка находится внутри первой из окружностей (2), она никогда не сможет выйти из второй, а если находится внутри второй, никогда не сможет выйти из третьей.

Имеется частный случай, который заслуживает, чтобы на нем остановили внимание, хотя он и представляется исключительным; это случай, где все кривые, определенные уравнением (1), замкнуты и взаимно охватывают друг друга, наподобие кривых уровня топографического плана. Это единственный случай, где, снова говоря на языке, заимствованном у астрономии, подвижная точка, о которой шла речь выше, имеет *устойчивую* орбиту. Это, в действительности, единственный случай, где нельзя провести на плоскости кривую без контакта [50].

* Так, чтобы первая область была внутренней к первой из этих окружностей, вторая заключена между первой и второй из них, третья заключена между второй и третьей, а четвертая область была внешней к третьему кругу.

Чтобы представился этот случай, необходимо бесконечное число условий, и можно было бы сначала думать, что невозможно выяснить, будут ли они все выполнены сразу. Напротив, это чаще всего очень легко, и в некотором числе случаев доказывается а priori, что все эти условия удовлетворены, в частности, когда мы имеем

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} = 0.$$

Я применил эти принципы к одному дифференциальному уравнению, которое Делоне встретил в теории Луны.

Затем я приступил к изучению уравнений первого порядка и более высокой степени следующего вида:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \quad (3)$$

где F обозначает целый многочлен от x , y и $\frac{dy}{dx}$. Чтобы легче было изучать это уравнение, я использую три вспомогательные переменные ξ , η , ζ , связанные с начальными переменными так, что x , y , $\frac{dy}{dx}$ оказываются рациональными функциями от ξ , η и ζ , и я рассматриваю эти три переменные как координаты точки в пространстве. Уравнение (3) означает тогда, что эта точка находится на некоторой алгебраической поверхности. Я принимаю предосторожности при выборе моих переменных к тому, чтобы эта поверхность не имела бесконечных листов и сводилась к некоторому числу замкнутых листов. Возьмем, в частности, один из этих листов, который я обозначу S . Благодаря принятым соглашениям, через каждую неособую точку пройдет одна и только одна кривая, определенная уравнением (3). Что касается особых точек, то они делятся на седла, фокусы узлы и центры и имеют те же свойства, что и точки, которым я выше дал те же названия.

Понятие, которое играет здесь капитальную роль, это *род* листа S . Я скажу, что этот лист имеет род 0, если он выпуклый, наподобие сферы; род 1, если он имеет дыру, как тор; род 2, если он имеет две дыры; и т. д.

Я доказал очень простое соотношение между родом этого листа и числом седел, фокусов и узлов, которые лежат на нем. Это обобщение соотношения, о котором я говорил выше и которое применялось к уравнениям первого порядка и первой степени.

В остальном ход рассуждения совершенно такой же, как и для кривых, определенных уравнением (1), т. е. уравнением первой степени. Лист S расчерчен бесконечным числом замкнутых кривых, которые являются циклами без контакта или предельными циклами; здесь, все же, есть существенное различие, к которому я хотел бы привлечь внимание. Допустим, например, что лист S оказался тором и что некоторый меридиональный цикл является циклом без контакта; в противоположность тому, что мы видели в случае уравнений первой степени, ничто не мешает тому, чтобы

кривая, определенная нашим дифференциальным уравнением, проходила через эту меридиональную окружность в нескольких точках и даже в бесчисленном числе точек. Если это случается и если подвижная точка описывает такую кривую из некоторого начального положения, она всегда в конце концов займет положение, сколь угодно близкое к этому начальному положению. Можно, следовательно, сказать, что точка описывает *устойчивую* траекторию.

Таким образом, устойчивость, которая, когда речь шла об уравнениях первой степени, возникала лишь в очень частных случаях, более не является исключением, когда речь идет об уравнениях более высокой степени.

К тому же точки, где подвижная точка последовательно встречается с меридиональной окружностью, будучи в бесконечном числе, обладают неожиданным арифметическим свойством.

Пусть μ — некоторое иррациональное число, M_i — точка, где подвижная точка i -й раз встречается меридиональную окружность. Определим, в каком порядке эти точки встречаются при обходе окружности. *Этот порядок будет всегда тот же, что и для чисел $\mu i - E(\mu i)$.*

Перейдем теперь [21, 51] к уравнениям второго порядка, которые я запишу в виде

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}, \quad (4)$$

где X , Y и Z обозначают целые многочлены от x , y и z , а переменные x , y и z рассматриваются как координаты точки в пространстве. Мы можем тогда изучать кривые, которые удовлетворяют этим уравнениям и которые я назову кривыми C , и мы увидим, что через каждую точку пространства пройдет одна и только одна кривая C , если, впрочем, исключить особые точки, т. е. точки пересечения трех поверхностей

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0. \quad (5)$$

Изучение этих особых точек напрашивается прежде всего. Я выяснил, что их имеется четыре типа (не говоря об особых точках, которые встречаются исключительно редко, например центры):

1) *узлы*, куда сходятся все те из кривых C , которые проходят достаточно близко от особой точки;

2) *седла*, к которым сходится бесконечное число этих кривых, образующих в совокупности некоторую поверхность и через которые также проходит еще по одной кривой, не лежащей на этой поверхности;

3) *фокусы*, через которые проходит по одной и только одной кривой C , в то время как другие кривые асимптотически приближаются к особой точке наподобие спиралей;

4) *седла-фокусы*, через которые проходит по одной кривой и только по одной, в то время как бесконечное число других, образующих в совокупности поверхность, асимптотически приближаются к особой точке.

Я изучил также случай, где три поверхности (5) имеют общую кривую, которая становится тогда *особой кривой*. Я выяснил, что различные точки особой кривой имеют свойства, аналогичные свойствам обычных особых точек, о которых мы говорили чуть раньше.

В случае уравнений первого порядка мы нашли одно соотношение между особыми точками различных типов. Такого соотношения не существует для уравнений второго порядка. Более глубокий анализ показывает, что такое соотношение должно быть для всех уравнений нечетного порядка и что, напротив, уравнения четного порядка им не обладают.

Тем не менее, достаточно большое число свойств уравнений первого порядка распространяется на уравнения второго порядка. Поверхности без контакта вполне аналогичны циклам без контакта и, например, можно доказать, что внутри каждой поверхности без контакта (если только они не имеют тройной связности) всегда имеются особые точки.

Выше мы видели, что мы пришли к знанию главных свойств кривых, определенных уравнениями первого порядка, через изучение особых точек этих уравнений; напротив, одной лишь теории особых точек уравнений второго порядка не было бы достаточно самой по себе, чтобы иметь возможность проникнуть столь же глубоко в знание кривых C . Помимо них нужно ввести новое понятие, которое играет до некоторой степени ту же роль, что и особые точки. Пусть C_0 — произвольная *замкнутая* кривая, удовлетворяющая нашему уравнению, а D — область, содержащая все достаточно близкие к C_0 точки; мы можем изучить форму и расположение кривых C внутри этой области. На этом пути выясняется, что помимо большого числа менее важных случаев имеются следующие четыре главных случая:

1. Через кривую C_0 можно провести две поверхности, по которым проходит бесконечное число кривых C , удовлетворяющих уравнениям (4). Другие кривые C , войдя в область D и приблизившись к C_0 , удаляются затем от нее и в конце концов выходят из области D . Мне нечего более прибавить к этому первому случаю, который мало что говорит нам о свойствах наших кривых.

2. Можно построить поверхность S , обладающую кольцевидной формой, подобной тору, внутри которой проходит кривая C_0 , подобно тому как окружность — геометрическое место центров меридианов — проходит внутри тора. Более того, эта поверхность S не касается ни в одной точке никакой из кривых C : это поверхность без контакта. Рассмотрим подвижную точку, описывающую кривую C ; как только она выйдет из поверхности S , она больше туда уже не вернется; мы имеем, таким образом, *неустойчивость*, и это здесь представляется общим случаем.

3. Можно построить поверхность, аналогичную той, о которой мы сейчас говорили, но она не будет поверхностью без контакта; напротив, на ней будет лежать бесконечное число кривых C . Тогда, если наша подвижная точка лежит на поверхности S , она всегда будет на ней оставаться и, более того, если она отправляется от какого-либо начального положения,

то в конце концов всегда вернется сколь угодно близко к этому положению. Ее орбита, таким образом, *устойчива*.

4. Наконец, подвижная точка может проходить сколь угодно близко от произвольной точки области D и если она выходит из некоторого начального положения, то будет возвращаться сколь угодно близко к этому положению. В этом смысле здесь имеется, следовательно, *устойчивость*, и доказательство этой устойчивости было бы полным, если бы мы знали, что координаты подвижной точки меняются в определенных пределах.

К сожалению, мои методы не позволяют почти никогда отличать третий случай от четвертого, а в четвертом случае находить границы, в которых заключены координаты подвижной точки. Это важный пробел, который я тщетно пытался заполнить.

Эти третий и четвертый случаи представляются нам, лишь когда выполнено бесконечное число условий для X , Y и Z , так что они кажутся на первый взгляд исключительными. Тем не менее они имеют большую практическую важность. Можно из других соображений показать, что они будут выполнены, когда последний множитель M , определенный уравнением

$$\frac{d(MX)}{dx} + \frac{d(MY)}{dy} + \frac{d(MZ)}{dz} = 0,$$

всюду однозначен и положителен в рассматриваемой области. И именно это условие встречается в большинстве приложений.

Чтобы распространить предыдущие результаты на уравнения порядка больше двух, пужно отказаться от геометрических рассматриваний, которые были нам столь удобны, или во всяком случае нужно использовать язык гипергеометрии n измерений. Но этот язык еще столь мало знаком большинству геометров, что мы потеряли бы все главные преимущества, которые можно было бы ожидать от представлений такого рода. Однако результаты сохраняют свою силу, и мы снова находим здесь те четыре случая, о которых говорили выше. Что здесь особенно замечательно, так это то, что третий и четвертый случаи, т. е. те, которые отвечают устойчивости, как раз и встречаются в общих уравнениях динамики. Это обстоятельство тем более понуждает нас желать заполнения пробела, отмеченного мною выше.

Для того чтобы двигаться дальше, мне нужно было создать инструмент, предназначенный заменить геометрический инструмент, отказавший мне, когда я захотел перейти к пространству более трех измерений. Это главная причина, которая заставила меня предпринять изучение *Analysis situs*; мои работы на эту тему будут изложены дальше в специальном разделе.

Я продолжал в дальнейшем мои исследования кривых, определенных дифференциальными уравнениями, но новые результаты, которые я получил, относятся прежде всего к небесной механике и будут изложены в четвертой части этих заметок.

В т о р а я ч а с т ь

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ

VI. Общая теория функций одной переменной [71, 72, 35, 78, 41, 73, 75, 79, 95, 93]. Теория функций одной комплексной переменной сделала в самое последнее время значительные успехи, благодаря работам Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера.

Эти функции можно разделить на три класса: 1) однозначные функции, определенные во всей плоскости; 2) однозначные функции с лакунарной областью, т. е. существующие не во всей плоскости; 3) неоднозначные функции.

Среди функций первого класса наиболее важны целые функции, т. е. те, которые можно разложить по степеням x во всюду сходящиеся ряды. Вейерштрасс показал, что подобная функция всегда может быть разложена в бесконечное произведение *примарных множителей*. Примарный множитель рода n — это произведение $\left(1 - \frac{x}{a}\right)e^{P(x)}$, где $P(x)$ — целый многочлен степени n . Функция рода n — это целая функция, все примарные множители которой имеют меньший род.

Эта классификация целых функций по родам поднимает большое число интересных вопросов.

Я хотел сделать свой вклад в решение этих вопросов, изучая способ поведения функции рода n на бесконечности и скорость, с которой убывают коэффициенты ее разложения по степеням x . Я пришел здесь к следующим результатам:

1. Если $F(x)$ есть функция рода n и если модуль x неограниченно возрастает вместе с аргументом так, что $e^{ax^{n+1}}$ стремится к нулю, то произведение $F(x)e^{ax^{n+1}}$ также стремится к нулю.

2. Интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{(xz)^{n+1}} F(z) dz$$

представляет собой целую функцию от $1/x$.

3. Если A_p — коэффициенты при x^p в разложении $F(x)$, то

$$\lim A_p \sqrt[n+1]{p!} = 0 \quad (p \rightarrow \infty).$$

4. Если $F(x)$ — функция рода 0, то она может быть представлена рядом Абеля, изученным Альфаном в X томе «Bulletin de la Société mathématique de France», и при этом для любой константы β .

К сожалению, обращение этих предложений верно не всегда. Легко усмотреть причину, по которой не может быть непреложного критерия, дающего необходимые и достаточные условия, чтобы данная функция имела род n . Действительно, классификация функций по родам тесно связывается с теорией сходимости рядов. Имеются, однако, всегда, как показал Адамар, сомнительные случаи, где можно колебаться между родом n и $n+1$. Но Адамар показал также и то, какие выгоды можно получить от этих обращений, несмотря на ограничения, которым они подчинены.

Первое и наиболее важное условие для того, чтобы функция с нулями (в порядке возрастания модулей)

$$a_1, a_2, \dots, a_p, \dots$$

была рода n , состоит в сходимости ряда

$$\frac{1}{a_1^{n+1}} + \frac{1}{a_2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{a_p^{n+1}} + \dots$$

Но критерия для сходимости ряда, пригодного во всех случаях, не существует. Поэтому-то не существует также и критерия, позволяющего узнать во всех случаях, будет ли функция иметь род n .

Помимо целых функций первый класс включает: 1) функции, которые имеют полюсы; 2) функции, которые имеют лишь конечное число существенно особых точек; 3) функции, которые имеют их бесконечно много, но среди них — *изолированные* особенности (я называю так особые точки, вокруг которых можно построить достаточно малый круг, не содержащий других особых точек); 4) функции, которые имеют одну особую кривую; 5) функции, которые, имея бесконечное число особых точек и не имея особых кривых, не обладают в то же время изолированными особыми точками. (Немцы говорят тогда, что особые точки образуют *eine perfecte Menge*.) Я впервые дал * пример функции этого последнего вида; это фуксовы функции, которые существуют во всей плоскости. Применяя теорему Пикара, можно действительно увидеть, что эти функции не могут иметь изолированных особенностей.

Перейдем теперь ко второму классу, классу функций с лакунарными областями, отмеченными впервые Вейерштрассом. Я пришел к занятиям этими функциями двумя различными путями [79]. Прежде всего, фуксовы и клейновы функции не существуют, как правило, во всей плоскости; они дали мне, следовательно, пример функции с лакунарной областью. Результаты моей вступительной диссертации равным образом привели меня к функциям, имеющим лакуны. Если, действительно, взгля-

* Фуксовы функции (passim).

нута в раздел, который я озаглавил «Общие вопросы дифференциальных уравнений», то мы увидим, что уравнение (4) из этого раздела может иметь голоморфный интеграл лишь в случае, когда выпуклый многоугольник, содержащий в себе все точки, представляющие различные корни некоторого алгебраического уравнения, не содержит начала. Это не могло бы произойти, если бы голоморфный интеграл уравнения (4), рассматриваемый как функция корней этого алгебраического уравнения, не был бы функцией с лакунарной областью.

Это замечание позволило мне открыть целый класс функций, имеющих лакуны. Вот в чем состоит способ их построения. Положим

$$\varphi(x) = \sum \frac{A_n}{x - b_n},$$

допуская, что ряд $\sum A_n$ абсолютно сходится и что точки b_n — внутренние к некоторой области D или расположены на контуре этой области, причем так, что если на этом контуре взять произвольную и сколь угодно малую дугу, то на этой дуге будет лежать бесконечное число точек b_n .

Функция $\varphi(x)$ будет тогда однозначной функцией, имеющей область D в качестве лакунарного пространства. Как пример я отмечу ряд

$$\varphi(x) = \sum \frac{u^m v^n w^p}{x - \frac{m\alpha + n\beta + p\gamma}{m + n + p}},$$

где u, v, w — данные константы, по модулю меньшие 1; α, β, γ — произвольные мнимые константы; m, n, p могут принимать под знаком $\sum$ все целые положительные значения.

В качестве лакунарного пространства функция $\varphi(x)$ имеет треугольник $\alpha\beta\gamma$.

Важно уяснить себе истинную природу этих функций с лакунарной областью. Часто случается, что разложение в ряды, например с рациональными членами, сходится сразу и внутри и вне области и расходится лишь только на самом контуре области. Две части плоскости, где ряд сходится полностью, тогда отделены кривой, на которой разложение перестает служить. Нужно ли, однако, рассматривать две функции, представленные разложением внутри и вне области как аналитические продолжения друг друга? Многие геометры в прежнее время были склонны в это верить. Вейерштрасс впервые показал, что их точка зрения была ложной, дав примеры рядов, которые представляют в различных областях определено различные функции. Я сам также встретился с одним таким примером, о котором хочу здесь упомянуть. Некоторые разложения, которые внутри фундаментальной окружности представляют одну из тех функций, которые выше я называл *тета-фуксовыми*, представляют нуль вне этой окружности.

Я хотел бы дать [78] еще один аргумент в поддержку взгляда Вейерштрасса. Рассмотрим функцию $F(x)$ с областью D в качестве лакунарной

области и другую функцию $F_1(x)$, существующую, напротив, лишь в области D и, значит, имеющую всю остальную часть плоскости своей лакунарной областью. Разделим контур области на две дуги A и B . Я доказал, что можно найти две однозначные функции $\Phi(x)$ и $\Phi_1(x)$, существующие во всей плоскости и имеющие: одна — только A , другая — только B особыми линиями; при этом

$$\Phi + \Phi_1 = F \text{ вне } D,$$

$$\Phi + \Phi_1 = F_1 \text{ внутри } D.$$

Если бы функция F имела естественное аналитическое продолжение внутрь D , то этим продолжением должна была быть F_1 ; однако мы выбрали эту функцию F_1 совершенно произвольным образом, наложив на нее лишь условие существовать только в D . Значит, лишено смысла говорить о естественном продолжении функции внутрь одной из ее лакунарных областей. В то же время я свел изучение функций с лакунарными областями к изучению трансцендентных однозначных функций с существенно особой кривой линией. В более обширном мемуаре [95] я еще раз вернулся к этому вопросу.

Теория многозначных функций далека от того, чтобы быть столь же продвинутой, как и теория однозначных функций. Я показал сначала [93], что число листов многозначной функции, если оно бесконечно, имеет первую мощность в смысле Кантора.

Хотя хорошо известен характер этих многозначных функций в окрестности одной данной точки, а введение римановых поверхностей пролило много света на еще темные части их теории, требуется еще большое продвижение, прежде чем мы будем знать главные их свойства. Я был поэтому полон желания свести их изучение к изучению однозначных трансцендентных функций. Уже теория фуксовых функций приблизила меня к цели; я показал, действительно, что если $f(x, y) = 0$ — уравнение какой-либо алгебраической кривой, то можно таким образом выбрать параметр z , чтобы x и y были однозначными функциями этого параметра. Я решил тем самым проблему для простейших из многозначных функций, т. е. для алгебраических.

Это естественно поставило передо мной вопрос [73], является ли это свойство специфическим для алгебраических функций или можно распространить его на любую многозначную функцию. Я смог ответить на этот вопрос и доказал следующую очень общую теорему.

Пусть дана произвольная аналитическая функция от x , y . Всегда можно найти такую переменную z , чтобы x и y были однозначными функциями от z .

Исходной точкой послужило мне доказательство принципа Дирихле, данное Шварцем. Однако этот принцип не позволил бы мне сам по себе преодолеть все трудности, которые происходили от большой общности доказываемой теоремы. Сначала нужно определить риманову поверхность с бесконечным числом листов, для которой я старался найти на части плоскости конформное представление. Я выбрал эту поверхность таким об-

разом, чтобы она была односвязной, чтобы все особые точки остались вне собственно поверхности и оказывались, так сказать, на ее границе, и, наконец, чтобы функция u не принимала более одного значения в одной и той же точке поверхности.

Я отрезаю далее конечную часть R этой поверхности и беру ее конформное представление на круг, что мне позволяет сделать теорема Шварца. Это представление осуществляется посредством некоторой аналитической функции u . Заставляя далее область R возрастать неограниченно, мы получим конформное представление все более и более увеличивающейся части нашей римановой поверхности. Мне в таком случае остается только показать, что аналитическая функция u , о которой я говорил, стремится к некоторому определенному и конечному пределу. Когда это сделано, преодолены только первые трудности. Действительно, остается еще доказать, что предел сам будет аналитической функцией. Для этого требуется, чтобы функция u равномерно (*gleichmässig*) стремилась к пределу, что мне удалось доказать.

Таким образом, изучение многозначных функций сведено во всех возможных случаях к гораздо более легкому изучению однозначных функций.

Я отнесу к этим исследованиям, касающимся функций одной переменной, работы, которые я посвятил изучению рядов из полиномов [35, 47]. И действительно, в теории функций один факт играет очень важную роль: он состоит в том, что области, в которых какая-либо функция может быть представлена степенным рядом, ограничены кругами. Можно предположить, что аналогичную пользу можно извлечь из знания областей, где сходятся ряды другого вида.

Я пытался, в частности, найти условия сходимости рядов, n -й член которых является константой, умноженной на целый многочлен $P_n(x)$ степени n , в предположении, что между некоторым числом последовательных полиномов имеется рекуррентное соотношение. Ряды, разложенные по многочленам Лагерра, являются, очевидно, частными случаями. Я нашел, что области, где эти ряды сходятся, ограничены некоторыми *кривыми сходимости*, и я определил эти кривые, заметив, что ряд

$$\sum P_n z^n,$$

рассматриваемый как функция от z , удовлетворяет некоторому линейному дифференциальному уравнению, коэффициенты которого являются целыми многочленами от z и x .

VII. Общая теория функций двух переменных [76, 77, 101]. С первого взгляда кажется, что для изучения функций двух переменных достаточно применить, ничего не меняя, принципы, которые служили для установления важнейших свойств функций одной переменной. Это не так: между обеими теориями имеются существенные различия и от одной к другой нельзя было бы перейти простым обобщением.

Это различие проявляется уже при рассмотрении целых многочленов, которые разложимы на множители, когда имеется лишь одна переменная, и не разложимы в противоположном случае. Я оставляю сейчас в стороне трудности, к которым пришли, желая обобщить теорию вычетов Кюши, так как хочу посвятить этому специальный раздел. Я подчеркну только один пример, хорошо выявляющий различия, о которых я говорил: изучение функций, мероморфных во всей плоскости, т. е. трансцендентных функций, которые не имеют в конечной части других особенностей, кроме бесконечных.

Известно, что Вейерштрасс доказал, что если функция одной переменной мероморфна во всей плоскости, то она может рассматриваться как частное двух целых функций. Чтобы прийти к своему результату, знаменитый берлинский геометр *строит* целую функцию, которая обращается в нуль всюду, где обращается в бесконечность данная мероморфная функция. Произведение этих двух функций, не обращаясь более в бесконечность, является целым. Чтобы построить требуемую трансцендентную функцию, нужно *отдельно* рассмотреть различные обращения в бесконечность данной мероморфной функции.

Метод Вейерштрасса, как кажется с первого взгляда, не может быть распространен на функции двух переменных, которые обращаются в бесконечность уже не в изолированных точках, а на непрерывных многообразиях, и, следовательно, не могут рассматриваться *отдельно*. И геометры, пытавшиеся обобщить теорему Вейерштрасса, были этим уже давно остановлены [76, 77].

Мне пришла идея обойти эту трудность, обобщив понятие функции двух переменных. Пусть, действительно, $V+iW$ — какая-либо функция переменных $x+iy$ и $z+it$. Вещественная часть V будет удовлетворять уравнению

$$\Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} + \frac{d^2 V}{dt^2} = 0. \quad (1)$$

Но этого уравнения недостаточно, чтобы функция V оказалась вещественной частью некоторой функции наших двух переменных. Нужно еще, чтобы V удовлетворяла соотношениям

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2 V}{dx dz} + \frac{d^2 V}{dy dt} = 0. \quad (2)$$

Возьмем теперь все функции V , которые удовлетворяют уравнению (1) и не удовлетворяют уравнению (2). Тогда можно построить функцию, которая будет удовлетворять единственному условию (1) и которая, кроме того, будет обращаться в бесконечность лишь в некоторых из тех точек, в которых обращается в бесконечность данная мероморфная функция, и *не будет в других*. Напротив, это было бы невозможно, если бы эта функция по-прежнему удовлетворяла условию (2).

Получив возможность теперь по отдельности рассматривать обращения в бесконечность нашей мероморфной функции, нам ничего не остается, как только применить метод Вейерштрасса и построить функцию e^V , которая обращается в нуль всюду, где данная мероморфная функция обращается в бесконечность, и такую, что V удовлетворяет уравнению (1). Можно даже найти бесконечное число таких функций. Пусть, действительно, функция V_0 — одна из них и G — целая функция, т. е. всюду конечная, от x, y, z и t , удовлетворяющая уравнению $\Delta G = 0$; все функции $V_0 + G$ удовлетворяют, как и сама V_0 , условиям, приведенным выше. Остается показать, что среди этих функций $V_0 + G$ имеется одна, которая может рассматриваться как вещественная часть некоторой функции от $x + iy$ и $z + it$, что означает, что целой функцией G можно распорядиться так, чтобы

$$\frac{d^2(V_0 + G)}{dx^2} + \frac{d^2(V_0 + G)}{dy^2} = \frac{d^2(V_0 + G)}{dx dz} + \frac{d^2(V_0 + G)}{dy dt} = 0.$$

Я сделал это, доказав тем самым следующую теорему:

Если функция от двух мнимых переменных всюду мероморфна, она будет частным двух целых функций.

Я снова вернулся к этому же вопросу [101] и значительно упростил доказательства.

В том, что касается многозначных функций, я внес свой вклад в изучение их свойств в окрестности данной точки теми леммами, которые доказал в начале моей вступительной диссертации. Допустим, что уравнение

$$F(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

определяющее z как неявную функцию от $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворено для системы значений

$$z = x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0,$$

и пусть мы изучаем функцию в окрестности этой системы значений. Я предполагаю, сверх того, что в этой окрестности функция F голоморфна.

Давно уже известно, что если $\frac{dF}{dz}$ не нуль, то z есть голоморфная функция от $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Я исследовал, что происходит, когда $\frac{dF}{dz}$ равно нулю,

так же как и $\frac{d^2F}{dz^2}$, $\frac{d^3F}{dz^3}$, ..., $\frac{d^{m-1}F}{dz^{m-1}}$, но m -я производная $\frac{d^mF}{dz^m}$ ненулевая.

Я доказал, что в этом случае z удовлетворяет алгебраическому уравнению вида

$$z^m + B_{m-1}z^{m-1} + B_{m-2}z^{m-2} + \dots + B_1z + B_0 = 0,$$

коэффициенты которого B являются голоморфными функциями от x . Я получил затем аналогичный результат для случая, где имеется p неявных функций от n переменных, определенных p одновременными уравнениями.

VIII. Кратные интегралы [84, 85, 89, 142, 100, 232, 92, 233, 234]. Теория, которая наибольшим образом способствовала облегчению изучения функций одной переменной, — это, без сомнения, теория интегралов, взятых между мнимыми границами. Она привела, как известно, к рассмотрению периодов этих интегралов и к различению периодов полярных (отвечающих вычетам) и периодов циклических. Одним из наиболее важных моментов затем является изучение абелевых интегралов, т. е. интегралов от алгебраических выражений; эта теория представляется обычно в геометрической форме, что повело к тому, что стали говорить для краткости, что эти интегралы «принадлежат алгебраической кривой».

Когда мы переходим к функциям двух переменных, понятие этих интегралов и их периодов может обобщаться двумя различными путями: через интегралы от полных дифференциалов и через двойные интегралы. Я не буду много говорить о первом способе обобщения. В самом деле, он принадлежит не мне: Пикар извлек из него первые и наиболее красивые результаты. Я лишь привлек внимание [84] после заметки Пикара к некоторым деталям. В ней этот геометр доказал, что алгебраическая поверхность обладает абелевыми интегралами от полных дифференциалов первого рода лишь в отдельных случаях.

Я хочу сказать, что если

$$f(x, y, z) = 0$$

— уравнение, определяющее z как функцию от x и y , то, вообще говоря, не найдется точного дифференциала

$$Pdx + Qdy,$$

где P и Q были бы рациональными функциями от x , y и z , так, чтобы интеграл

$$\int Pdx + Qdy$$

оставался всегда конечным.

Отправляясь от этого, я нашел условия, при которых поверхность четвертого порядка обладает подобными интегралами. Необходимо и достаточно, чтобы она была линейчатой или сводилась линейной заменой к поверхности вращения. Я указал, кроме того, некоторое число случаев, когда интегралов первого рода не бывает, и когда они всегда есть.

Я выяснил, что теорема Абеля немедленно распространяется на интегралы от полных дифференциалов первого рода; но с первого взгляда казалось, что она не может быть уже применена к поверхностям, которые не обладают подобными интегралами, т. е. к огромному большинству алгебраических поверхностей.

Оказалось, что это не так. Я доказал [85] следующую теорему:

Если $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_q, y_q, z_q)$ — q точек пересечения алгебраической поверхности S и алгебраической кривой C , если

$(x_1+dx_1, y_1+dy_1, z_1+dz_1), \dots$ — q точек пересечения этой же поверхности S с кривой C' , бесконечно близкой к C , то имеется некоторое число соотношений вида

$$X_1dx_1 + X_2dx_2 + \dots + X_qdx_q = 0,$$

где X_i являются рациональными функциями от x_i, y_i, z_i . Эти соотношения могут рассматриваться как обобщение теоремы Абеля.

Трудности, связанные с изучением двойных и кратных интегралов, распространенных по мнимой области, имеют различную природу. Теория простых интегралов, взятых между мнимыми границами, потребовала бы, вероятно, гораздо более кропотливого изложения, если бы мы не имели в качестве руководящих геометрические представления. Эти представления теряют, когда переходят к двойным интегралам; пришлось бы прибегнуть к геометрии четырех измерений что было бы скорее усложнением, чем упрощением.

Это препятствие не кажется, впрочем, очень серьезным; однако оно долго останавливало геометров. Пикар разобрал по поводу гиперфуксовых функций один вопрос, который представляет некоторую аналогию с тем, что нас сейчас занимает, но который все же не является тем же самым вопросом; введенные им величины никоим образом не могут рассматриваться как обобщение периодов простых интегралов. Важно не смешивать их с циклическими периодами, которые этот ученый рассмотрел несколько времени спустя после публикации моей первой заметки на эту тему и которые, напротив, вполне непосредственно, связаны с теорией, которую я пытался заложить.

Я первый начал, таким образом, методически изучать этот важный вопрос в заметке [89], которую имел честь представить Академии 25 января 1886 года и результаты которой развил в более обширном мемуаре [92].

Первым делом нужно было найти способ геометрического представления, не обращаясь к пространству четырех измерений. Этого можно добиться различными методами, которые я не буду излагать здесь и которые я использовал один за другим. Нужно затем дать определение двойных интегралов, взятых по мнимой области. Благодаря тем способам представления, которые я сейчас упомянул, возможно дать это определение так, чтобы не оставалось никакой двусмысленности. Далее нужно доказать основную теорему, аналогичную теореме Коши, согласно которой двойной интеграл, взятый вдоль замкнутого контура, вообще говоря, обращается в нуль. Это доказательство не представляет труда. Возможно найти в простой форме условие интегрируемости двойных дифференциалов

$$A dydz + B dx dz + C dx dy + \dots,$$

которые сначала нужно недвусмысленно определить. Эти условия выражаются почти в той же форме, что и для обычных дифференциалов. Только некоторые знаки, которые все положительны для интегралов четного порядка и, в частности, для двойных интегралов, становятся поочередно

положительными и отрицательными, когда речь идет об интегралах нечетного порядка и, в частности, для простых интегралов. Когда эти условия найдены, теорема доказывается немедленно.

Она допускает, однако, некоторые исключения, как и соответствующее предложение теории Коши, и эти исключения оказываются в основе возникновения периодов двойных интегралов. Эти периоды, как и в случае одной переменной, делятся на периоды циклические и полярные. Я занимался, в частности, полярными периодами, или, если угодно, вычетами двойных интегралов. Пикар изучил затем циклические периоды.

Я рассмотрел интеграл от рациональной функции, который записал в следующем виде:

$$\iint \frac{f(x, y) dx dy}{\varphi(x, y) \psi(x, y)}.$$

Разложив знаменатель на неприводимые сомножители, я выяснил, что этот интеграл имеет периоды трех типов.

1. Периоды первого типа равны $2\pi i$, умноженному на один из периодов первого типа абелевого интеграла

$$\int \frac{f dx}{\varphi \frac{d\psi}{dy}}$$

(отнесенного к алгебраической кривой $\psi=0$).

2. Периоды второго типа относятся к различным точкам пересечения двух кривых $\varphi=\psi=0$ и равны

$$\pm 4\pi^2 \frac{f(x_0, y_0)}{\Delta(x_0, y_0)},$$

где $\Delta(x, y)$ — определитель φ и ψ по отношению к x и y , x_0 и y_0 — координаты точки пересечения.

3. Наконец, периоды третьего типа относятся к различным двойным точкам этих двух кривых и имеют аналогичное выражение.

Но теория была бы не полной, если бы мы ограничились тремя этими типами периодов. Может случиться, что функция под знаком интеграла становится бесконечной в различных точках контура интегрирования без того, чтобы сам интеграл перестал быть конечным. Это обстоятельство не могло произойти в случае простых интегралов, когда интегрируемая функция рациональна; здесь это уже не так. С другой стороны, мы не могли бы исключить из рассмотрений интегралы этого типа, так как, насколько об этом сегодня можно судить, они должны играть важную роль в приложениях.

Но интегралы этого нового типа имеют совершенно другой характер, чем интегралы с периодами. Эти последние, действительно, либо остаются постоянными, когда меняется непрерывным образом путь интегрирования,

либо возрастают резкими скачками; первые же, напротив, меняются непрерывным образом, как и сам путь интегрирования. В этом основное отличие новой теории от теории Коши.

Эти результаты применяются *mutatis mutandis* к трансцендентным функциям и, в частности, к однозначным функциям.

Будет ли эта новая теория столь же плодотворна, какими были открытия Коши? Она еще слишком молода, чтобы можно было высказаться по этому поводу. Несомненно, некоторые из результатов, которые можно получить здесь, как немедленное обобщение методов Коши, могли быть легче получены другими путями. Но можно надеяться, что так будет не всегда и что я уже стою на пути действительно новых предложений в теории абелевых интегралов.

Периоды, о которых речь шла до сих пор, аналогичны тем, которые связываются с полярными особенностями простых интегралов. Но когда функция под знаком интеграла не однозначна, кратные интегралы, кроме этих периодов, могут допускать и циклические периоды.

К занятиям ими меня привел один из вопросов небесной механики, вопрос о разложении пертурбационной функции.

Если функция под знаком интеграла зависит от параметра (как, например, эллиптические интегралы от модуля), то циклические периоды будут функциями этого параметра. Как и в случае простых интегралов, эти функции будут определены линейными уравнениями с алгебраическими коэффициентами. Я изучал эти уравнения и их группы [100]. Я показал, что имеется тесная связь между линейным уравнением, определяющим периоды двойных интегралов, зависящих от радикала $\sqrt{F(x, y)}$, и уравнением, которое определяет периоды простых абелевых интегралов, порожденных алгебраической кривой $F(x, y) = 0$. Я показал, каким преобразованием можно перейти от одного из них к другому.

Это последнее мое исследование связано с моими работами по *Analysis situs*.

С другой стороны, если дано несколько кратных интегралов, зависящих от радикала $\sqrt{F(x, y)}$, то можно поставить себе целью построить теорию приведения этих интегралов, аналогично классической теории приведения эллиптических (или гиперэллиптических) интегралов к небольшому числу типов (скажем, первого, второго и третьего рода). Я решил эту задачу, которая была мне полезной с точки зрения разложения пертурбационной функции [232, 233, 234].

Приведение двойных интегралов и приведение интегралов от полных дифференциалов представляются здесь, впрочем, тесно связанными между собой вопросами.

После этого обзора работ, которые я посвятил общей теории функций, я естественно прихожу к тому, чтобы сказать об изучении различных отдельных классов функций. Я выше уже говорил о фуксовых функциях. Мне остается вкратце изложить мои исследования по эллиптическим функциям, по абелевым функциям и по гиперфуксовым функциям.

IX. Эллиптические функции. Я мало что сделал по эллиптическим функциям. Однако в одном арифметическом мемуаре [114, 119] я дал способ выражения этих функций посредством определенного интеграла. Известно, что двоякопериодические функции могут быть разложены на простые элементы вида $\frac{\sigma'(u-a)}{\sigma(u-a)}$ или вида

$$\frac{d^n}{du^n} \frac{\sigma'(u-a)}{\sigma(u-a)}.$$

Достаточно, таким образом, выразить определенным интегралом функцию

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \frac{1}{u} + \sum \left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right),$$

где $w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$ и где μ и μ' могут принимать все пары целых положительных и отрицательных значений, за исключением пары $\mu = \mu' = 0$. Очевидно, ряд во втором члене можно разложить на четыре других: первый включает те члены, в которых μ и μ' положительны; второй — члены, где μ положительно, а μ' отрицательно или нуль; третий — члены, где μ отрицательно или нуль, а μ' положительно; наконец, четвертый — члены, где μ и μ' оба отрицательны или нули. Это разложение аналогично разложению $\pi \operatorname{ctg} x \pi$ в сумму двух членов, зависящих от эйлеровой функции

$$\pi \operatorname{ctg} x \pi = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)}.$$

Это обобщение эйлеровой функции аналогично, но не совпадает с тем, которое дал Аппель.

Достаточно тогда выразить определенным интегралом первый из наших рядов, так как остальные легко сводятся к нему. Мы находим, что этот частичный ряд выражается интегралом, взятым по отношению к z в пределах между 0 и ∞ , причем под знаком интеграла стоит функция, рациональная по отношению к z и к различным экспонентам вида $e^{\lambda z}$. Можно, следовательно, выразить таким же образом все двоякопериодические функции.

Мне также совершенно случайно пришлось заняться эллиптическими функциями, рассматривая их как частный случай фуксовых функций. Я нашел снова большую часть известных формул и, в частности, выражение функции с двумя периодами тригонометрическими рядами. Тем же путем я пришел к формуле, которая, я думаю, нова и которая позволяет выразить эллиптические функции бесконечным рядом особого вида (*Acta mathematica*, t. I, p. 287).

X. Абелевы функции [70, 80, 83, 86, 88, 90, 87, 74, 82, 143, 97, 99, 101, 227, 228]. Теория абелевых функций не так далеко продвинута,

как теория эллиптических функций. Большое число свойств этих последних трансцендентных функций не распространяется или лишь с трудом распространяется на общий случай. Мы не должны этому удивляться, если вспомним, что многие из свойств функций одной переменной не применимы к функциям двух переменных. Именно эта трудность занимала нас в разделе VII.

К изучению абелевых функций пришли через изучение алгебраических кривых и абелевых интегралов. Мне пришлось попутно заниматься [143] бирациональными преобразованиями алгебраических кривых для того, чтобы доказать, что всегда можно привести эти кривые к пространственным кривым, лишенным всякой нерегулярности. Один из первых фактов, который был замечен, — это возможность приведения этих абелевых интегралов. Уже Якоби встретил несколько таких примеров; в достаточно многочисленных случаях интегралы, принадлежащие к кривой рода ρ , сводятся к интегралам меньшего рода или даже к эллиптическим. Но вскоре приходят к тому, чтобы встать на более общую точку зрения; Θ -функции, которые обязаны своим происхождением абелевым интегралам первого рода, являются лишь частным случаем более общих Θ -рядов. Нетрудно, однако, видеть, что этим более общим трансцендентным функциям принадлежат интегралы, которые являются, правда, интегралами от полных дифференциалов, но которые тем не менее могут рассматриваться как обобщения абелевых интегралов первого рода. Естественнo тогда применить к этим интегралам процесс приведения; первоначальная проблема получает важное расширение, но после удаления стеснявшего ограничения она упростилась, а не усложнилась, так как отныне можно вводить в рассуждение произвольную Θ -функцию, не заботясь о ее происхождении.

Геометры издавна были поглощены этой проблемой, которая должна предоставить нам важные данные об алгебраических функциях и которая является наилучшей дорогой для проникновения в таинственную область абелевых функций. В последнее время Пикар в серии блестящих работ сделал несколько важных шагов.

Мои первые опыты в этом круге идей относились лишь к одному частному случаю. Как я уже объяснил выше в разделе, озаглавленном «Интегрирование уравнений посредством алгебраических и абелевых функций», если общий интеграл линейного уравнения алгебраический и если с помощью этого общего интеграла образовать систему абелевых интегралов первого вида, то между периодами этой системы будет большое число интересных соотношений. Я нашел в этом средство [39, 40] глубже проникнуть в изучение абелевых функций и решил воспользоваться им. Я выбрал как частный пример систему абелевых интегралов, которые можно построить с помощью резольвенты Галуа модулярного уравнения по отношению к преобразованию седьмого порядка. Я нашел, что соотношения, существующие между периодами, достаточны, чтобы их полностью определить.

Дойдя, таким образом, до вычисления этих периодов, я заметил, что среди абелевых интегралов этой системы (которая имеет род 3) имеется бесконечное число таких, которые могут быть сведены к эллиптическим интегралам. Это был третий пример замечательного обстоятельства, уже дважды отмеченного Пикаром.

Мое внимание снова было привлечено к этому вопросу мемуаром Ковалевской, где были ссылки на две теоремы Вейерштрасса о приведении абелевых интегралов к эллиптическим. Эти две теоремы были сообщены берлинским профессором в письмах различным ученым, но их доказательства не были опубликованы. Я дал [82] два различных доказательства этих двух предложений; я все еще не знаю, совпадают ли мои методы с методами Вейерштрасса. Оба доказательства заимствованы из арифметики, и этому не следует удивляться, так как вся проблема в действительности чисто арифметическая. Первое доказательство основано на рассмотрении билинейных форм. Во втором я использую один частный прием приведения. Я предполагаю, что в системе интегралов рода ρ имеется μ интегралов, которые сводятся к роду μ . Тогда 2ρ периодов, или старые периоды, выразятся посредством 2μ величин, которые будут новыми периодами, с помощью линейных многочленов с целыми коэффициентами. Можно, следовательно, построить таблицу из $4\rho\mu$ целых чисел, которая характеризует приведение. Но эту таблицу можно образовать бесчисленным множеством способов, так как можно заменять либо систему старых, либо систему новых периодов эквивалентной системой. Проблема как раз и состоит в использовании этого обстоятельства для приведения таблицы к ее самому простому виду. Во втором моем методе приведение производится рядом однотипных операций.

Я использовал преимущества этих двух методов, чтобы обобщить обе теоремы Вейерштрасса и распространить их на случай приведения абелевых интегралов к другим абелевым интегралам.

Теорема Вейерштрасса была в одном отношении более общей, чем теорема Пикара на ту же тему; эта последняя была применима в действительности лишь к приведению рода 2 к роду 1; немецкий геометр изучил приведение произвольного рода ρ к роду 1. С другой стороны, в теореме Пикара содержалось больше, чем в теореме Вейерштрасса, так как приведение было у него продвинуто дальше. Возможно ли было найти утверждение, которое заключало бы сразу оба утверждения — и Вейерштрасса и Пикара, т. е. в общем случае приведение проводилось бы столь же далеко, как и у этого последнего аналитика? Применение второго моего метода показало мне [90, 87], что это можно сделать без труда.

Тот же прием позволил мне в одно и то же время изучить общий случай (приведение произвольного рода ρ не только к роду 1, но и равным образом к произвольному роду μ) и провести приведение гораздо дальше, чем я это сделал в моей первой работе. Теорема, к которой я таким образом пришел, содержит как частные случаи все ранее открытые предложения и резюмирует тем самым всю теорию.

Один частный случай особенно достоин внимания; это тот, где бесконечное число интегралов той же системы сводится к эллиптическим интегралам. Пикар уже встретился с двумя такими примерами и казалось вероятным, что в системе рода ρ , где имеется больше чем ρ приводимых интегралов, их должно быть бесконечно много. Я доказал, что дело обстояло действительно таким образом [83, 87], и нашел в то же время очень простые соотношения, которые связывают приводимые интегралы между собой.

Методы, которые я здесь изложил, позволяют провести рациональную классификацию случаев приведения. Но эта классификация, помимо неоспоримых преимуществ, имеет также и серьезное неудобство: она не отличает от общего случая частные случаи, где абелевы интегралы, которые нам нужно приводить, принадлежат алгебраической кривой. Эти последние интегралы не имеют специального интереса с точки зрения теории абелевых функций, но они вызывают, напротив, большой интерес, если мы поставили себе целью изучение алгебраических функций. Важно было бы, следовательно, найти новую классификацию, распространяющуюся только на эти частные случаи и оставляющие в стороне все другие. Я указал [88], как прийти к этому результату через изучение преобразований фуксовых функций, но не имел времени углубить этой теории.

Систематическое изучение абелевых функций должно было естественно начаться с анализа случаев приведения, дальнейшее достаточно покажет это; но это лишь первый шаг, и остается еще много других задач.

Мы видели, что Θ -функции, определенные посредством абелевых интегралов первого рода, являются лишь частными случаями более общих Θ -функций.

Чем характеризуются эти специальные Θ -функции, т. е. те, которые обязаны своим происхождением абелевым интегралам? Что позволяет отличить их от Θ -функций самого общего вида? Следующее обстоятельство. Многообразие

$$\Theta = 0$$

является, употребляя язык Ли, дважды многообразием переноса. Это можно было бы легко вывести из предшествующих работ Ли. Но я пришел к тому же результату [97, 98] совершенно иным путем. Это условие можно выразить соотношением между периодами, но это соотношение трансцендентно и не может выразиться иначе, как только в форме ряда. Я ограничился указанием первых членов этого ряда; я имею в виду те, которые наиболее чувствительны к небольшому отличию Θ -функции от произведения Θ -функций эллиптических. Форма этого соотношения любопытна, так как в него входят радикалы. Можно взять бесконечную систему функций от n переменных, допускающую $2n$ систем периодов и не входящую в категорию, специально изучавшуюся Риманом. Могут ли эти функции всегда рассматриваться как отношение двух Θ -функций? Риману удалось это доказать, но он не опубликовал свое доказательство.

Вейерштрасс вновь нашел этот результат, но и он также не опубликовал при своей жизни метод, которым воспользовался.

Приступив к изучению этих функций, которые я подчинил исключительно лишь условию периодичности [70], я выяснил, что их всегда можно извлечь из обычных абелевых функций, полученных методом обращения Якоби с помощью приема приведения абелевых интегралов.

При этих условиях мы, Пикар и я, должны были подумать об объединении усилий, чтобы заново получить результат Римана. Мы выяснили [80], что между периодами должно иметься то же соотношение, что и в частном случае функций, порожденных обращением абелевых интегралов. Из этого легко было заключить, что все функции от n переменных с $2n$ периодами выражаются посредством Θ -рядов.

Метод, который я сейчас изложил, тот же, которым воспользовался Вейерштрасс и который он не опубликовал; это стало для нас ясным, когда после смерти ученого мы получили чистые листы третьего тома полного собрания его трудов.

Имелись лишь некоторые различия в деталях; так, я употребил несколько иное средство для доказательства необходимой леммы, согласно которой всегда имеется алгебраическое соотношение между p функциями от p переменных и с $2p$ периодами. Позже я вернулся к этому [99].

Вернемся к теореме, доказательство которой я дал после Вейерштрасса вместе с Пикаром. С тех пор Аппель дал новое доказательство, основанное совсем на других принципах, и я сам дал еще третье, совершенно отличное от первых двух [99, 101]. Напомню о том приеме, с помощью которого я доказал, что мероморфная функция нескольких переменных всегда является отношением двух целых функций (*vide supra* раздел VII). Какова природа этих целых функций? Усовершенствования, внесенные [101] в мое первоначальное доказательство, позволили решить этот вопрос и прямо показать, что если мероморфная функция периодическая, то эти две целые функции являются «периодическими функциями». Я ограничусь указанием того, что доказательство представляет аналогию с доказательством, которым Вейерштрасс установил, что существует целая функция рода 2, которая допускает все нули некоторой эллиптической функции.

Существование этих периодических функций, перед лицом которых метод обращения беспомощен, лучше позволяет подчеркнуть необходимость отправляться для построения теории абелевых функций от Θ -рядов самих по себе. Известно, что на прямом изучении Θ -функций одной переменной можно основать всю теорию эллиптических функций; точкой отправления служит тот факт, что уравнение

$$\Theta(x) = 0$$

имеет единственный корень внутри параллелограмма периодов. Отсюда важность следующей проблемы, решение которой [74, 70], очевидно, должно предшествовать всякому прямому изучению Θ -рядов многих пе-

ременных. Сколько имеют одновременно взятые уравнения

$$\begin{aligned} \Theta(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_n - a_n) = \Theta(x_1 - b_1, x_2 - b_2, \dots, x_n - b_n) = \dots \\ \dots = \Theta(x_1 - l_1, x_2 - l_2, \dots, x_n - l_n) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где все $a, b, \dots, l$ являются данными константами, различных решений? Посредством одной формулы Кронекера я смог доказать, что это число постоянно и не зависит от периодов, так же как и от констант $a, b, \dots, l$. Затем мне уже было легко, рассмотрев случай, в котором Θ -функция сводилась к произведению эллиптических Θ -функций, доказать, что это число в точности есть $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Я применил тот же метод к уравнениям аналогичным, но более сложным, чем уравнения (1), и нашел число различных решений, которое они должны иметь.

Но, более того, в случае эллиптических функций легко находится значение корня уравнения

$$\Theta(x) = 0.$$

Если имеют дело с аналогичными, но более сложными уравнениями, можно еще найти сумму корней.

Возвращаясь к абелевым функциям и к уравнениям (1), можно тогда спросить [86, 87], возможно ли найти сумму значений x_1 , сумму значений x_2 и т. д., удовлетворяющих этим уравнениям? Эта проблема сложнее, чем предыдущая, где искомое число оставалось постоянным; это обстоятельство позволило там ограничиться частным случаем, и мы немедленно пришли к эллиптическим функциям. Здесь это больше не так: искомые числа больше не постоянны, а являются функциями периодов.

Однако проблема немедленно решается в случае эллиптических функций, т. е. в одном из случаев приведения, изученных выше. Когда в системе абелевых интегралов рода n , которая отвечает рассматриваемым Θ -функциям, имеется n различных интегралов, приводимых к эллиптическим интегралам, легко видеть, что абелевы Θ -функции очень просто выражаются через эллиптические Θ -функции. Тогда можно через применение обобщенной теоремы Абеля (ср. раздел VIII) полностью решить занимающую нас проблему.

Система периодов произвольной Θ -функции всегда отличается бесконечно мало от системы периодов, отвечающих какому-нибудь случаю приведения. Здесь мы имеем обстоятельство, которое даст, я не сомневаюсь в этом, ключ к решению многих проблем. Оно дает нам, в частности, решение, которое мы ищем.

Мы знаем искомую сумму значений всех x всякий раз, как мы находимся в случае приведения. Но эта функция должна быть непрерывной функцией периодов; мы будем ее знать поэтому во всех возможных случаях. Таким же образом, если непрерывная функция от x известна для всех рациональных

значений переменной, она тут же становится известной и для всех иррациональных значений.

Можно встать еще и на другую точку зрения, чтобы изучить нули Θ -функций. Рассмотрим Θ -функцию двух переменных $\Theta(x, y)$. Пусть $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)$ — два периода этой функции. Запишем уравнение

$$\Theta(\alpha t + \gamma u, \beta t + \delta u) = 0,$$

где t и u — числа, подчиненные условиям быть вещественными и оставаться в границах между 0 и 1. При таком условии это уравнение будет допускать некоторое число решений. Я буду, из-за соображений, которые здесь не место приводить, различать два вида решений. Пусть тогда N_1 — число решений первого вида, T_1 — сумма соответствующих значений t , U_1 — сумма значений u . Пусть N_2, T_2 и U_2 — аналогичные величины, относящиеся к решениям второго вида. Можно попробовать определить числа $N_1 - N_2, T_1 - T_2, U_1 - U_2$.

Достаточно просто [86] мне удалось определить число $N_1 - N_2$. Этим мы получаем полезные сведения об общем числе решений $N_1 + N_2$. В самом деле, это число всегда больше $N_1 - N_2$ и имеет ту же четность.

К тому же результату можно прийти через использование двойных интегралов, взятых в мнимых пределах. Я имею надежду, что это соображение даст нам и числа $T_1 - T_2$ и $U_1 - U_2$.

Наконец, вопрос можно поставить еще и другим способом. Пусть дана специальная Θ -функция от p переменных, порожденная алгебраической кривой рода p

$$F(x, y) = 0.$$

Пусть $u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_p(x, y)$ — p абелевых интегралов 1-го вида. Для краткости я буду писать $\Theta(v_i)$ вместо $\Theta(v_1, v_2, \dots, v_p)$ и $u_i(x)$ вместо $u_i(x, y)$ и рассмотрю pq констант e_{ik} , где индекс i меняется от 1 до p , а индекс k — от 1 до q . Возьмем тогда q уравнений

$$\Theta(u_i(x_1) + u_i(x_2) + \dots + u_i(x_q) - e_{i1}) = 0,$$

$$\Theta(u_i(x_1) + u_i(x_2) + \dots + u_i(x_q) - e_{i2}) = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Theta(u_i(x_1) + u_i(x_2) + \dots + u_i(x_q) - e_{iq}) = 0,$$

где $x_1, x_2, \dots, x_q$ — неизвестные. Сколько из этих уравнений имеют решения? Эту задачу я решил простой формулой [98]; случай $q = p$ сводится к тому, о котором я говорил выше, а случай $q = 1$ есть как раз случай Римана.

XI. Различные функции [42, 91, 94]. Фуксовы функции — это функции одной переменной, не изменяемые при некоторых линейных подстановках. Мы приходим естественно к следующей задаче: построить однозначные функции двух переменных, которые не изменяются при некоторых

линейных подстановках. Как известно, полного успеха добился здесь Пикар с помощью введения гиперфуксовых функций.

Первая задача, которую тут нужно решить, состоит, очевидно, в том, чтобы найти разрывные группы, содержащиеся в линейной группе от двух переменных. Пикару удалось построить большое их число с помощью арифметических рассматриваний. Я сам [24] доказал существование двух классов этих групп. Первый класс включает подобные подстановки квадратичных тернарных неопределенных форм, когда коэффициенты этих форм и подстановок являются целыми комплексными. Второй класс существенно не отличается от фуксовых групп.

Если, действительно, z обозначает мнимую переменную

$$z = \xi + i\eta$$

и если положить

$$x = \frac{2\xi}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \quad y = \frac{2\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2},$$

то всякой фуксовой группе, примененной к z и имеющей в качестве фундаментальной окружности

$$\xi^2 + \eta^2 = 1,$$

будет отвечать разрывная группа, примененная к двум переменным x и y . Эта группа разрывна, если x и y мнимы или даже если они вещественны, но при этом

$$x^2 + y^2 < 1;$$

она более не будет собственно разрывной, если x и y вещественны и если

$$x^2 + y^2 > 1.$$

Этим обстоятельством объясняется такой замечательный факт: невозможно наложить на бинарную квадратичную неопределенную форму условия приведения так, чтобы каждый класс содержал единственную приведенную форму.

Но группы этой природы гораздо менее важны, чем собственно гиперфуксовы группы. Я называю так те группы, которые не изменяют гиперсферы

$$xx_0 + yy_0 = 1.$$

(Я обозначаю здесь через x_0 и y_0 мнимые величины, сопряженные с x и y .)

Эта гиперсфера играет в этой теории такую же роль, как фундаментальная окружность в теории фуксовых функций.

Я хотел внести свой вклад в изучение этих групп и начал с занятий самими подстановками. Я выяснил [81], что классификация на эллиптические, гиперболические и параболические подстановки распространялась на гиперфуксовы подстановки.

Классификация фуксовых групп на семейства равным образом применима к гиперфуксовым группам. Если мы оставим в стороне смешанные семейства, то мы будем различать группы первого семейства, в которых содержатся эллиптические подстановки, группы второго семейства, которые не содержат эллиптических, но содержат параболические подстановки, и группы третьего семейства, которые допускают только гиперболические подстановки.

Все группы, ранее открытые Пикаром, принадлежат ко второму семейству, и я отметил существование целой категории групп третьего семейства и соответствующих гиперфуксовых функций, которые отличались многими важными свойствами от уже известных функций.

Здесь мы находимся перед теми же трудностями, что и при построении фуксовых групп. Сначала нужно построить группу так, чтобы соответствующая функция была однозначна в окрестности каждой точки. Затем нужно выяснить, будет ли эта группа действительно разрывна. Первая трудность, очень большая, имеет чисто алгебраический характер. Вторая требует для своего решения употребления рассматриваний, чуждых алгебре. Их можно избежать, если ограничиться группами второго и третьего семейства; напротив, с этой трудностью приходится встретиться, если желаем рассматривать группы первого семейства.

Я справился с нею в случае фуксовых групп с помощью псевдогеометрии Лобачевского; я выяснил, именно, что некоторые инварианты (аналоги того, что Лобачевский называл *длиной* или *поверхностью*) были инвариантами по отношению к любой фуксовой группе. Я спросил себя тогда, будут ли гиперфуксовы подстановки допускать подобные инварианты [42]? Я выяснил, что дело обстоит именно так; тем самым, *всякая группа, для которой соответствующая функция однозначна в окрестности каждой точки, будет разрывна.*

Нахождение фуксовых групп сведено, следовательно, к чистой задаче алгебры; но эта проблема остается крайне трудной, и она была решена Пикаром лишь в одном частном случае. Я пытался обобщать другим образом однозначные трансцендентные функции, которые воспроизводятся при простых подстановках. Я искал, существуют ли однозначные функции с «теоремой умножения», т. е. испытывающие алгебраическое преобразование, когда переменная умножается на постоянный множитель. Я нашел [91, 94], что имеется обширный класс подобных трансцендентных функций. Что здесь интересно, так это способ рассуждения, которым я воспользовался и который можно с пользой применять в различных вопросах, касающихся абелевых функций.

РАЗЛИЧНЫЕ ВОПРОСЫ ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКИ

ХII. Алгебра [125, 126, 81, 127, 121]. К занятиям алгеброй меня привела одна проблема арифметики. Теория арифметических форм и линейных подстановок с целыми коэффициентами, применяемых к этим формам, оказывается глубоко связанной с алгебраическим изучением этих же форм и их линейных подстановок с произвольными коэффициентами.

Таким именно путем я приходил в двух разных случаях к задаче исследования тех алгебраических форм, которые не меняются при заданной линейной подстановке, и непрерывных групп, образованных этими подстановками. Разбив линейные подстановки на четыре категории, обладающие отличными друг от друга свойствами [115, 121], я выяснил, какие тернарные и кватернарные кубические подстановки воспроизводятся при применении данной линейной подстановки или *пучка* подстановок, т. е. группы линейных подстановок, попарно переместимых между собой. Равным образом я решил и обратную задачу, т. е. определил подстановки, которые воспроизводят некоторую заданную кубическую тернарную форму, что было мне необходимо для арифметической цели, которую я тогда имел в виду.

Оставалось найти кубические кватернарные формы, которые не изменяются при различных линейных подстановках, *не переместимых между собой*. Я пришел к этому с помощью метода, который основан на употреблении «скобок Якоби» и который в аналогичной проблеме использовал Софус Ли. Метод этот не ограничен кубическими кватернарными формами и он позволил найти, каковы те поверхности, которые не изменяются при двух гомологичных и не переместимых преобразованиях.

В дальнейшем я распространил эти результаты [125] на общий случай следующим образом. Указав способ образовывать непрерывные группы, содержащиеся в линейной группе от n переменных, я изучил однородные формы в этих переменных, не изменяющиеся при подстановках какой-нибудь одной из этих групп, и нашел, что эти формы удовлетворяют некоторому числу уравнений в частных производных, образующих «полную систему». Наиболее простые из наших непрерывных групп имеют особые свойства, на которые я бегло укажу. Если взять определитель коэффициентов линейной подстановки от n переменных, прибавить S к каждому из членов, стоящих на главной диагонали, и приравнять полученный таким образом определитель нулю, то получится некоторое *уравнение относительно S степени n* .

Непрерывная группа всегда содержит бесконечно много пучков; доказывалось, что если в группе имеется подстановка, приводящая к некоторому уравнению относительно S , то и во всяком пучке группы найдется подстановка, приводящая к тому же уравнению относительно S .

Среди непрерывных групп, о которых я сейчас говорил, наиболее интересны те, которые порождают системы комплексных чисел с некоммутативным умножением (каковы, например, кватернионы). Я доказал, что все уравнения от S для подстановок из этих групп имеют кратные корни.

Я вернулся потом к этим особым группам [127]. Исследования Сильвестра относительно матриц привлекли тогда вновь внимание ученых к комплексным числам. Можно было спросить, имеются ли другие системы, кроме этих матриц и их комбинаций. Я показал, что имеются еще и другие классы, среди которых я отметил «тернионы».

Я отнесу к этим моим алгебраическим занятиям заметку [126], где я объявил результат, аналогичный одной важной теореме Лагерра. Пусть дано алгебраическое уравнение с p положительными корнями; я доказал, что всегда можно умножить его первый член на полином, выбранный так, чтобы произведение имело лишь p вариаций. Среди всех полиномов, удовлетворяющих этому условию, очевидно, имеется такой, который имеет минимальную степень; но я не смог найти его, за исключением отдельных частных случаев.

XIII. Непрерывные группы [60, 61]. Как я сказал, исследования в алгебре привели меня к занятиям непрерывными группами. На этом пути я заметил [127] связь, которая существует между этими группами и комплексными числами: я высказал здесь теорему, доказательства которой, занявшись другими работами, я не смог опубликовать, но которая была затем доказана Штуди.

Равным образом я воспользовался непрерывными группами в одной работе, относящейся к неевклидовой геометрии [402]. Но лишь гораздо ближе к нынешнему времени я подступился к общей теории этих групп.

Ли доказал по поводу этих групп три фундаментальные теоремы. Согласно третьей из них, всегда существует группа, которая допускает уравнения заданной структуры, лишь бы эти уравнения удовлетворяли условиям Якоби.

Ли дал два доказательства этой теоремы. Первое применимо лишь к группам, которые не содержат подстановки, переместимой со всеми другими подстановками. Оно не оставляет желать ничего лучшего с точки зрения простоты. Второе применяется ко всем группам; оно гораздо менее прямо и сложнее.

Я поставил себе целью дать этой третьей теореме прямое и простое доказательство, применимое во всех случаях. Я преуспел в этом [60, 61], благодаря использованию очень краткой символики.

Я должен сказать несколько слов о характере этого доказательства. Я старался получить из данных структурных уравнений, т. е. правил композиции инфинитезимальных подстановок, правила композиции конечных подстановок. Эти правила, однако, выражаются бесконечными рядами, и я установил, что эти ряды суммируются формулами, в которые не входят другие трансцендентные величины, кроме экспонент.

Я встал, таким образом, на формальную точку зрения, введя формулы, которые, будучи полностью абстрагированы от «материи» группы, одинаково применимы ко всем изоморфным группам. Но сами эти формулы дают нам подстановки, которым подвергаются параметры, определяющие подстановку группы, когда эту подстановку сравнивают с какой-нибудь одной подстановкой той же группы. Эти преобразования сами образуют группу, изоморфную той, которую предполагали образовать; эта группа носит название параметрической группы.

Наши формулы, следовательно, позволяют нам эффективно образовывать параметрическую группу. Таким образом, они не только доказывают существование группы с данной структурой, но и дают средство для ее эффективного построения. Ли показал, что образование подобной группы можно осуществить посредством интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Я выяснил, что не только можно построить инфинитезимальные подстановки без интегрирования, но что в самом благоприятном случае можно также и получение конечных подстановок свести к простым квадратурам. В частном случае, к которому применимо первое доказательство Ли, получающиеся формулы достаточно просты, однако менее просты, чем у Ли. Во всяком случае, это разные формулы, и не видно сразу, как можно перейти от одних к другим. Сравнение формул этих двух видов оказывается тем более поучительным. Оно дает нам возможность вновь вывести некоторые из теорем Киллинга. Изучение полученных формул приводит, впрочем, к этим же теоремам также и в общем случае.

XIV. Алгебра бесконечного [128, 132, 137]. Различные рассуждения привели меня к обобщению теории определителей и приемов, которыми решают n линейных уравнений с n неизвестными.

В некоторых вопросах анализа приходится рассматривать систему соотношений, на которую можно смотреть как на бесконечную систему линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных.

Пусть система из данных чисел образует бесконечную таблицу с двумя входами. Я обозначу общий член этой таблицы через

$$a_{np} \quad (n, p = 1, 2, \dots, \infty).$$

Задача состоит в том, чтобы определить бесконечную систему чисел

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

таким образом, чтобы ряды

$$S_p = \sum_{n=1}^{\infty} a_{np} x_n \quad (p = 1, 2, \dots, \infty)$$

сходились абсолютно и имели бы суммой нуль.

Эти линейные уравнения, которые можно записать в виде

$$\sum_n a_{np} x_n = 0,$$

встречаются, в частности, при следующих обстоятельствах:

- 1) когда ищется частное двух тригонометрических рядов;
- 2) когда при интегрировании линейных дифференциальных уравнений, коэффициентами которых служат тригонометрические ряды, пытаются удовлетворить им при помощи других тригонометрических рядов.

Эта последняя задача встречается в небесной механике.

До последнего времени не занимались тем, при каких условиях обычные вычислительные правила могли бы быть применимы к подобным уравнениям. Однако два ученых, встретившись с этой проблемой в двух различных областях исследования, без колебаний употребили обычные правила алгебры.

Один из них — это Аппель, который пришел к уравнениям вида, который мы рассматриваем, пытаясь разложить эллиптические функции в тригонометрические ряды. Обращаясь с ними по правилам конечного, он пришел к формулам, согласующимся с хорошо известными результатами, к которым приводят другие методы.

С другой стороны, Хилл, желая определить движение перигея Луны, также применил в задаче, которая нас интересует, обычные приемы алгебры. Однако число, к которому он пришел, слегка отличается от наблюдаемого; это слабое расхождение получается просто из-за наклона орбиты, которым Хилл пренебрег.

Итак, смелость Аппеля и Хилла оказалась счастливой, но она оправдывается лишь успехом. Тем не менее этот успех сам по себе должен был заставить желать рационального изучения вопроса.

Такое изучение я и предпринял в двух коротких заметках, помещенных в «Bulletin de la Société mathématique de France» [128, 132]. Мне удалось строго доказать, что уравнения, рассмотренные Аппелем и Хиллом, на самом деле допускают решения, найденные этими авторами. Но они допускают в то же время и бесконечно много других; они следовательно, недостаточны, чтобы определить неизвестные. Аппель, так же, как и Хилл, пытался вычислить коэффициенты некоторого ряда. Эти коэффициенты должны не только удовлетворять рассматриваемым уравнениям, они еще должны быть такими, чтобы ряд был сходящимся. Но среди бесконечного числа решений, которые допускаются уравнениями, оказывается только одно, которое удовлетворяет этому второму условию, и это в точности уравнение авторов, которых я сейчас упоминал.

Это именно обстоятельство и объясняет успех, полученный обоими геометрами; их метод находится теперь вне всяких возражений, но легко видеть, что рассматривания, на которые они ссылались, недостаточны, чтобы этот метод обосновать.

Я скажу теперь о приемах, которые привели меня к этим результатам. Я начал с того, что занялся частным случаем, где

$$a_{np} = a_n^p,$$

и я выяснил, что решение задачи зависело от разложения мероморфной функции

$$\frac{1}{f(z)}$$

на простые дроби, где $f(z)$ обозначает трансцендентную целую функцию, нулями которой служат числа a_n .

Равным образом я выяснил, что аналогичные рассматривания можно использовать и в общем случае.

Наконец, я встретился с фактом этой теории действительно неожиданным и совершенно особым. Наши равенства

$$\sum a_{np} x_n = 0,$$

которых бесконечное число, могут быть заменены на бесконечное число неравенств. Действительно, для того чтобы числа x_n удовлетворяли этим уравнениям, достаточно, чтобы некоторые ряды, которые от них зависят, были сходящимися.

В изучении этого вопроса естественно приходят к рассмотрению определителей бесконечного порядка. Для этого выписывают таблицу величин a_{np} , образуют определитель из n первых строк и n первых столбцов и заставляют n неограниченно возрастать. Удобно допустить, что

$$a_{nn} = 1.$$

Нужно затем выяснить, при каких условиях подобный определитель сходится. Я нашел для этих определителей правило сходимости, представляющее самую полную аналогию с правилом, касающимся бесконечных произведений.

Но в том, что касается приложения метода Хилла к небесной механике, все трудности еще не были преодолены. Определитель Хилла зависит от одного параметра. Нужно было доказать сначала, что он дает целую функцию от этого параметра, а затем, что эта функция сводится к косинусу. Мне удалось это получить [190, гл. XVII], применяя те же принципы, но при первоначальном подходе было необходимо определить род этой целой функции и мне пришлось воспользоваться теоремами Адамара, упомянутыми выше (гл. VI). Я счел необходимым вернуться [137] к вопросу с целью избежать этот обходный путь и значительно упростил свое первое доказательство.

XV. Арифметика [114, 115, 116, 118, 123, 124, 129, 131, 117, 122, 133, 130, 119, 120, 53, 134, 135]. Мои арифметические исследования касались почти исключительно теории форм. Я начинаю с изложения результатов, которые получил о квадратичных формах.

Известно [117], что определенная квадратичная форма

$$ax^2 + 2bx + cy^2, \quad D = b^2 - ac < 0$$

представляется решеткой параллелограммов, вершины которых имеют координаты

$$x\sqrt{a} + y\frac{b}{\sqrt{a}}, \quad y\sqrt{\frac{-D}{a}}$$

или же

$$ax + by, \quad y\sqrt{-D}.$$

Этот способ представления нельзя распространить на неопределенные формы. Поэтому я представляю квадратичные формы решеткой, вершины которых имеют координатами

$$ax + by, \quad y$$

— способ представления, одинаково применимый и к определенным и к неопределенным формам.

Я выяснил сначала, что такие решетки параллелограммов обладают свойствами, аналогичными свойствам чисел, и наметил арифметику решеток, где встречаются с теориями, аналогичными теориям делимости, общего наибольшего делителя и наименьшего общего кратного и даже простых чисел.

Мой способ представления неопределенных форм привел меня к новому определению приведения этих форм. Единственное условие приведения состоит в том, чтобы крайние коэффициенты были противоположных знаков. С таким определением непрерывное приведение неопределенной формы допускает очень простую геометрическую интерпретацию. Я представляю форму некоторым треугольником T , который, впрочем, является всего лишь фундаментальным треугольником нашей решетки параллелограммов. Если форма приведена, то из двух прямых $y = \pm x\sqrt{D}$ одна пересекает треугольник T , другая остается внешней по отношению к нему. Построим параллелограмм, половиной которого является наш треугольник, и разобьем его снова на два треугольника другой диагональю; из этих двух новых треугольников один и только один будет пересечен одной из прямых $y = \pm x\sqrt{D}$. Этот треугольник представит приведенную форму, смежную к той, которая представлена треугольником T . Продолжая неограниченно, приходим к ряду треугольников, который представляет последовательное приведение рассматриваемой формы.

Вместо прямых $y = \pm x\sqrt{D}$ можно рассматривать две произвольные прямые, проходящие через начало. Применяя тот же прием к этим двум

прямым, находим геометрическое представление последовательных подходящих дробей непрерывной дроби. Естественным образом возникают немедленные обобщения. Действительно, перейдем от плоскости к пространству и заменим нашу решетку решеткой Браве и вместо двух прямых проведем через начало три. Те же рассуждения снова будут применимы, и этим путем приходят к некоторому обобщению непрерывных дробей, которому я посвятил заметку [129], но которое, к сожалению, не дает быстрой аппроксимации.

Мне остается, чтобы закончить анализ моего мемуара о квадратичных формах [117], отметить два результата.

Я вновь получил в процессе изучения этого геометрического представления закон композиции форм, доказанный Гауссом.

Наконец, я завершаю мемуар изучением идеальных чисел, происхождение которых лежит в бинарных квадратичных формах.

Известно, что когда алгебраическую форму подвергают произвольной линейной подстановке, остаются неизменными некоторые функции коэффициентов, это ее *инварианты*. Помимо этих *алгебраических* инвариантов, изучение которых было продвинуто очень далеко, имеются, как я это доказал [114, 119], другие функции коэффициентов, которые изменяются, когда к форме применяют подстановку с дробными или иррациональными коэффициентами, но которые, напротив, воспроизводятся, когда ее подвергают подстановке с целыми коэффициентами. Это *арифметические* инварианты. Линейные бинарные формы, которые не имеют алгебраических инвариантов, имеют, напротив, арифметические инварианты, изучение которых связано с теорией эллиптических функций и также с теорией модулярных функций и фуксовых функций. Эти инварианты можно использовать для решения двух следующих задач:

1) найти наименьшее число, представимое квадратичной бинарной неопределенной формой;

2) выяснить, будут ли две бинарные неопределенные квадратичные формы эквивалентными.

Для этого каждую из форм разлагают на два линейных множителя и в предположении, что формы эквивалентны, коэффициенты подстановки, которая позволяет перейти от одной из них к другой, выражают в виде функции от инвариантов этих сомножителей. Легко затем усмотреть, будут ли полученные таким образом коэффициенты целыми и позволяют ли они в действительности перейти от одной формы к другой. В случае, если это не так, можно быть уверенным, что эквивалентность не имеет места.

Бинарные квадратичные формы, определенные или неопределенные, одинаково обладают арифметическими инвариантами; я изучал их свойства. Для того чтобы две формы были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы все их инварианты были равны. Однако чтобы быстрее выяснить эквивалентность, предпочтительно разложить каждую форму на линейные множители и рассмотреть инварианты этой системы линейных форм.

Все эти инварианты могут быть выражены: 1) определенными интегралами, 2) рядами.

Одна из наиболее важных проблем, которая возникает в изучении тернарных квадратичных неопределенных форм, — это изучение свойств разрывных групп, образованных «подобными подстановками», т. е. линейными подстановками, которые не изменяют эти формы [120, 131]. Пусть $F(x, y, z)$ — неопределенная квадратичная форма. Можно выбрать такую константу K , чтобы уравнение $F(x, y, z) = K$ представляло двуполостный гиперболоид. Подобные подстановки переведут тогда точку этого гиперболоида в другую на той же полости, и так как группа разрывна, гиперболоид окажется подразделенным на бесконечное число криволинейных многоугольников, стороны которых будут диаметральными сечениями поверхности. Подобные подстановки переводят эти многоугольники один в другой. Рассмотрим теперь поверхность в перспективе, поместив глаз в омбилическую точку и приняв за плоскость проекции плоскость, секущую поверхность по окружности. Полость гиперболоида спроектируется в круг, а многоугольники, которые мы построили на поверхности, спроектируются в криволинейные многоугольники, ограниченные дугами окружностей, в точности восстанавливая нам картину, о которой мы уже говорили (стр. 586 и следующие) по поводу теории фуксовых групп. Таким образом, изучение групп подобных подстановок квадратичных форм приводится к изучению фуксовых групп, что является неожиданным сближением между совершенно различными теориями и новым применением неевклидовой геометрии.

Отметив ряд свойств этих частных фуксовых групп, я приступил к несколько иному вопросу.

Подобные подстановки — это подстановки, которые воспроизводят некоторую квадратичную форму, и в то же время принадлежат группе G подстановок с целыми коэффициентами. Можно искать тогда подстановки, которые воспроизводят квадратичную форму и в то же время принадлежат какой-либо другой группе, например подгруппе группы G . Это позволяет нам в то же время обобщить теорию эквивалентности форм и их приведения.

Легко получаются группы этих обобщенных подобных подстановок и выясняется, что это все еще фуксовы группы. Размышляя далее над соотношениями этих различных фуксовых групп, я доказал, что соответствующие фуксовы функции обладают свойствами, аналогичными теореме сложения для эллиптических функций, что неверно для общих фуксовых функций.

Перейдем теперь к формам порядка, большего двух [122]. Первая проблема, которую тут приходится решать, — это приведение этих форм и изучение условий их эквивалентности. Решение было найдено Эрмитом; хотя ученый-геометр говорил лишь о бинарных формах и квадратичных формах, его метод применяется без того, чтобы в нем нужно было что-либо менять, к совершенно произвольной форме. Этим именно путем Жордан, распространяя на очень общий случай теорему Эрмита, доказал,

что всякий раз, когда дискриминант не нуль, все формы, которые имеют те же алгебраические инварианты, разбиваются на конечное число классов. Я сам обобщил теорему Жордана, доказав, что она продолжает выполняться, лишь бы некоторые инварианты не обращались в нуль все сразу.

Я пытался далее применить общий метод к кубическим тернарным формам, которые я уже изучал с алгебраической точки зрения в предыдущем мемуаре. Я пришел к отысканию верхней границы коэффициентов приведенной формы, инварианты которой даны, когда дискриминант не обращается в нуль. Число классов тогда ограничено, и в каждом классе имеется лишь одна приведенная форма.

Когда форма, приравненная нулю, представляет кривую четвертого класса, дискриминант равен 0, и имеется бесконечно много классов, но каждый из них содержит лишь одну приведенную форму. Если кривая третьего класса, число классов бесконечно и каждый содержит конечное число приведенных, которые образуют *ограниченную цепь с двумя концами*. Если кривая разбивается на конику и прямую, которая ее пересекает, число классов бывает иногда конечным, иногда бесконечным; более того, цепь, образованная приведенными формами того же класса, может быть незамкнутой, как в предыдущем случае, но может быть и замкнутой, так что приведенные формы воспроизводятся здесь периодически. Если, наконец, прямая касается коники, то приведенные формы образуют не цепь, а решетку.

Тот же метод я применил далее не к одной только форме, а к системе форм, и как пример я выбрал систему из одной квадратичной тернарной формы и одной линейной формы [116, 133] и изучил их одновременное приведение. Непрерывное приведение подобной системы вполне аналогично приведению единственной формы. Оно также может служить для определения подобных подстановок системы. Эти подобные подстановки всегда существуют, но, желая в частном примере вычислить коэффициенты наиболее простой из них, я получил целые числа из более чем пяти знаков.

Законы приведения произвольной квадратичной формы известны, и поэтому легко выяснить для двух форм, эквивалентны ли они, но это лишь первый шаг. Главная проблема в том, чтобы узнать, может ли данное число быть представлено данной формой. Я специально занимался представлением посредством бинарной формы [118, 130]. Приравнивая форму нулю, получают из нее некоторое значение для отношения x/y . Образует с этим значением систему комплексных и идеальных чисел. Проблема представления чисел формами сводится к нахождению идеалов с заданной нормой. Я дал, основываясь на тех же принципах, что и в моем мемуаре, озаглавленном «О новом способе геометрического представления квадратичных форм», способы получения всех идеалов с нормой N , всех простых идеалов и их степеней, умножения двух идеалов, разложения идеала на простые делители и т. д. Для этого я рассматриваю некоторое сравнение, которое я разлагаю на неприводимые сомножители. Каждому из этих неприводимых сомножителей отвечает идеал.

Все представления данного числа находятся, когда можно найти идеалы, норма которых есть данное число, но не все из этих идеалов приводят к представлению числа. Важно было бы поэтому уметь различать а priori, каковы те идеалы, которые приведут к подобному представлению. Все, что я смог сделать в этом направлении, это показать, что все они должны находиться среди идеалов, которым отвечает неприводимый *линейный* сомножитель сравнения, о котором я выше говорил (и, следовательно, *вещественный* корень этого сравнения).

В двух заметках, которые я имел честь представить Академии 9 и 16 января 1882 года, я исследовал, каково было истинное значение понятия рода, определенное Гауссом для квадратичных бинарных форм и распространенное Эйзенштейном на квадратичные тернарные формы, и я пришел к тому, чтобы ввести следующие определения:

1. Две формы эквивалентны относительно модуля n , если к первой из этих форм можно применить подстановку с целыми коэффициентами так, что коэффициенты полученной таким образом преобразованной формы будут отличаться от коэффициентов второй формы лишь на кратное n .

2. Две формы имеют тот же род, когда они эквивалентны относительно любого модуля.

Ясно, что это определение может быть применено к совершенно произвольным формам, и я распространил равным образом на них также и понятие *порядка*. Я применил эти принципы к квадратичным кватернарным формам и кубичным бинарным.

В другом круге идей я пытался распространить элегантный метод Чебышева на изучение распределения простых чисел. Я выяснил, что он может быть применен почти без изменения к комплексным числам вида $a + b\sqrt{-1}$ [134, 135]. С точки зрения вещественных чисел это позволяет сравнивать распределение простых чисел вида $4n+1$ с распределением простых чисел вида $4n+3$.

XVI. Analysis situs [155, 156, 158, 157, 159, 160]. *Analysis situs* есть наука, которая позволяет нам узнавать *качественные* свойства геометрических фигур не только в обычном пространстве, но также и в пространстве более трех измерений. *Analysis situs* в трех измерениях является для нас познанием почти интуитивным; напротив, *Analysis situs* в более чем трех измерениях представляет громадные трудности, и чтобы начать пытаться их преодолевать, нужно быть очень убежденным в крайней важности этой науки.

Если эта важность не всеми понята, то это потому, что об этом недостаточно размышляли. Но пусть подумают о преимуществах, которые аналитики извлекли из геометрических представлений даже в вопросах чистого анализа и арифметики, пусть оценят облегчение, которое принесли эти методы умам исследователей. Как приходится сожалеть, что этот удивительный инструмент остается без употребления, как только число измерений превосходит три.

Риман, который дал этому инструменту всем известное употребление, хорошо понимал, как было бы важно дальнейшее развитие, и в его бумагах остались несколько заметок, к сожалению довольно бесформенных, которые еще сегодня служат основой наших знаний об *Analysis situs* в более чем трех измерениях.

Сказано, писал я (примерно этими словами) в одном предисловии [157], что геометрия есть искусство хорошо рассуждать над плохими чертежами. Да, без сомнения, но при одном условии. Пропорции фигуры могут быть грубо изменены, но их элементы не должны быть смещены и должны сохранять свое взаимное расположение. Другими словами, не нужно заботиться о количественных свойствах, но нужно сохранять качественные свойства, т. е. именно те, которыми занимается *Analysis situs*.

Это должно дать нам понимание того, что метод, который дал бы нам возможность представить себе качественные соотношения в пространстве более чем трех измерений, оказал бы услуги, аналогичные тем, какие оказывают нам чертежи. Таким методом может быть лишь *Analysis situs* более чем трех измерений.

Однако эта ветвь науки до сих пор мало культивировалась. После Римана пришел Бетти, который ввел некоторые фундаментальные понятия, но за Бетти уже не последовал никто.

Что касается меня, то все различные пути, на которых я последовательно находился, приводили меня к *Analysis situs*. Данные этой науки мне были нужны для проведения исследований о кривых, определяемых дифференциальными уравнениями (*vide supra* раздел V) и для распространения их на дифференциальные уравнения высшего порядка, в частности, относящиеся к проблеме трех тел. Они мне были нужны для изучения многозначных функций двух переменных. Они мне были нужны для изучения периодов кратных интегралов и для применения его результатов к разложению пертурбационной функции.

Наконец, в *Analysis situs* мне виделось средство для подхода к важной проблеме теории групп: отысканию дискретных или конечных групп, содержащихся в данной непрерывной группе.

Исходя из всех этих соображений, я посвятил этой науке довольно длинную работу [155, 156, 157]. Я начинаю с нескольких определений многообразия в пространстве более чем трех измерений и с введения фундаментального понятия гомеоморфизма, которое есть отношение между двумя многообразиями, не различающимися с точки зрения их качественных свойств.

Я пришел затем к различению двусторонних многообразий, аналогичных обычным поверхностям, и односторонних многообразий, которые аналогичны односторонним поверхностям.

Бетти открыл некоторые целые числа, относящиеся к многообразиям; аналоги того, что для обычных поверхностей называют порядком связности. Известно, что порядок связности замкнутой поверхности зависит

от числа дыр, которые в ней проделаны, причем этот порядок всегда нечетен: 1 для сферы, 3 для тора и т. д. Равным образом известно, какие соотношения имеются между родом алгебраической кривой и порядком связности соответствующей римановой поверхности.

Я показал, что если выписать ряд чисел Бетти для замкнутого многообразия, то числа, равноотстоящие от концов, будут равны.

Хегор привлек мое внимание к некоторым примерам, где эта теорема казалась несправедливой, и я вернулся к этому вопросу в другой работе [159]. Определение, которое я дал числам Бетти, не всегда согласовывалось с тем, которое дал этим числам сам Бетти.

Теорема, верная для чисел Бетти, как я их определил, оказывалась не всегда верной для чисел, которые определил сам Бетти.

Известно, что порядок связности достаточен, чтобы определить обычную поверхность с точки зрения *Analysis situs*, т. е. две поверхности, которые имеют тот же порядок связности, будут гомеоморфны. Можно было предположить, что для определения многообразия достаточно чисел Бетти. Я показал [157], что это не так, что каждому многообразию отвечает группа, необходимая для определения этого многообразия, и что одной и той же последовательности чисел Бетти не всегда отвечает та же самая группа.

Я счел необходимым умножить число примеров, думая, что это есть лучшее средство ознакомления умов со столь новыми идеями.

Известно, что Эйлер доказал некоторое соотношение между числом граней, ребер и вершин выпуклого полиэдра. Для невыпуклых полиэдров имеется аналогичное соотношение между этими тремя числами и порядком связности. Существуют ли соотношения того же вида между этими элементами полиэдров в пространствах более чем трех измерений? Такой вопрос я поставил себе [157] и решил его утвердительно, дав несколько различных доказательств. Нужно заметить, что если число измерений пространства четно, то это соотношение не зависит от чисел Бетти, и, напротив, оно зависит от него, если число измерений нечетно.

Эти теоремы о полиэдрах имеют достаточно большую общность, так как произвольное замкнутое многообразие всегда может быть подразделено на полиэдры; прямолинейные или криволинейные, это не имеет значения с точки зрения *Analysis situs*. В моих последних работах [159, 160] я вообще нашел более удобным считать это разбиение на полиэдры выполненным с самого начала.

Между фигурами, построенными на многообразии, и в частности, между элементами полиэдра возможны несколько видов соотношений, которые доступны алгебраическому представлению символическими уравнениями и дальнейшему комбинированию по правилам алгебры или по аналогичным правилам. Я назвал эти соотношения конгруэнциями, гомологиями, эквивалентностями. Конгруэнции выражают либо то, что множество таких-то элементов составляет замкнутое многообразие, либо, напротив, что это множество представляет собой открытое многообразие,

полная граница которого образована множеством таких-то других элементов.

Фундаментальные гомологии выражают, что множество таких-то элементов составляет замкнутое многообразие, являющееся полной границей другого многообразия, которое должно иметь одним измерением больше, но которое остается неопределенным. Производные гомологии выводятся из гомологий фундаментальных, но важно отличать те из них, которые выводятся посредством сложения и умножения от тех, которые выводятся также посредством деления.

Эквивалентности отличаются от гомологий тем, что в них не разрешается менять порядок членов. Именно рассмотрение этих эквивалентностей и приводит к группе, о которой я говорил выше.

Все эти соотношения представляются в форме линейных уравнений с целыми коэффициентами. Изучение многообразия оказывается, таким образом, сведенным к изучению таблиц, составленных из целых чисел. Эти таблицы очевидным образом меняются в зависимости от способа, которым разрезано на полиэдры многообразие, но, однако, все эти получаемые таким путем таблицы сохраняют некоторые общие характеристики, которые можно назвать инвариантами и которые остаются теми же, каким бы образом многообразие ни было подразделено. Этими инвариантами служат наибольшие общие делители некоторых определителей, образованных из элементов таблиц.

Благодаря этому арифметическому представлению, легче следить за доказательствами, и я смог добавить различные результаты к тому, что уже было получено. Например, для того чтобы два определения чисел Бетти совпадали, необходимо и достаточно, чтобы все инварианты равнялись 0 или 1, или же, чтобы система гомологий, полученных посредством делений, не содержала те, которые нельзя получить без деления, или же, наконец, чтобы полиэдр не был скручен, т. е. чтобы все многообразия, которые можно образовать с помощью его элементов, были бы двусторонними.

Ч е т в е р т а я ч а с т ь

НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

XVII. Общие соображения об уравнениях динамики и небесной механики [225, 226, 214, 229, 189, 191]. Уравнения динамики замечательны своими свойствами, которые наглядно были показаны Якоби в его «Vorlesungen».

Каковы более или менее немедленные следствия этих свойств? Что можно извлечь из них для представления уравнениями проблем динамики и, в частности, проблем небесной механики? Таков первый вопрос, о котором я хочу здесь говорить.

Мне приходилось давать общий обзор главных свойств канонических уравнений [214, 189]. Эти свойства классические; мне пришлось лишь улучшить детали, пользуясь хорошо известным признаком, который позволяет узнать, сохраняет ли замена переменных каноническую форму уравнений.

Этот вид преобразований облегчает представление уравнением проблемы трех тел; это я и показал [225, 229]. Известно, что в классическом приеме все планеты приводят к подвижным осям, проходящим через Солнце. Неудобство здесь состоит в том, что пертурбационная функция не является одной и той же для всех планет. Другой прием состоит в отношении каждой планеты к центру тяжести системы, образованной Солнцем и всеми планетами, меньшими той, которую рассматривают. Неудобство этим избегается, но пертурбационная функция становится несколько сложнее. Я предложил третий прием, при котором координаты каждой планеты относятся к Солнцу, а ее скорость — к неподвижным осям.

Несмотря на работы, предметом которых, начиная с Якоби, были канонические уравнения, еще не все их свойства известны, или, скорее, не настаивали на рассмотрении всех форм, которые могут принять эти свойства и знать которые может оказаться полезным. Если, например, изучают уравнения в вариациях уравнений динамики, т. е. уравнения, которые определяют решение, отличающееся бесконечно мало от данного решения, то встречаются с важными предложениями, к которым я привлек внимание [214, 189].

С другой стороны, я был вынужден ввести новое понятие — интегральные инварианты [214, 191]. Это некоторые определенные интегралы, простые или кратные, которые остаются постоянными, когда область интегрирования меняется согласно некоторому закону, определенному дифференциальным уравнением. Если, например, рассматривают дифференциальное уравнение движения несжимаемой жидкости, интегральным инвариантом служит объем.

Канонические уравнения динамики обладают замечательными интегральными инвариантами, и существование этих инвариантов проливает яркий свет на их свойства.

Чтобы покончить с этими общими положениями об уравнениях динамики проблемы трех тел, отмечу одну последнюю работу [226]. Как известно, Брунс доказал, что проблема трех тел не допускает других алгебраических инвариантов, кроме классических интегралов. К сожалению, в его доказательстве содержался большой пробел, восполнить который было делом деликатным. Я был счастлив поставить прекрасное и искусное доказательство Брунса вне всяких возражений.

XVIII. Проблема трех тел; качественные свойства [200, 204, 181; 182, 214, 216, 189, 191]. Последующее есть естественное развитие методов, о которых шла речь выше в разделе V, и их приложение к небесной механике.

Я показал различными путями [214, 189], что помимо классических интегралов проблема трех тел не допускает аналитического и однозначного интеграла, и отсюда получается, что большая часть рядов, предложенных до сих пор для интегрирования этой проблемы, также как и для той, о которой речь будет в следующем разделе, не являются сходящимися и не могут использоваться в приближенных вычислениях.

Согласно предыдущему, кажется, что вообще невозможно выразить взаимные расстояния звезд чисто тригонометрическими сходящимися рядами. Но имеются частные случаи, где приходят к рядам лишь от одного аргумента, сходимость которых очевидна. Действительно, я доказал [200, 204], что в проблеме трех тел возможно выбрать начальные элементы движения таким образом, чтобы взаимные расстояния трех масс были периодическими функциями времени. Тем самым приходят к частному решению проблемы, которое можно назвать *периодическим*.

Эти периодические решения бывают трех видов: в одних наклонения нулевые, а эксцентриситеты очень малы; в других наклонения нулевые, а эксцентриситеты конечны; в третьих, наконец, наклонения конечны, а эксцентриситеты очень малы.

Я вернулся [214, 189] к этим периодическим решениям и изучил их в деталях. Приемы, которыми я пользовался, чтобы доказать их существование, очень просты и сводятся к методу мажорант.

Но к этому доказательству можно прийти совсем другим путем, который, вероятно, часто будет полезным, но всю возможную пользу которого я еще не смог извлечь. Допустим, например, что ищутся геодезические на какой-либо поверхности, общий вид которой представлен однополостным гиперболоидом. Можно быть тогда уверенным, что должна быть замкнутая геодезическая (отвечающая периодическому решению), потому что среди всех замкнутых кривых, которые можно провести на поверхности и которые обходят ее, должна быть одна, более короткая, чем другие.

Те же принципы пригодны для применения к различным проблемам механики, благодаря принципу наименьшего действия, который можно брать либо в форме, приданной ему Гамильтоном, либо в форме, приданной ему Мопертюи. Я дал лишь набросок этого метода, из которого без сомнения еще многое можно извлечь.

Кроме периодических решений, уравнения проблемы трех тел допускают также и другие замечательные решения, которые я называю асимптотическими [214, 189]. Эти решения характеризуют то, что они бесконечно приближаются к периодическому решению или же что они бесконечно удаляются от периодического решения, к которому они бесконечно приближаются при $t = -\infty$.

Другие замечательные решения труднее заметить [191]. Я укажу сначала периодические решения второго вида, характеризуемые тем фактом, что два тела периодически сближаются почти до столкновения.

Мы имеем еще решения второго рода; если заставить непрерывным образом меняться один из параметров, от которых зависит проблема, например одну из масс, мы увидим, как периодическое решение первого рода меняется непрерывным образом, причем его период остается равным T . В некоторый момент это решение удваивается, так сказать, или скорее утраивается; я хочу сказать, что в некоторый момент оказывается три периодических решения, очень мало отличающихся друг от друга; одно из них имеет еще период T , а два других имеют периодом некоторое кратное T . Это периодические решения второго рода.

Наконец, я скажу о решениях дважды асимптотических. Для $t = -\infty$ они бесконечно близки к периодическому решению, затем они далеко удаляются от него и потом снова приближаются, так что при $t = +\infty$ они опять бесконечно близки к нему.

Чтобы изучать свойства и связи этих различных решений, я воспользовался интегральными инвариантами. Эти связи очень сложны, и это изучение в высшей степени отвечает задаче выявления трудностей проблемы трех тел.

Я не смог строго и полно решить проблему устойчивости Солнечной системы, понимая это слово в математическом смысле. Использование интегральных инвариантов позволило мне, однако [214, 191], добиться частных результатов, применимых в особенности к проблеме, называемой ограниченной, где два главных тела циркулируют по орбитам без эксцентриситетов, а возмущаемое тело имеет пренебрежимо малую массу. В этом случае, если оставить в стороне некоторые исключительные траектории, реализация которых маловероятна, можно доказать, что система бесконечное число раз вернется сколь угодно близко к своему начальному положению. Это я назвал устойчивостью по Пуассону.

XIX. Проблема трех тел; приближенные разложения и приложения [203, 208, 211, 218, 221, 223, 224, 214, 230, 237, 241, 137, 242, 190]. Все теоремы, о которых шла речь в предыдущем разделе, имеют общую черту:

они выполнены строго. Те же, о которых я буду говорить теперь, являются лишь приближенными и, следовательно, будут иметь прежде всего практический интерес. И это, кстати, единственные теоремы, которые служат и в действительности только и могут служить астрономам.

При каких условиях могут эти расходящиеся ряды быть использованы с успехом? Я пытался выяснить это [190, глава «Формальное исчисление»]. Я показал, в каких пределах это использование законно, как например, в случае ряда Стирлинга, и я показал, что правила исчисления для этих рядов те же, что и для обычных.

Я обосновал таким образом употребление астрономами этого вида разложения и, в частности, тригонометрических разложений. Я пытался, кроме того, усовершенствовать методы, которые позволяют строить эти разложения. Напомним в нескольких словах, как ставится задача.

Проблему n тел можно решать лишь последовательными приближениями, и первая идея, которая здесь возникает, состоит в разложении координат светил в ряды по степеням масс. На этой идее основана вся старая небесная механика. Но каковы бы ни были те услуги, которые некогда оказывали эти старые приемы, и какие бы они ни были способны оказать еще, вскоре заметили их недостаточность и их бессилие дать неограниченное приближение. В разложениях, к которым они приводят, время появляется не только под знаками синуса и косинуса, но и вне всякой тригонометрической функции. Этот факт достаточен, чтобы доказать, что область, где старые методы сохраняют свою эффективность, какой бы широкой она ни могла быть, определено ограничена.

Это объясняет те усилия, которые приложили геометры, чтобы заменить старые разложения разложениями чисто тригонометрическими. За последнее время было предложено два замечательных метода, которые, как кажется, вполне достигают этой цели. Первый — это метод Гильдена, основанный на использовании эллиптической функции, а второй — Линдштедта, которым я в особенности занимался.

В этом последнем методе искусный прием позволяет при каждом приближении заставить исчезать вековые члены, которые тут могут возникнуть. Легко видеть, что этот прием будет успешен всегда, когда имеется лишь один член, который нужно заставить исчезнуть. Нетрудно проверить, впрочем, что в первых приближениях имеется лишь один член, от которого нужно освободиться, но можно спросить, будет ли так всегда. Поверхностный анализ мог бы заставить думать противоположное, и даже сам Линдштедт был склонен думать, что его метод мог бы быть успешным, лишь если между аргументами нет никакого линейного соотношения.

Я пришел к доказательству того, что вековой член, который может появиться в каждом приближении, всегда единственный и, тем самым, метод Линдштедта всегда применим [208]. Для этого я прибегнул к теореме, которая, казалось, не имела никакого отношения к вопросу, именно к теореме Грина.

Я мог бы равным образом, как я это сделал позже [211, 218], использовать интегральные инварианты или же воспользоваться теоремами Якоби об уравнениях динамики.

Метод Ньюкома основан на тех же принципах; но он более естественно применяется в более общих случаях проблемы трех тел.

Я сделал в нем заметные усовершенствования [214, 190, 230]. Вопрос состоял в том же, что и для метода Линдштедта. Можно было распоряжаться некоторыми произвольными величинами, чтобы заставить исчезнуть вековые члены; но здесь было вдвое больше этих членов, чем произвольных величин. К счастью, каждый раз, когда исчезал один член, другой исчезал автоматически. Я воспользовался методом Якоби [190], чтобы доказать это автоматическое исчезновение и возможность разложения. Как только эта возможность была установлена, я дал [190, гл. XIV] способ фактического и прямого построения рядов.

Во всем этом, однако, имелось большое неудобство, поскольку нужно было при проведении двух совершенно отдельных анализов доказывать возможность разложения и вычислять его коэффициенты. Заметив, что некоторое выражение было точным дифференциалом, я воспользовался им, чтобы модифицировать метод [190, гл. XV]. Можно избежать некоторых интегрирований и заменить их на дифференцирования или алгебраические операции; отсюда получается прежде всего то, что возможность разложения становится почти очевидной. Кроме того, и вычисления упрощаются. Наиболее тяжелой частью вычислений, хотя она и не представляет теоретических трудностей, является подстановка приближенных значений в обе части дифференциального уравнения. Новый метод позволяет уменьшить почти наполовину число этих подстановок.

Но можно идти и еще дальше по этому пути. Я показал это позже [230]. Я воспользовался точным дифференциальным выражением, аналогичным тому, о котором я только что говорил, и смог еще уменьшить число подстановок и интегрирований. Можно заметить, что теорема Пуассона (неизменность главных осей с учетом квадратов масс) становится почти интуитивно ясной.

Все эти приемы теряют силу, когда средние движения почти соизмеримы. Тогда нужно применять метод, производный от метода Делоне. В открытии этого метода я был опережен на несколько дней Болином, но я различным образом усовершенствовал его, исходя все из тех же принципов. Я ограничусь тем, что скажу, что этот метод позволяет обсудить особые случаи, названные «либрацией», где имеется точная соизмеримость между средними движениями.

Какое соотношение имеется между всеми этими методами и старыми приемами? Такой вопрос я поставил себе [237] и показал, что можно рассмотреть некоторые ряды, которые охватывают, так сказать, все эти методы. При одном способе группировки мы возвратимся к старым методам. С другими способами группировки придем к методу Ньюкома или же к методу Болина.

Все эти приемы применяются естественным образом к Луне. В теории этого светила они даже более необходимы, чем везде. В самых недавних лунарных теориях, таких, как теория Хилла или Брауна, лучше всего видна важность периодических решений, о которых я говорил выше. Я дал [241] метод для определения перигея Луны, который отличается от метода Хилла. Но я привлеку внимание скорее к другому мемуару [242], где я применяю к нашему спутнику приемы мемуара [230]. Эти приемы были бы особенно полезны для того, чтобы получить разложение координат Луны *чисто буквенное*. Я отметил попутно различные любопытные и почти парадоксальные обстоятельства.

Все ряды, о которых я сейчас говорил, могут использоваться лишь с точки зрения формального исчисления и, следовательно, исчисления приближенного. Я в нескольких местах настаивал на этом важном пункте [214, 189, 190, 223, 224].

Все эти столь различные методы могут использоваться для взаимной проверки без слишком больших дополнительных вычислений. Я укажу в особенности на один прием проверки, основанный на использовании интегральных инвариантов [221].

XX. Разложение пертурбационной функции [215, 232, 235, 233, 234, 231, 236, 238, 189]. Я занимался пертурбационной функцией с нескольких различных точек зрения.

Сначала я искал приближенные значения коэффициентов членов очень высокого ранга. Фламм уже использовал по этому поводу метод Дарбу для функций от очень больших чисел. Но так как этот метод в своей начальной форме применялся лишь к функциям одной переменной, Фламм должен был разложить каждый член в сумму произведений, где каждый из сомножителей зависел лишь от одной средней аномалии. Я предпочел рассмотреть прямо функцию в зависимости от двух средних аномалий. Аналогичные приемы, как я это показал, приложимы и в нашем случае. Однако они требуют некоторого обсуждения, и я дал принципы, которыми должно направляться это обсуждение, и нашел применение этому в одном простом случае [189].

Каждый коэффициент можно также рассматривать как функцию наклонов и эксцентриситетов, изучать различные способы разложения этих функций и искать условия их сходимости. Условия, к которым я прихожу [236, 238], относительно не сложны.

Можно, наконец, выяснить, имеются ли соотношения между различными коэффициентами. Я нашел некоторое их число [233, 234, 231].

Во всех этих исследованиях я пользовался соотношениями между этими коэффициентами и периодами некоторых двойных интегралов.

XXI. Равновесие вращающейся жидкости и фигуры планет [170, 171, 172, 176, 175, 173, 174, 206, 177, 178, 212, 213, 184]. Я занимался также и другим вопросом небесной механики, который может быть поставлен так:

Некоторая масса однородной или неоднородной жидкости приводится во вращательное движение вокруг некоторой оси. Более того, ее молекулы притягиваются по закону Ньютона. Каковы формы равновесия, которые она может принять?

Перед нами проблема, которая много занимала геометров в течение более полутора веков и важность которой понятна без труда.

В случае однородной массы, которой мы ограничимся, два решения были известны давно: эллипсоид вращения и эллипсоид Якоби с неравными осями. Но условия устойчивости равновесия не изучались.

Оставалось неизвестным, имеются ли другие возможные формы, когда Матиссен и за ним сэр В. Томсон объявили о существовании кольцевых фигур равновесия. Но доказательство, данное этими двумя учеными, не было вполне строгим; к тому же Матиссен а priori предполагал, что сечение должно было мало отличаться от эллипса. Я показал [176], что это предположение, законное, когда сечение кольца очень мало, ошибочно в общем случае, что делает весьма сомнительным существование некоторых очень уплотненных колец, которые ученый из Ростка назвал кольцами β .

Я счел необходимым провести более углубленное изучение этих фигур [170, 173, 174]. Я защитил от всех возражений доказательство их существования и показал, как можно определить их главные элементы с каким угодно приближением.

Для определения этих элементов я использовал метод, которым уже пользовалась Ковалевская в своем мемуаре о кольцах Сатурна и который основан на разложении периодов эллиптической функции в ряды по возрастающим степеням модуля.

В более обширном мемуаре [175] я вернулся к вопросу, развив результаты, полученные в двух более ранних заметках [171, 172]. Здесь на моем пути встретилась первая трудность. Когда речь идет об интегрировании простых дифференциальных уравнений, метод последовательных приближений совершенно оправдан, потому что существование интеграла было сначала строго доказано. Это уже не так в настоящей проблеме, гораздо более сложной. По поводу законности этого метода могут оставаться сомнения, которые нужно сначала развеять. Чтобы строго доказать существование различных решений проблемы, я использовал прием, вполне аналогичный тому, которым я пользовался в исследованиях периодических решений в проблеме трех тел, где я взял за исходную точку одну теорему Кронекера.

Сначала выясняется, что различные фигуры равновесия жидкой массы образуют линейные серии; в одной и той же серии эти фигуры зависят от переменного параметра. Таковы ряды эллипсоидов вращения и эллипсоидов Якоби. Но может случиться, что та же фигура принадлежит сразу двум различным сериям. Тогда эта фигура называется фигурой *бифуркации равновесия*. С каждой фигурой связывается бесконечная последовательность коэффициентов, которые я называю *коэффициентами устой-*

чивости, потому что условие устойчивости состоит в том, чтобы все они были положительными. Когда один из коэффициентов обращается в нуль, то это случай бифуркации.

Таким образом, если двигаясь вдоль одной серии фигур равновесия, мы увидим, что один из коэффициентов устойчивости обратился в нуль, то мы будем знать, что имеется еще другая серия форм равновесия, которой также принадлежит фигура бифуркации.

Другой результат состоит в том, что две линейные серии, в которые входит эта фигура, обмениваются своей устойчивостью. Если следуя вдоль одной из этих серий, мы встречаемся лишь с устойчивым равновесием до фигуры бифуркации, то в дальнейшем здесь мы найдем только неустойчивые фигуры. Устойчивые фигуры появятся во второй серии.

Эти принципы, примененные к различным проблемам, уже разобранным Лапласом, позволили мне дополнить их решение.

Чтобы отыскать формы равновесия вращающейся жидкой массы, которое мало отличается от эллипсоида, нужно посмотреть, имеются ли среди эллипсоидов вращения и эллипсоидов Якоби фигуры бифуркации. Для этого нужно подсчитать коэффициенты устойчивости этих эллипсоидов. Мы находим, что эти коэффициенты зависят от функций Ляме.

Мне пришлось, следовательно, проделать углубленное изучение этих функций. Я доказал новым способом, что эти полиномы имеют только вещественные корни, и изучил распределение этих корней.

Приравнивая нулю различные коэффициенты устойчивости, получают уравнения, которые являются трансцендентными, но которые тем не менее могут быть обсуждены достаточно полным образом. Это обсуждение показывает, что как среди эллипсоидов вращения, так и среди эллипсоидов Якоби имеется бесконечное число фигур бифуркации.

Отсюда вытекает, что имеются другие формы равновесия, помимо эллипсоидов и колец. Этих новых фигур бесконечное множество, они выпуклы и все имеют плоскость симметрии. Некоторые имеют лишь одну, другие получаются вращением, еще другие, наконец, имеют несколько плоскостей симметрии, проходящих через общую ось.

Оставалось изучить условия устойчивости равновесия.

Я различал по примеру сэра В. Томсона вековую устойчивость, которая остается, когда принимают во внимание вязкость, и обычную устойчивость, которая возникает, лишь когда пренебрегают сопротивлением этого вида. Что касается первой из этих устойчивостей, я показал, что ею обладают эллипсоиды вращения менее уплощенные, чем тот, который в то же время является эллипсоидом Якоби, и что эллипсоиды Якоби, которые удовлетворяют некоторому условию, также имеют эту устойчивость. Другие эллипсоиды неустойчивы; это же верно и для кольцевых фигур. Вновь открытые мною фигуры неустойчивы, все, за исключением одной из них, которая, так сказать, грушевидна.

Я дал также метод для определения обычной устойчивости, которому я нашел лишь частичное применение; все же это позволило выяснить, что

эта устойчивость может сохраняться, когда вековая устойчивость прекращается.

Впрочем, я не могу лучшим образом резюмировать все эти результаты, как высказав следующую гипотезу:

Вообразим жидкую массу, сжимающуюся при охлаждении, однако достаточно медленно, чтобы оставаться однородной и чтобы вращение было одинаково во всех ее частях. Вначале очень близкая к сфере, фигура этой массы будет оставаться эллипсоидом вращения, который будет все более и более уплощаться; затем в некоторый момент он преобразуется в эллипсоид с тремя неравными осями. Позже фигура перестанет быть эллипсоидальной и будет иметь грушевидную форму вплоть до того, как, наконец, масса, все более и более сжимаясь в своей средней части, распадается на два различных и неравных тела.

Такая гипотеза определенным образом не может быть применена к солнечной системе. Несколько астрономов думали, что она может оказаться верной для некоторых двойных звезд и что двойные звезды типа β Лирь представляют переходные формы, аналогичные тем, о которых мы здесь говорили.

В одном из своих мемуаров [173] я показал, что ни одна форма устойчивого равновесия невозможна, если скорость вращения превосходит некоторый предел.

Можно применить этот принцип к кольцам Сатурна. Клерк Максвелл доказал, что эти кольца не могут быть твердыми телами и если они жидкие, то их плотность не может превосходить 3% плотности планеты. С другой стороны [206], я доказал, что если кольца жидкие, то они не могут быть устойчивыми, если только их плотность не больше одной шестой плотности Сатурна. Этот анализ, как кажется, подтверждает гипотезу Трувело, который считает, что кольца составлены из множества чрезвычайно мелких спутников и не думает, что можно как-либо иначе объяснить некоторые наблюдаемые явления.

Я дал более простое доказательство [177] теоремы Ляпунова, в силу которой сфера отвечает максимуму потенциальной функции, и еще несколько раз возвращался к аналогичным вопросам [178, 184], получая ряд любопытных равенств и неравенств.

Радо заметил, что никакая гипотеза не может одновременно объяснить принимаемое уплощение и наблюдаемое значение прецессии. В статьях, посвященных фигуре Земли [212, 213], я подтвердил заключение Радо.

XXII. Астрономия. Различные вопросы [199, 201, 205, 202, 210, 222, 227, 228, 207, 240, 244, 262]. Мы видели выше, какую роль играют в астрономии тригонометрические ряды.

Ввиду этих приложений я решил внести свой вклад в решение вопроса об изучении условий сходимости тригонометрических рядов [201, 202]. Я выяснил здесь два принципиальных факта:

1. Если подобный ряд сходится абсолютно для некоторых значений

времени, то это свойство сохраняется вечно; но это уже не так, если сходимость не абсолютная.

2. Одна и та же функция не может быть представлена двумя абсолютно сходящимися рядами.

Я не смог решить вопрос о сходимости специальных рядов Линдштедта так, чтобы поставить себя вне возражений, однако я имею основания думать, что эти ряды не являются абсолютно сходящимися, но что упорядочивая надлежащим образом их члены, их можно сделать полусходящимися. Сходимость могла бы тогда сохраняться лишь в продолжение ограниченного интервала времени.

Обычно думают, что функция, представленная абсолютно сходящимся тригонометрическим рядом, не может неограниченно возрастать. Эта вера даже служит основанием для старых доказательств устойчивости солнечной системы; благодаря ей и в дальнейшем астрономы потратили много усилий, чтобы заставить время войти под знаки синуса и косинуса. Эта вера ошибочна; я показал [199, 202], что подобная функция становится сколь угодно большой, если сходимость не равномерна. Но есть два способа неограниченного возрастания. Функция может «стремиться к бесконечности». Тогда происходит то, что она в конце концов превысит любую величину, сколь бы велика она ни была, чтобы остаться затем постоянно большей этой величины. Функция может, с другой стороны, испытывать бесконечное число последовательных колебаний, размах которых неограниченно возрастает. Я показал [205], что для суммы чисто тригонометрического ряда могут представиться оба эти случая. Словом, когда даже пришли к представлению координат светила сходящимся тригонометрическим рядом, этим еще не доказали устойчивости солнечной системы.

Я затем [207] изучил приемы, предназначенные для усиления сходимости некоторых тригонометрических рядов, которые различные астрономы и, в частности, Гильден использовали при численном интегрировании. Позже я вернусь еще к работе, которую я посвятил приливам [227, 228] и которая тоже относится к астрономии.

Вычисление возмущения комет посредством механических квадратур становится особенно тяжелым, когда комета очень близко проходит от возмущающего светила, так как в этот момент расстояние между обоими телами меняется очень быстро. Я указал [240], как разумное использование эллиптических интегралов могло бы облегчить это вычисление.

Я также опубликовал статью [244] о роли наблюдения маятника в геодезии и показал, как *одни только* наблюдения маятника, если они совершенны и полны, могли бы обеспечить определение формы Земли.

Наконец, в предисловии, которое я написал к лекциям Тиссерана об определении орбит, я сравнил различные используемые методы и показал, что параболическую орбиту можно было бы определить с помощью трех произвольных наблюдений формулами, в которые входят лишь рациональные функции.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

XXIII. Дифференциальные уравнения математической физики [293, 294, 295, 297, 298, 300, 299, 220, 302, 58, 304, 101, 227, 228, 296, 301, 286, 192]. Во многих задачах математической физики встречаются уравнения в частных производных второго порядка, которые все принадлежат примерно к одному и тому же типу и среди которых наиболее простое — это известное уравнение Лапласа $\Delta u = 0$.

Эти задачи, приводящие к идентичным или почти идентичным уравнениям, принадлежат, однако, к самым различным областям физики. Эти уравнения встречаются в электростатике, магнетизме, электродинамике, теории распространения тепла, теории упругости, оптике, гидродинамике. Они встречаются в механике, в теории ньютоновского потенциала и, наконец, я добавлю, что они играют капитальную роль в чистом анализе и служат основанием для теории аналитических функций.

Наиболее важное среди этих уравнений, как я уже сказал, это уравнение Лапласа, которое является фундаментальным уравнением теории ньютоновского притяжения, электростатики, магнетизма и гидродинамики. В других вопросах приходится встречаться с уравнениями несколько более сложными, такими, как

$$\Delta u = ku, \quad \Delta u = k \frac{du}{dt}, \quad \Delta u = k \frac{d^2u}{dt^2}.$$

Наконец, в оптике, в теории упругости встречаются с системами из трех уравнений с тремя неизвестными, где снова фигурирует лапласиан Δ .

Далее в одном вопросе чистого анализа мы будем говорить об аналогичном, но более сложном уравнении

$$\Delta u = e^u.$$

Однако эти задачи различаются между собой не только по форме уравнений, но особенно по своим граничным условиям. Либо неизвестной функции u предписывают заданные значения на замкнутой поверхности, либо на этой поверхности задают значения производной по нормали, или же какое-либо соотношение между u и $\partial u / \partial n$.

Эти задачи рассматривались с разных точек зрения. Иногда старались лишь доказать, что они возможны, и установить в отношении них «теоремы существования».

Для самих этих теорем существования иногда удовлетворялись доказательствами более или менее интуитивными, которые относятся к типу,

называемому «*принципом Дирихле*». Эти замечания, лишенные истинной математической ценности, носят, однако, характер, способный удовлетворить физика, так как они представляют в полной очевидности, так сказать, физический механизм явления. Обычно они основаны на рассмотрении определенного интеграла, простого или кратного, который не может обратиться в нуль и должен допускать минимум.

С другой стороны, занимались и строгим доказательством этих теорем существования, для этого придумали методы последовательных приближений, сходимость которых сумели доказать. Эта сходимость, как правило, слишком медленна, а приближения слишком сложны для того, чтобы здесь можно было видеть что-либо, кроме приема для доказательства, и чтобы эффективное вычисление стало возможным.

Наконец, пытались решить эти задачи посредством рядов, состоящих из некоторых функций, которые можно было бы назвать *гармоническими*, так как представление явления посредством такого ряда подобно разложению сложного звука на простые гармоники. К этому типу рядов принадлежат ряд Фурье, ряд Лапласа, который образован сферическими функциями, и различные ряды, рассмотренные Фурье в исследовании об охлаждении твердых тел.

В применении этого метода встречаются несколько последовательных трудностей. Сначала нужно доказать существование гармонических функций, что делается, как и для других теорем существования, методами, о которых я уже говорил. Затем нужно вычислить коэффициенты рядов, что, вообще говоря, легко. Затем остается доказать сходимость рядов, и здесь наталкиваются на серьезную трудность.

Таковы различные точки зрения, с которых мне пришлось последовательно рассматривать все эти проблемы.

Сначала я занялся уравнением Лапласа. Теория этого уравнения тесно связана с теорией потенциала. Но свойства потенциала никогда не были доказаны ни с достаточной общностью, ни с достаточной строгостью. Я обратил на это внимание, когда захотел преподавать эту теорию и также когда захотел применять ее к вопросам анализа. Я попытался [192] усовершенствовать доказательства, и мне пришлось также [101] распространить их на пространства более чем трех измерений.

В том, что касается уравнения Лапласа, было предложено уже много методов с целью строгого доказательства теоремы существования. Главными были методы Шварца и Неймана. Я предложил здесь третий метод, совершенно новый [293, 296], который известен ныне под названием метода *выметания*. Как метод доказательства, он представляет преимущество своей общностью и тем, что позволяет устранить некоторые промежуточные выкладки. Напротив, в меньшей степени, чем метод Неймана, он подходит для вычислений.

Элегантный метод Неймана, как казалось, был применим лишь к выпуклым поверхностям. Я увидел [302, 304], что он обладает значительно большей общностью и строго показал, что он применим ко всем односвяз-

ным поверхностям и указал, что вероятно применим к любой совершенно произвольной поверхности; это, впрочем, утверждалось уже давно. К сожалению, я был вынужден допустить принцип Дирихле, который нужно установить сначала, например с помощью метода выметания, и таким образом, доказательство приходится проводить в два приема.

Те же принципы можно распространить и на задачу равновесия упругого тела, которая гораздо сложнее, так как сюда входят три уравнения с тремя неизвестными. Я показал [303], что эту задачу можно решить методом, вполне аналогичным методу Неймана. Однако я не развил эту идею и вместо строгого доказательства сходимости ограничился замечанием, аналогичным «принципу Дирихле», который, правда, недостаточно строг, но который не позволяет всерьез сомневаться в результате.

Я несколько раз возвращался к задаче Фурье, касающейся закона охлаждения твердых тел. В первых своих мемуарах я встал скорее на точку зрения физика и показал существование гармонических функций на основе замечаний, аналогичных принципу Дирихле [294, 295, 296]. На эту же точку зрения я чаще всего становлюсь и в преподавании [286].

Лишь позже я дал [300, 301] строгое доказательство этих теорем существования. Уравнение то же самое, что и уравнение колебаний мембраны. Шварц доказал существование первой гармоники, Пикар — второй. Я доказал более простым путем существование всех гармоник. Метод доказательства, основанный по-прежнему на рассмотрении некоторых интегралов, столь счастливо введенных Шварцем, покоится, кроме того, на изучении некоторой мероморфной функции от вспомогательного параметра. Умножая эту функцию на подходящий полином, заставляют исчезнуть некоторые из ее полюсов; круг сходимости расширяется, и становится возможным приступать к изучению гармоник все более и более высоких порядков.

Этот метод применим не только к задаче охлаждения и к проблеме мембран. Выше я сказал, как я подошел к изучению уравнения Лапласа методом Неймана и уравнения равновесия упругих тел. В этом двойном изучении я все еще пользовался интегралами Шварца и мероморфной вспомогательной функцией, о которых я только что говорил.

Но теми же приемами можно воспользоваться и совсем в других вопросах. Например, я пользовался ими, чтобы изучать равновесие и движение морей [220, 227, 228]. В частности, при исследовании приливов с большими периодами существенную роль играет статическая задача, в которой мы встречаемся, если желаем уяснить себе влияние формы континентов, с гармоническими функциями, аналогичными сферическим, существование которых можно доказать теми же методами. Динамическая задача, так как ее приходится решать для приливов с короткими периодами, представляет, очевидно, больше трудностей. Она упростилась бы, если бы можно было пренебречь силами Кориолиса. Уравнение, к которому бы тогда пришли, было бы снова уравнением мембраны с переменным натяжением и плотностью. Если принять во внимание силу Кориолиса, все

становится сложнее. Интегралы Шварца должны быть заменены на другие более сложные, хотя и аналогичные, но общий ход вычисления остается прежним.

Уравнение $\Delta u = e^u$ можно еще рассматривать тем же путем. На этот раз имеются в виду не физические приложения, а приложения аналитические. Я говорил выше, какова важность этого уравнения в теории фуксовых функций. Пикар первый проинтегрировал его. Я предложил совершенно иной метод, который покоится на принципах, аналогичных тем, которые я изложил выше. Здесь, однако, встречается новая трудность, состоящая в том, что наше уравнение не является линейным, как это обычно бывает для уравнений математической физики. Что характеризует мой метод и отличает его от метода Пикара, так это то, что мой метод вовлекает в рассмотрение сразу всю относящуюся сюда риманову поверхность, в то время как Пикар рассматривает сначала ограниченную область и распространяет затем свои результаты все дальше и дальше по этой поверхности, пока они не оказываются установленными для всей поверхности целиком (*vide supra* раздел II).

Еще одно линейное уравнение в частных производных было объектом моих исследований [297]. Это телеграфное уравнение, которое по своему виду лежит между уравнениями колеблющейся струны и распространения тепла. Результаты также оказываются промежуточными между теми, которые даются этими двумя уравнениями. В случае колеблющейся струны волна распространяется с постоянной скоростью, не деформируясь, не растягиваясь, не высялая вперед авангардов и не оставляя позади арьергардов. В случае распространения тепла волна немедленно размазывается по всей нити проводника, так что нельзя указать ни ее начала, ни ее конца. В случае электричества фронт волны бежит с постоянной скоростью света, но волна оставляет позади себя остаток, нечто вроде хвоста.

Условия, которые должны быть выполнены на границах, сильно отличаются от того, с чем мы сталкиваемся до сих пор. Я смог сделать очевидными факты, которые сейчас отметил, методом, где главную роль играет теория Коши об интегралах, взятых между мнимыми границами. Я несколько раз возвращался к этому предмету [286, 284].

Но в изучении этих уравнений в частных производных я равным образом становился и на точку зрения разложения в гармонические ряды. Существование гармонических функций было установлено теоремами существования, о которых я говорил выше, но сходимости этих рядов могла быть доказана лишь с трудом. Коши первый придумал общий способ, применимый к большому числу таких рядов. Я представил метод Коши одним особенным образом [286], при котором видна его истинная суть и те препятствия, которые нужно преодолеть, чтобы применять этот метод в частных задачах.

В случае охлаждения сферы или цилиндра легко построить гармонические функции, поскольку это хорошо известные функции Бесселя.

В этих частных случаях я смог довести до конца применение метода Коши [298, 286].

Один из наиболее важных из этих рядов — ряд Лапласа, который разлагается по сферическим функциям. Его сходимость была доказана Леженом-Дирихле. Я ввел последовательно [299, 286] такие упрощения в это доказательство, что оно стало почти неузнаваемым. Я опирался на сходимость ряда Фурье и на некоторые свойства функций мнимых переменных. Надеюсь, что форма, придаваемая этому рассуждению, облегчит его распространение на другие аналогичные проблемы.

Мне пришлось также заниматься сходимостью гармонических рядов, которые встречаются в теории распространения тепла и в теории колебания мембраны. Я довольствовался сначала [294, 295, 296] простыми замечаниями. Я показал, например, что интеграл от квадрата совершенной ошибки стремился к нулю, когда в ряде брали все большее число членов. Такой результат, достаточный для физических приложений, не мог бы удовлетворить математика.

В дальнейшем я получил строгие доказательства [301], но при условии ограничительных гипотез на разлагаемую функцию. Это, впрочем, не имеет большого значения с точки зрения приложений, так как всегда можно найти функцию, которая удовлетворила бы этим ограничительным условиям и которая отличалась бы сколь угодно мало от данной функции.

XXIV. Критика физических теорий [345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 355, 356, 360, 361, 362, 363, 366, 367, 368, 369, 475, 306, 304, 307—310, 364, 365, 312, 313, 375, 352—354, 357, 315, 277, 280, 278, 279, 285, 282, 283, 281, 286, 287, 289]. В предыдущем разделе я наметил, так сказать, задачи математической физики; теперь я собираюсь рассмотреть их с физической стороны.

Я опубликовал в серии из нескольких томов мои лекции по математической физике. Я вернусь еще к этим томам с точки зрения преподавания (раздел XXXI); я буду говорить о них также по поводу философских идей, изложенных в их предисловиях (раздел XXIX). Теперь же я займусь ими лишь постольку, поскольку они представляют интерес для физики в собственном смысле слова. Мне пришлось рассмотреть различные физические теории и подвергнуть их критике.

Я посвятил этому предмету также порядочное число заметок и статей.

Кафедра математической физики имеет в качестве официального титула: исчисление вероятностей и математическая физика. Это соединение оправдывается теми применениями, которые может иметь это исчисление во всех экспериментах физики, или же теми, которые оно находит в кинетической теории газа. Как бы то ни было, я занимался вероятностями, и мои лекции были опубликованы [287]. Теория ошибок была, естественно, моей главной целью. Пришлось наложить решительные ограничения на всеобщность «закона ошибок», но я старался подтвердить его в тех случаях, где он остается справедливым, новыми примерами. Я пока-

зал, что если общая ошибка происходит от накопления большого числа малых частных ошибок и если эти последние подчинены произвольным, но симметричным законам, то общая ошибка будет подчинена закону Гаусса.

Я не стану распространяться о лекциях, которые посвятил турбулентности [283] или капиллярности [285]; то, что они содержат нового, интересно скорее для преподавания.

Один том я посвятил термодинамике [281]. Я отмечу лишь дискуссию в этом томе о неравенстве Клаузиуса

$$\int \frac{dQ}{dT} < 0.$$

Доказательство этого неравенства дало повод для долгих контроверз; я постарался поставить его вне всяких возражений.

В доказательстве теорем Гиббса встречается трудность, которая ускользнула от многих знаменитых ученых. Она относится к вычислению энтропии газовой смеси. Сегодня ее обычно преодолевают, привлекая свойства осмоса. Я довел дело до конца совсем другим путем, введя в рассмотрение свойства диссоциации углекислого кальция.

Необратимость явлений термодинамики занимала многих исследователей. Ей хотели дать различные механические объяснения. Первое из них принадлежало Гельмгольцу, я показал [345], что оно недостаточно, чтобы уяснить суть фактов (*vide infra* раздел XXVIII). Второе связано с кинетической теорией газа. Я выдвинул здесь различные возражения, которые, как мне кажется, делают его маловероятным. В частности, я дискутировал различные аспекты этой теории в двух заметках [355, 356], что дало мне случай исправить ошибку вычисления, допущенную Максвеллом по поводу связи между проводимостью и вязкостью газа. С другой стороны, я подтвердил принцип Больцмана и показал его законность в случае, где это оспаривалось [357].

Я изложил общую теорию упругости в два приема [277, *in initio*, 282]. Я показал, какие соотношения должны быть между 21 коэффициентом упругости: 1) при условии центральных сил, 2) в случае, где в состоянии равновесия давление равно нулю. Эти результаты предполагают, что имеется лишь один сорт молекул, и они не применимы, следовательно, во всяком случае немедленно, к двум взаимно проникающим друг в друга средам. Они дали повод для возражений, которые я легко опроверг [350].

Я отметил дальше в своей книге [282] ошибку, сделанную Ляме (стр. 134).

Я занимался также частной задачей упругости [351] в связи с одним экспериментом Корню. Я показал, что некоторые соотношения, которые всюду являются приближенными, становятся строго точными на ребрах призмы с прямоугольным основанием.

Уравнения упругости немедленно применяются в оптике. Я пытался объединить в одном общем изложении все оптические теории волн. В част-

ности [277], я показал, как в случае двойного преломления теории Френеля, Неймана и Сарро выводятся из общих уравнений упругой среды. Также, благодаря введению понятия «переходный слой» различные теории отражения были заметно упрощены и их взаимные связи стали лучше понятными.

Что получается из сопоставления теории Френеля, где колебания предполагаются перпендикулярными плоскостями поляризации, и теории Неймана, где они рассматриваются как параллельные этой плоскости? Известно, что обе теории до сих пор одинаково хорошо объясняли факт, но проведенное мною их сравнение показало мне причину такого обстоятельства. Причина эта имеет общую природу. Всякий факт, который может быть объяснен одной теорией, будет равным образом хорошо объяснен и другой, так что никакой оптический эксперимент не сможет произвести выбор между ними.

Хотели найти решающий критерий в явлениях дифракции, в отражении от металлов, особенно в известном эксперименте Винера. Я показал [347, 348], что это лишь иллюзии.

Принцип Гюйгенса и его приложения к дифракции долго занимали меня.

Работы Кирхгофа были мне в это время неизвестны. Интерпретация, которую я предложил принципу Гюйгенса, во многом сходна с интерпретацией Кирхгофа, она также основывается на рассмотрении интеграла, аналогичного ньютоновскому потенциалу.

Я подошел к проблеме также и другим путем [277, стр. 300; 280, стр. 98], прямо выводя уравнения прямолинейного распространения света как первое приближение, а уравнения дифракции — как второе. Я показал, таким образом, что направление светового луча должно быть согласно с принципом Гюйгенса; в том же, что касается второго приближения, я пытался проиллюстрировать общую теорию простым примером, изучая случай аномального распространения волн в тонком пучке [330, 280].

Как бы то ни было, теория дифракции оставалась очень несовершенной. Не только вопрос поляризации оставался в стороне, но и некоторые явления, которые Гуи называет «удаленной дифракцией», не имели никакого объяснения. Я пытался дать теорию удаленной дифракции и поляризации при дифракции [306, 311]; к сожалению, мне пришлось выдвинуть некоторые гипотезы, которые достаточно близки к реальности, чтобы дать общую идею хода явления, однако недостаточны, чтобы вывести из них теорию полную и определяющую.

В моих опубликованных лекциях я сделал общий обзор основных теорий электродинамики [278, 279, 289]. Но я посвятил также несколько заметок некоторым частным вопросам. Я обсуждал [346] закон электродинамики Вебера и его связь с принципом сохранения энергии. Я изучил [349] условия равновесия диэлектрической жидкости, помещенной в электрическое поле; я хотел показать, что эту теорию можно было

сделать вполне элементарной и не вводя максвелловские натяжения. Я изложил [314] связь явления Холла с теорией Лоренца.

Я посвятил [375] статью униполярной индукции. Увлекаются ли магнитные силовые линии движущимся магнитом? Мое заключение таково, что этот вопрос лишен смысла.

Но я сразу же занялся связями электродинамики и оптики. Я изложил в нескольких статьях эффект Зеемана [312, 313, 289]. Одна из них была подвергнута критике Лоренцом. Решит опыт. Если определенно подтвердятся опыты Зеемана по дисимметрии триплета в слабом поле, о которых сообщил Лоренц в своем докладе на Физическом конгрессе (том III, стр. 31), то прав Лоренц.

Я дал общий обзор [278, 279, 289, 307—310] главных электромагнитных теорий света: Максвелла, Гельмгольца, Герца, Лоренца и Лармора. Наиболее удовлетворительной мне показалась теория Лоренца. Я, однако, сделал одно возражение; эта теория не находится в согласии с принципом равенства действия и противодействия (в применении его только к веществу) [307—310, 289]. Я вернулся [315] к связи теории Лоренца с этим принципом, рассмотрев это с большими подробностями.

Наконец, мне пришлось заниматься катодными лучами и лучами Рентгена. Я дал [369] объяснение опыта Биркленда, определив траекторию катодных лучей в переменном поле. Я отверг [360, 361—363, 364, 365] представления Яумана об этих лучах.

Я сделал различные замечания [366, 367, 368] по поводу экспериментов, связанных с лучами Рентгена. Я выдвинул в одной из популяризаторских статей [370] гипотезу, которая имела некоторое влияние на развитие науки. Я спросил, имеется ли какая-либо связь между этими лучами и явлениями флюоресценции. Несколько ученых занялись подобными исследованиями. Некоторые получили лишь частные или сомнительные результаты. Но Беккерель достиг полного успеха и открыл лучи, которые носят его имя. Явления, которые он наблюдал, имеют некоторую аналогию с тем, что я предвидел. Однако они еще гораздо более удивительны.

XXV. Герцевские колебания [325, 329, 332, 333, 326, 327, 328, 279, 284]. Я думаю, что должен поместить отдельно, по причине большого числа их, статьи, которые я посвятил герцевским колебаниям. Первой является заметка [325], где я исправил ошибку вычисления, допущенную Герцем в определении периода.

Это исправление было легким, но важно было сделать его быстро, так как в тот момент, если бы эта ошибка осталась незамеченной, она могла задержать научный прогресс.

Я дал в других заметках и в лекциях приемы вычисления (более или менее приближенного) периода вибратора, и обсудил различные обстоятельства, которые влияют или, казалось, должны были влиять на этот период [329, 326, 327, 284].

Явление множественного резонанса, открытое Саразеном и де ля Ривом, казалось весьма парадоксальным. Я дал ему простое объяснение [328, 284], основанное на быстром затухании колебаний во времени. Такое объяснение было экспериментально подтверждено сперва Бьеркнесом, затем другими физиками.

Наконец, я рассмотрел [332, 333] вопрос о распространении герцевской волны вдоль провода. Я показал, что затухание (в пространстве) этой волны вызвано двумя причинами; излучением и джоулевым теплом. Первое возрастает с увеличением диаметра провода, а второе уменьшается. Опыт, видимо, указывает на то, что второе преобладает.

Ш е с т а я ч а с т ь

ФИЛОСОФИЯ НАУКИ

XXVI. Арифметика и анализ [405, 408]. Желая углубиться в философию математических наук, я должен был сначала изучить те из ее разделов, которые более всего свободны от чувственных и вообще от посторонних элементов. Здесь имел я больше всего шансов проникнуть в истинную природу математического рассуждения. Но в арифметике во всей своей чистоте царит фундаментальное понятие числа. Поэтому я должен был черпать свои примеры в арифметике, а не в геометрии, как это делает большинство философов.

Я нашел [408], однако, что даже в арифметике математическое рассуждение — не просто силлогизм — и что повсюду силлогизм бесплоден. Математическое рассуждение требует особого рода индукции, которая отличается от обычной тем, что ее результат абсолютно достоверен. К этой индукции прибегают, например, когда утверждают, что теорема, доказанная для числа 1, верна для всех чисел, если установлено, что она верна для $n+1$, когда она верна для n .

Как переходят теперь от чистого числа к континууму и от арифметики к анализу? Я изучал [405] происхождение математического понятия континуума и показал, что оно не могло бы быть выведено из опыта и во многом отличается от понятия физического континуума, которое мы получаем через чувства. Это последнее управляется известным «законом Фехнера», который (если желать буквально выразить опыты, служащие ему основанием) должен быть записан противоречивой формулой:

$$A > B, \quad A = C, \quad C = B.$$

Для снятия этого противоречия разум *создал* математический континуум. Его творческая мощь не иссякла на этом, и если он не применяет ее в дело снова, то лишь потому, что опыт не предоставляет ему к тому случая.

XXVII. Геометрия [402, 409, 410, 412, 414, 411, 403, 404]. Я неоднократно обращался к выяснению исходных начал геометрии и понятия пространства.

Я спрашивал себя [402, 403], каков истинный характер геометрических истин и, в частности, постулата Евклида. Является ли он экспериментальным фактом, логической необходимостью или синтетическим суждением *a priori*? Ничего подобного, это соглашение; и не более разумно спрашивать себя, верен ли этот постулат, а геометрия Лобачевского

ложна, чем исследовать, верна ли метрическая система, а система аршина и фута ложна.

Как и Ли, я думаю, что понятие, более или менее бессознательное, непрерывной группы есть единственная логическая база нашей геометрии. Как и Гельмгольц, я думаю, что наблюдение движений твердых тел является ее психологическим источником. Но я не собираюсь из-за этого вывести геометрию из опыта. Далеко не так. Опыты над твердыми телами были всего лишь случаем, который среди всех непрерывных групп, из которых мы могли бы построить геометрию, вынудил нас выбрать евклидову группу не как единственно истинную, но как самую удобную.

Я занимался равным образом анализом психологических исходных начал понятия пространства [409, 411]. Каким образом среди изменений, которые наши чувства открывают нам во внешних предметах, отличаем мы изменения состояния от изменения положения? Дело в том, что эти последние всегда могут быть исправлены «внутренними изменениями» (движениями тела), которые сами отличаются от «внешних изменений», потому что они подчинены разуму и сопровождаются ощущениями, которые согласились называть мышечными. Отсюда получается, прежде всего, что неподвижное существо не было бы в состоянии создать геометрию.

Понятие пространства не может, таким образом, быть составной частью никакого из наших ощущений, взятых в отдельности. Лишь когда мы замечаем порядок, в котором эти ощущения следуют друг за другом, может возникнуть это понятие. Но если абсурдно допустить, что мы могли бы вообразить ощущения, отличные от наших нормальных ощущений, мы с некоторым усилием можем, напротив, вообразить последовательность ощущений, подобных в отдельности нашим нормальным ощущениям, но идущих в необычном порядке. Мы можем вообразить, что эти ощущения следуют другим законам и, например, что они упорядочены в соответствии не со структурой евклидовой группы, а с какой-либо другой. Существа, которые бы испытывали наши обычные ощущения, но в таком необычном порядке, создали бы геометрию, отличную от нашей. В этом смысле я мог сказать [403] в несколько парадоксальной форме: «кто-нибудь, посвятивший этому свою жизнь, мог бы в конце концов вообразить пространство четырех измерений». В другой статье [404] я описал воображаемый мир, обитатели которого неминуемо должны были бы прийти к созданию геометрии Лобачевского.

Еще более парадоксально то, что я говорил о геометрической точке. Это понятие, по-видимому, непосредственное и примитивное, не кажется мне способным устоять перед анализом. Я ищу его происхождение в структуре евклидовой группы и в изучении подгрупп, которые в ней содержатся. Я пытаюсь показать, что каким бы образом ни приниматься за этот вопрос, всегда придешь к такому заключению [409, 410, 411].

Я отверг [412, 414] идеи Рассела об основаниях геометрии. Этот философ приписывает важную роль опыту в генезисе геометрии. Я выдвинул

в качестве возражения то, о чем уже говорил [403], что невозможно экспериментировать над абстрактными прямыми или фигурами, что эксперимент можно проводить лишь над материальными телами и что тогда, действуя с твердыми телами, мы будем иметь эксперимент из механики, действуя над световыми лучами, будем иметь эксперимент из оптики, но никогда не получим эксперимента из геометрии.

Хотя по некоторым пунктам я был согласен с Расселом и отдаю должное его таланту, я был обязан одновременно бороться против некоторых других идей этого автора.

XXVII. Механика [345, 406, 407, 373, 415, 183, 450, 281 (предисловие)]. Исследования по основаниям механики были начаты мною под влиянием тех же мыслей.

Понятие времени прежде всего требовало критического анализа, подобного тому, которому я подверг понятие пространства. Вообще допускают не только то, что время относительно, но что и равенство двух длительностей не может быть воспринято непосредственно, и даже что оно может быть определено лишь посредством некоторого соглашения. Я постарался показать [373], что само понятие одновременности двух событий имеет в себе нечто произвольное, я хочу сказать, несколько условное.

Я обсуждал [345, 406, 407] философскую важность второго принципа термодинамики. Этот принцип находится или кажется в противоречии с гипотезой о мировом механизме. Я выше говорил (раздел XXIV) о разных попытках, которые были сделаны, чтобы снять это противоречие, и о дискуссиях, которым они подали повод. Я пытался ввести философов в суть этих споров.

Даны ли принципы механики *a priori* или же их происхождение эмпирическое? Ни одно из этих решений не является вполне достаточным. Какую же позицию следует предпочесть? Я несколько раз возвращался к этим проблемам [415, 183, 452]. Экспериментальные факты привели нас к тому, чтобы принять фундаментальные принципы механики: инерции, равенства действия и противодействия, относительности движения. Должны ли мы заключить, что эти законы приблизительны, что новые эксперименты приведут нас к тому, чтобы добавить в них малые дополнительные члены? Чтобы дать себе в этом отчет, нам достаточно попытаться правильно высказать эти принципы, применяя их ко всей Вселенной. Мы признаем тогда, что когда им желают придать абсолютную форму, они становятся непроверяемыми, так как мы можем знать лишь относительные движения. Поэтому у нас всегда останется свобода сохранить их, без страха, что мы будем уличены во лжи, и мы сохраним их, так как опыт показал нам, что они удобны. Вот почему опыт, который породил их, уже не сможет их разрушить.

Те же соображения применимы к принципу, который еще более близко затрагивает физику, — принципу сохранения энергии. Я прилагал уси-

лия для доказательства этого ([281, предисловие; 415, 452]). Когда желают придать этому принципу абсолютное значение, то он на глазах превращается в тавтологию. Он, таким образом, кажется поставившим себя вне досягаемости опыта. Не невозможно, однако, что новые эксперименты помещают нам приписать ему универсальную значимость, показав нам, что он не может допустить нового расширения, не потеряв своей плодотворности [451]. Это я и пытался объяснить.

Как бы ни обстояло дело с этими частными вопросами, я пытался показать, почему механика является и должна оставаться экспериментальной наукой [452].

XXIX. Физика [413, 449, 451; предисловия к 287, 277, 278, 281, 289]. Переходя в область физики, нужно отказаться от того особого рода уверенности, которой требуют математики. Мы должны удовлетвориться вероятным. Исчисление вероятностей играет свою необходимую роль, и я показал, что во всякой индукции производят бессознательное вычисление вероятностей [413]. Я пытался [413; 287, предисловие] проникнуть в принципы этого исчисления, я думал открыть их в вере в непрерывность природных явлений.

Физика не может обойтись без математики, которая предоставляет ей единственный язык, на котором она может говорить [449]. Отсюда взаимные и беспрестанные услуги, которые оказывают друг другу чистый анализ и физика. Замечательная вещь — работы аналитиков — были тем более плодотворны для физиков, чем более они культивировались исключительно ради своей красоты. Взамен физика, ставя новые задачи, была столь же полезна математикам, как модель для художника.

Физик [451] не мог бы удовлетвориться голым экспериментом. Его объект не тот же, что у историка, и отдельный факт не имеет для него цены. Отсюда полезность обобщения, которое требуют математики. Это обобщение предполагает некоторую веру в простоту и единство природы [451; 281, предисловие]. Эта вера, справедлива она или нет, необходима для науки.

Впрочем, невозможно было бы обойтись без гипотез, и часто ложные гипотезы оказывали больше услуг, чем верные. Чтобы извлечь пользу из этих гипотез, пытались разложить наблюдаемое сложное явление на большое число элементарных явлений, повинующихся одним и тем же законам. Именно таким образом стала возможна математическая физика.

В физических теориях нужно различать основу и форму. Основа — это существование некоторых связей между недоступными объектами. Эти связи — единственная реальность, которой можно достичь, и все, что мы можем спросить — такие же ли связи между реальными объектами и между образами, которые мы ставим на их место.

Форма — лишь род одежды, которую мы набрасываем на этот скелет. Эту одежду мы меняем часто, к удивлению остальных людей, у которых

это непостоянство вызывает улыбку и которые объявляют банкротство науки. Но если часто меняется форма, основное остается.

Гипотезы относительно того, что я назвал формой, не могут быть истинными или ложными, они могут быть лишь удобными или неудобными. Например, существование эфира, так же, как и внешних объектов, является лишь удобной гипотезой [451; 277, предисловие].

Благодаря этому мы видим, как возрождаются из пепла и трансформируются некоторые теории, которые мы считали покинутыми. Благодаря этому имеются также некоторые категории фактов, которые объясняются одинаково хорошо двумя или даже тремя различными теориями, и опыт никогда не сможет произвести выбор между ними. Это, в частности, верно для механистических теорий. Действительно, можно доказать, что если явление допускает одно механическое объяснение, то оно допускает бесконечное число таких объяснений [451; 278, предисловие].

В любом случае механицизм лишь одежда, в которую может рядиться истина, и если она удовлетворяет наш разум, не нужно придавать ему больше того значения, чем он заслуживает. Он вынуждает нас ввести гипотезу вспомогательных флюидов, таких, как эфир; я излагаю несколько соображений относительно большей или меньшей реальности этого флюида.

Я заканчиваю [451] описанием современного состояния науки и ее прогресса за пятьдесят лет. Мой вывод состоит в том, что мы движемся к единству; важный прогресс, так как не нужно забывать, что истинная цель — не механицизм, а единство.

XXX. Научная психология и педагогика [522, 523, 450]. В построении математической науки и в ее преподавании различаются две противоположные тенденции — аналитическая и интуитивная. По мере развития науки первая стремилась выйти вперед. Обе, однако, играют необходимую роль. В преподавании необходимо обратиться к интуиции, чтобы развить некоторые способности ума, полезные для ученого и особенно для инженера [523]. В самой науке интуиция остается, за исключением нескольких привилегированных умов, главным инструментом изобретения, в то время как анализ все более стремится стать единственным законным инструментом доказательства [450].

Я изучал также влияние, которое может оказать в преподавании употребления обозначений дифференциального исчисления [522]. Я показал, какие несообразности может повлечь преждевременное использование этих обозначений.

ПРЕПОДАВАНИЕ, ПОПУЛЯРИЗАЦИЯ, РАЗНОЕ

XXXI. Преподавание. Вот список лекций, которые я читал в Сорбонне с 1885 года.

К а ф е д р а ф и з и ч е с к о й и
э к с п е р и м е н т а л ь н о й м е х а н и к и

- 1885. 2. Трение.
- 1886. 1. Кинематика и механика [167,168].
- 1886. 2. Потенциал. Гидростатика. Гидродинамика [167, 168].

К а ф е д р а м а т е м а т и ч е с к о й ф и з и к и

- 1887. 1. Теория потенциала.
- 1887. 2. Теория потенциала и распространение тепла.
- 1888. 1. Математическая теория света [277].
- 1888. 2. Теория Максвелла [278, 289].
- 1889. 1. Термодинамика [281].
- 1889. 2. Капиллярность [285].
- 1890. 1. Проблема трех тел.
- 1890. 2. Электродинамика [278, 289].
- 1891. 1. Упругость [282].
- 1891. 2. Электростатика.
- 1892. 1. Оптика [280].
- 1892. 2. Турбулентность [283].
- 1893. 1. Электрические колебания [284].
- 1893. 2. Термодинамика и кинетическая теория газа.
- 1894. 1. Распространение тепла [286].
- 1894. 2. Исчисление вероятностей [287].
- 1895. 1. Ньютонов потенциал [192].
- 1895. 2. Электростатика.
- 1896. 1. Упругость.
- 1896. 2. Оптика.

К а ф е д р а н е б е с н о й м е х а н и к и

- 1897. 1. О проблеме трех тел и планетных возмущениях.
- 1898. 1. О разложении пертурбационной функции и методах Гильдена и Хансена.
- 1899. 1. О новых электродинамических теориях [289].
- 1899. 2. Фигура небесных тел.

1900. 1. Теория Луны.

1901. 1. Движение небесных тел вокруг их центра тяжести.

Систему обозначений в этой таблице легко понять; например, 1886, 1 обозначает первый семестр 1885—86 учебного года. Цифры в скобках после названия курса отсылают к библиографии и относятся к курсам, которые были опубликованы.

Лишней работой было бы снова обращаться ко всем опубликованным курсам, о которых я уже говорил в разделе XXIV. Я скажу лишь несколько слов с точки зрения преподавания о курсах 1888, 2 и 1890, 2 [278, 279].

В эту эпоху на континенте еще не освоились с идеями Максвелла, и нужно было, так сказать, перебросить мост между старым и новым образами мышления. Теперь, когда весь мир перешел на новые идеи, этот мост может показаться бесполезным, а предосторожности, которые я считал для себя необходимым принять, могут некоторых удивить. Тем не менее, я думаю, что и сегодня еще два искусственных образа, которые я использовал, чтобы дать понятие об идеях Максвелла, именно, жидкости-индуктора и клеточных диэлектриков, могут облегчить для некоторых умов изучение электрических теорий. В моих лекциях по электродинамике [279] я изложил идеи Гельмгольца, но думаю, что сделал их доступнее, используя электромагнитные единицы вместо электростатических, которые как нельзя хуже были приспособлены для целей, преследуемых немецким ученым.

Как можно видеть, не все курсы были опубликованы. Я буду говорить только о курсах по электростатике, двух курсах 1896 г. и лекциях по кинетической теории газа.

Я постарался изложить электростатику, не произнося слова электричество и говоря лишь об электризованных проводниках. Я определил сначала равенство потенциала двух проводников через электрическое равновесие, как определяют равенство температур через тепловое равновесие, и лишь к концу курса получил обычное выражение потенциала через интеграл, выводя его из некоторого числа экспериментальных констатаций и, в частности, из опытов с электрическими экранами. Я сократил, таким образом, насколько можно, место, отведенное гипотезам.

В моем втором курсе упругости (1896, 1) я обсудил несколько новых вопросов; я изложил некоторые из идей лорда Кельвина и показал, например, что допуская несколько сортов молекул (и, так сказать, несколько сред, проникающих взаимно друг в друга), можно получить уравнения, содержащие 21 произвольный коэффициент, а не только 15, при этом не отказываясь от гипотезы центральных сил. Я изложил затем теорию гиристатического эфира, которую публикации лорда Кельвина позволяли восстановить, однако не без некоторых усилий.

В моем третьем курсе оптики (1896, 2) я уделил много внимания идеям Гуи о поведении луча белого света, проходящего через произвольный опти-

ческий аппарат, представлению этого света интегралом Френеля и следствиям, которые отсюда выводятся.

В лекциях по термодинамике и кинетической теории газа (1893, 2) я изложил доказательство двух принципов термодинамики в форме несколько более общей и более абстрактной, чем обычно. Я затем объяснил теорию вириала, обосновал принцип Больцмана — Максвелла и проанализировал работу Максвелла. Я анализировал влияние закона больших чисел на уравнения механики, но без того, чтобы прийти к определенным заключениям.

В конце моего курса по турбулентности [283] я изложил идеи Гельмгольца об образовании туманов; эта часть курса не была опубликована, так как я не пришел к заключениям, которые бы меня удовлетворили.

Можно составить себе представление о том, что было самого оригинального в моем изложении небесной механики, читая статьи, которые я публиковал в то же время в *Астрономическом Бюллетене*. В моих лекциях по теории Луны я изложил почти исключительно методы Хилла и Брауна и посвятил лишь несколько лекций методам Делоне. В лекциях о движении небесных тел вокруг их центра тяжести я использовал кватернионы.

XXXII. Популяризация [358, 372, 239, 217, 179, 357, 370, 288, 475]. В этих статьях, которые относятся к небесной механике, геодезии, герцевским колебаниям, лучам Рентгена, я заставлял себя полностью избегать употребления алгебраических обозначений. Напомню лишь, что в одной из них [370] я выдвинул гипотезу, которая исторически оказала влияние на открытие лучей Беккереля.

XXXIII. Биографии [460, 476, 461, 472, 471, 456, 457, 465, 467]. В этих статьях я изучил жизнь и работы Вейерштрасса, Эрмита, Бертрана, Лагерра, Альфана, Тиссерана.

XXXIV. Различные доклады [463, 468, 470, 473, 474, 265, 263, 274, 264]. Среди этих докладов я отмечу те, которые должен был сделать по поводу проекта унификации гражданского дня и астрономического дня и о проекте десятичной меры для времени и для окружности. Эти два проекта реформ не осуществились из-за трудностей международного соглашения. Равным образом отмечу мой доклад о новом измерении дуги меридиана Кито.

АНРИ ПУАНКАРЕ, ЕГО ЖИЗНЬ И ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ *

Г а с т о н Ж ю л и а

Сегодня Лотарингия торжественно отмечает рождение одного из своих прославленнейших сынов.

Анри Пуанкаре родился 29 апреля 1854 года в Нанси в семье, которая уже дала Франции нескольких знаменитых людей. И его отец, невропатолог, профессор медицинского факультета, и его дед, фармацевт, были, несомненно, людьми выдающимися и оставили заметный след в духовной жизни общества. Предки Пуанкаре по материнской линии, в том числе и сама его мать, были уроженцами Лотарингии. Пуанкаре считал впоследствии, что его бабушка со стороны матери обладала несомненными математическими способностями. У дяди Пуанкаре — Антони Пуанкаре, генерального инспектора мостов и дорог, — как известно, было два сына: Раймон, Президент Французской Республики и Председатель Совета Министров, и Люсьен, известный физик, впоследствии ректор Парижского университета.

Анри Пуанкаре рос послушным, не по годам развитым ребенком. Наделенный живым умом и пристрастившийся к чтению книг после тяжелой дифтерии, надолго приковавшей его к постели, Пуанкаре жадно впитывал все прочитанное и услышанное им в кругу ученых, преподавателей университета и Политехнической школы, среди которых вращалась его семья.

Первым учителем Пуанкаре был инспектор начальных классов Лицея в Нанси Гинцелин. Усвоив необходимые элементарные сведения, Пуанкаре в октябре 1862 года поступает в Лицей, который заканчивает в 1873 году. В том же году он поступает в Политехническую школу. Каникулы Пуанкаре проводил в Арранси у родителей матери. Учился он превосходно и с увлечением.

Будучи еще ребенком, Пуанкаре великолепно справлялся с возложенными на него обязанностями в салоне, устроенном его матерью. Иногда он охотно принимал участие в разговоре, иногда предпочитал размышлять в одиночестве. Обладая мягким покладистым характером, Пуанкаре с удовольствием участвовал в забавах своих сверстников, но особенно отличался в тех играх, которые требовали сообразительности. В возрасте 11 лет

* Oeuvres, t. XI. Livre du Centenaire. Paris, Gauthier-Villars, 1956, p. 165—173.

он, находясь на экскурсии, объяснил своим товарищам, что такое рамбершанское эхо. Пуанкаре любил разыгрывать шарады, сценки, увлекался танцами.

Призвание к математике у Пуанкаре проявилось во всем своем блеске уже на четвертом году его пребывания в Лицее, но, по словам преподавателя риторики, ничуть не мешало Пуанкаре изучать классические дисциплины. 5 августа 1871 года Пуанкаре стал бакалавром словесности с оценкой *«хорошо»*, а в ноябре того же года — бакалавром наук с оценкой *«удовлетворительно»*, после того, как он ухитрился провалиться на письменном экзамене по математике.

В области элементарной математики он проявил свои исключительные способности, завоевав первую премию на общем конкурсе и заняв в июле 1872 года второе место на конкурсе в Лесной школе.

В октябре 1872 года Пуанкаре вместе с Полем Аппелем и Колсоном начал заниматься у Эллио в Специальных классах Лицея. Вот что вспоминает об этом событии Колсон: «Перед началом первого урока новичок достал из кармана вместо тетради похоронное извещение. Мы решили, что он сделал это по ошибке, но на следующих уроках мы с изумлением увидели, как он что-то чертит на этом листке. . . Новичок не производил впечатления серьезного человека, но торопиться с выводами не следовало. Ведь получил же он первую премию на Общем конкурсе! А когда какой-то ученик четвертого класса обратился к нему за разъяснением одного особенно трудного вопроса, Пуанкаре дал ответ немедленно, не раздумывая ни минуты, чем привел в изумление и того, кто его спрашивал, и тех, кто случайно стал свидетелем этой сцены. «Как ему это удалось?» — вот вопрос, который задавали друг другу все».

Колсону вторит Аппель: «Первые же опросы выявили явное превосходство Пуанкаре. Он отвечал на вопросы сразу, опуская промежуточные рассуждения. Ответы его были настолько лаконичными и точными, что преподавателю приходилось то и дело просить Пуанкаре, чтобы тот давал более распространенные ответы». Сам преподаватель Эллио сказал как-то своему другу Лиару: «В моем классе в Нанси есть математическое чудовище. Это Анри Пуанкаре».

После занятий Пуанкаре любил совершать дальние прогулки, проводя своих друзей Анри и Гартмана до Мальзевиля. К себе домой на улицу Лафайетта, 6, он неизменно возвращался в сопровождении Аппеля.

Нанси подвергся оккупации. Время еще не успело смягчить горечь потери Эльзаса и Лотарингии. В начале войны Пуанкаре, которому исполнилось тогда 16 лет, пережил оккупацию и ее ужасы. Неизгладимое впечатление на мальчика произвели госпитали, которые он посетил, сопровождая своего отца. Несколько позже по дороге в Арранси, что под Сен-Прива, куда он отправился вместе с матерью и сестрой, Пуанкаре довелось видеть несколько сожженных деревень. Дедушку и бабушку он застал в их опустошенном войной доме совершенно больными. . . Эта поездка навсегда сохранилась в памяти Пуанкаре. Благодаря ей он осознал,



А. Пуанкаре — ученик Политехнической школы
(1873—1875 гг.)

что его долг — стать убежденным, сознательным патриотом и упорно трудиться. Своему убеждению Пуанкаре оставался верен всю жизнь.

Однако поскольку пока нужно было учиться и не забывать то, что уже известно, Пуанкаре сначала совершенно самостоятельно принялся за изучение немецкого языка, дабы иметь возможность узнавать новости из тех газет, которые он только и мог раздобыть.

В годы своего пребывания в Специальных классах Лицея Пуанкаре необычайно много работал, читал труды Жозефа Бертрана, Дюамеля, Шаля, Руше и размышлял над ними. Синтетический характер его суждений и его геометрические решения ныне общеизвестны. Не менее известна и неудача, постигшая Пуанкаре с черчением, которая в виде забавного анекдота дошла до нас в передаче Аппеля.

В июле 1873 года Пуанкаре получил первую премию по математике на Общем конкурсе. Вот что сообщает об этом Роллье, проверявший работы, представленные на конкурс, своему старому профессору: «У вас в Нанси имеется ученик, обладающий исключительными математическими способностями. Я проверял работы всех участников конкурса. Так вот! Если бы Пуанкаре даже допустил кое-какие ошибки в вычислениях и не довел решение до конца, я все равно поставил бы ему высшую оценку. . . , хотя бы за то, как он ставит задачу».



А. Пуанкаре — горный инженер в Везуле

На экзаменах в Политехническую школу Пуанкаре без труда занял первое место, несмотря на плачевный исход экзамена по рисованию и черчению. Впрочем, эту неудачу отчасти можно было объяснить тем, что в день экзамена Пуанкаре очень торопился: ему нужно было во что бы то ни стало присутствовать при вступлении французских войск в Нанси.

О том, как Пуанкаре сдавал устные экзамены, и поныне рассказывают легенды. Переполненный зал. . . Пуанкаре говорит медленно, запинаясь и время от времени закрывая глаза; он просит разрешения прервать доказательство и начать новое. . . затем восклицает: «Нет! Я лучше вернусь к своему первому доказательству, оно короче и изящнее. . .» Экзаменатор был в восхищении. У Тиссо, отвечая на вопрос из элементарной геометрии, Пуанкаре предложил одно за другим три различных решения и был удостоен высшей оценки.

Исход экзаменов в Высшую Нормальную школу оказался менее удачным: Пуанкаре занял по конкурсу лишь пятое место и в октябре 1873 года вернулся в Политехническую школу.

Он не вел конспекты, но слушал лекции, обдумывал их, размышлял, расхаживая по коридорам. Даже во время отдыха, на прогулках с друзьями из Нанси, Пуанкаре мог задуматься, забыв обо всем на свете. В первый же год своего пребывания в Политехнической школе он опубликовал

в «Nouvelles annales de mathématiques» изящный геометрический метод исследования кривизны поверхности. Но его успехи в черчении и в гимнастике по-прежнему оставляли желать много лучшего, а его привычка сообщать сразу готовый ответ, опуская все промежуточные рассуждения, привела к тому, что на выпускном экзамене по геометрии и стереометрии экзаменатор, не обладавший прозорливостью Тиссо, поставил Пуанкаре лишь удовлетворительную оценку.

По окончании второго курса Политехнической школы Пуанкаре в октябре 1875 года поступает в Горную школу. Он сознательно готовит себя к профессии инженера и заканчивает Горную школу в марте 1879 года, будучи третьим в своем выпуске. Получив назначение в Везуль, Пуанкаре проработал там с 1 апреля по 1 декабря 1879 года, после чего, получив приглашение от Канского университета, занял место преподавателя на факультете точных наук. И хотя в списках министерства общественных работ Пуанкаре продолжал числиться сначала как рядовой инженер, затем (с 1893 года) как старший инженер, генеральный инспектор шахт (с 1910 года), он в действительности давно уже стал преподавателем университета и легендарным ученым. Итак, Пуанкаре — ученый.

Свое призвание ученого Пуанкаре осознал в годы учения в Горной школе, когда он предпринял свои первые исследования, и мысли его обратились к более возвышенным темам.

Результатом трудов Пуанкаре явилась его докторская диссертация «О свойствах функций, определяемых дифференциальными уравнениями в частных производных», которую он защитил 1 августа 1879 года. Дарбу дал о диссертации Пуанкаре следующий отзыв: «Что особенно поражает нас в этом дебюте, так это решимость. . . отвага, с которой автор обратился к решению самых возвышенных, самых трудных и самых общих вопросов. Он берется за рассмотрение самых важных и самых существенных проблем».

В октябре 1881 года Пуанкаре переезжает в Париж и приступает к чтению лекций по анализу. С марта 1885 года Пуанкаре поручают чтение лекций по физической механике (впоследствии этот курс был переименован в математическую физику) и с августа 1886 года — по теории вероятности. После смерти Тиссерана, последовавшей в ноябре 1886 года, Пуанкаре возглавил кафедру математической астрономии и небесной механики, которую занимал до самой своей смерти. С 4 января 1893 года Пуанкаре занял пост члена Бюро долгот, в 1883—1897 годах был репетитором по анализу в Политехнической школе, затем (с 1904 по 1908 год) — профессором астрономии, любезно согласившись занять эту должность, чтобы воспрепятствовать закрытию кафедры. С 1902 года Пуанкаре заведовал кафедрой теории электричества Высшей школы ведомства связи.

31 января 1887 года Пуанкаре был избран членом Академии наук по отделению геометрии, которое он возглавил в 1906 году. 5 марта 1908 года Пуанкаре был избран членом Французской Академии.

Столь блестящая карьера имела под собой веские основания: замечательные работы, охватывающие почти все разделы математики и ее приложения, но в то же время группировавшиеся в основном вокруг теории обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными.

Вскоре после завершения работы над диссертацией, привлеченный блестящими, но не доведенными до конца работами Фукса по теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка, Пуанкаре приступает к *интегрированию всех линейных дифференциальных уравнений с алгебраическими коэффициентами* и полностью решает эту задачу, еще не подозревая о ее трудности и общности. Он начал с обобщения понятия периодических функций (круговые или эллиптические функции, введенные Шварцем для одного частного случая, скорее помешали, чем помогли Клейну в решении той же задачи). Пуанкаре пренебрег результатом Шварца, но оценил всю мощь идеи Фукса, той самой, которая легла в основу идеи, предложенной Абелем. Он подошел к решению задачи с *более общих позиций*: построив а priori дискретные группы более общего вида (их в честь Фукса он назвал *фуксовыми группами*) и мероморфные функции, инвариантные относительно подстановок таких групп (*фуксовы функции*), Пуанкаре получил ключи от алгебраического мира. (В частном случае решением рассмотренной Пуанкаре задачи являются эллиптические функции.) Действительно, выяснилось, что:

1) две фуксовы функции, принадлежащие одной и той же группе, связаны между собой алгебраическим соотношением;

2) наоборот, координаты точки, лежащей на произвольной алгебраической кривой, можно представить с помощью фуксовых функций одного и того же параметра;

3) общий интеграл линейного дифференциального уравнения *любого* порядка с алгебраическими коэффициентами получается с помощью *дзета-фуксовых функций*.

Пуанкаре не только углубил наши представления о характере и форме вещественных интегралов дифференциального уравнения с вещественными коэффициентами, но и одновременно осознал фундаментальную роль особых точек, среди которых он различал *седла*, *узлы*, *фокусы* и, наконец, *центры*; указал на принципиальное значение *предельных* циклов и *замкнутых*, или *периодических*, интегралов, занявших важное место в его более поздних работах по небесной механике и не утративших своего значения и в современной теории нелинейных колебаний.

Работа Пуанкаре была по достоинству оценена Камиллом Жорданом, сказавшим: «Она выше обычных похвал. К ней в полной мере можно отнести слова, некогда написанные Якоби Абелю: „Ее автору удалось решить задачу, о которой до него никто не смел и мечтать“».

Именно поэтому, когда шведский король Оскар II в 1889 году объявил конкурс на лучшее исследование по *проблеме трех тел*, А. Пуанкаре, великолепно подготовленный собственными работами по дифференциаль-

ным уравнениям, сумел найти оригинальные подходы к решению. Вейерштрасс удостоил мемуар Пуанкаре следующего отзыва: «Этот мемуар. . . несомненно заслуживает самой высокой оценки. . . Значение мемуара столь велико, что опубликование его откроет новую эру в истории небесной механики. . . Он относится к числу наиболее важных математических работ века. . .»

Начиная с этого момента Пуанкаре, чье имя приобрело широкую известность, не перестает интересоваться небесной механикой. В многочисленных курсах, читаемых им по небесной механике в Сорбонне, находят свое отражение все новые и новые его открытия (такие, как *уравнения в вариациях и интегральные инварианты*). Эти курсы вплотную примыкают к его же «Новым методам небесной механики», «Лекциям по небесной механике», «Лекциям о фигурах равновесия жидкой массы» и, наконец, «Лекциям о космогонических гипотезах». Но этим его деятельность не исчерпывается. Нет такой области математики или физики, которая была бы ему незнакома. Вот, например, серия книг, в которых излагается курс математической физики, прочитанный им в Сорбонне: «Теория вероятностей», «Термодинамика», «Электричество», «Оптика», «Теория упругости», «Теория света», «Электромагнитные колебания», «Распространение тепла». По просьбе Высшей школы ведомства связи Пуанкаре также прочитал несколько курсов по различным техническим проблемам: телеграфному уравнению, теории телефона и беспроводной телеграфии.

Вместе с Жозефом Фурье Пуанкаре исходил из того, что «углубленное изучение природы является наиболее плодотворным источником математических открытий». И такое изучение привело его к открытию изящного метода решения задачи Дирихле, получившего название *метода выметания*, доказательству существования всех *собственных частот колеблющейся мембраны* методом, который предшествовал знаменитому методу Фредгольма решения линейных интегральных уравнений.

От исследований дифференциальных уравнений и периодических решений и алгебраических работ Пуанкаре естественно перешел к фундаментальным исследованиям по *топологии*, изложенным в шести мемуарах по *Analysis situs*. Эти работы по праву позволяют считать Пуанкаре одним из основоположников этой новой науки, испытывающей в наше время мощный подъем.

Во время создания этих научных работ, столь же обширных, сколь фундаментальных и разнообразных, мысли Пуанкаре обратились к вопросам философии науки. Именно так появилась серия известных работ, объединенных в четырех книгах: «Наука и гипотеза», «Ценность науки», «Наука и метод» и «Последние мысли».

В этих работах, о содержании которых в общих чертах можно судить по их названиям, изложен в свободной, непринужденной форме *метод точных наук*, в частности математики, смысл и роль постулатов и аксиом геометрии, важность дедуктивного и индуктивного мышления, роль и значение гипотез и постулатов в механике и в физике. . . В последней,

четвертой, книге, изданной посмертно, затрагиваются также соображения морали, которые великий ученый никогда не упускал из виду...

Прежде чем бросить беглый взгляд на деятельность столь грандиозного масштаба (Пуанкаре написал более 500 мемуаров и книг), естественно задать себе вопрос, как могло осуществиться такое чудо, причем за сравнительно небольшой срок. В действительности столь высокая продуктивность обусловлена прежде всего поистине ни на миг не прекращавшейся духовной деятельностью Пуанкаре, его гениальной интуицией, способностью налету схватывать все новое, быстротой его мышления, но не только всем этим. Не меньшую роль играла исключительная размеренность его жизни, о которой племянник Пуанкаре Пьер Бутру писал Миттаг-Леффлеру: «Он предаётся своим размышлениям на улице, направляясь в Сорбонну, присутствуя на заседаниях различных научных обществ, во время вошедших в привычку продолжительных прогулок после завтрака. Он размышляет у себя в прихожей, в зале заседаний Института, разгуливая взад и вперед мелкими шажками с сосредоточенным видом, позванивая связкой ключей. Он размышляет за столом, в кругу семьи, в гостиной, нередко обрывая разговор на середине и предоставляя своему собеседнику следовать за скачком, который совершила его мысль. Всю работу, сопутствующую открытию, дядя производит в уме, нередко даже не имея необходимости проверять свои выкладки или записывать доказательства на бумаге. Он ожидает, что истина прозвучит для него, как раскат грома, и считает, что ему, с его великолепной памятью, не составит труда сохранить истину».

С другой стороны: «Вместо того, чтобы идти прямо, ум его стремится двигаться от центра изучаемой им проблемы к ее периферии. Поэтому и на лекциях и в обычном разговоре следить за его рассуждениями довольно трудно, и подчас они кажутся неясными. Излагает ли он научную теорию или рассказывает анекдот, он почти никогда не начнет сначала, а внезапно забежит вперед, сообщит основной факт, опишет важное событие или даст характеристику главного действующего лица, о котором его собеседнику еще ничего неизвестно, поскольку дядя еще не успел дойти до него в рассказе».

«Этой живостью ума и объясняется необычайная подвижность мышления Пуанкаре, его способность заниматься различными вопросами и таким способом удовлетворять свою почти беспредельную любознательность».

«Привыкнув пренебрегать деталями и рассматривать лишь главное, он переходит от одной темы к другой с быстротой необыкновенной, и открываемые им факты как бы сами собой группируются вокруг некоего центра, легко и просто укладываясь в классификацию, проводимую им в очередном мемуаре».

Блестящие результаты, полученные Анри Пуанкаре, еще при его жизни были удостоены самых лестных наград и получили признание ученых всего мира. После избрания в Академию наук и получения премии ко-

роля Оскара II, он был удостоен золотой медали Лондонского Королевского астрономического общества, медали Сильвестра Лондонского Королевского общества, медали Лобачевского Казанского физико-математического общества, премии Бойяи Венгерской академии наук. . . Многие зарубежные академии и университеты избрали его своим иностранным членом, членом-корреспондентом или присудили ему степень доктора Honoris causa. Пуанкаре неоднократно получал приглашения выступить за границей с изложением своих идей или работ, и это во времена, когда подобные приглашения были чрезвычайной редкостью! Большинство этих приглашений было принято. Пуанкаре проявил себя как неутомимый путешественник и умел извлекать из таких поездок много полезнейших впечатлений.

Казалось, все сулило Анри Пуанкаре долгую жизнь и счастливую старость: размеренный образ жизни, правильное чередование размышлений и досуга, дружная семья, старавшаяся во всем помогать своему главе, друзья, коллеги, ученики, восторженный прием его поразительных результатов, его личные качества простого и доброго человека. . . Увы!

Резко ухудшившееся состояние здоровья вынудило Пуанкаре согласиться на серьезную, но не слишком тяжелую хирургическую операцию. Она была успешно произведена 9 июля. Пуанкаре был уже на пути к выздоровлению, когда 17 июля 1912 года эмболия сразила его.

«Перестал жить мозг точных наук, — сказал, узнав о смерти Пуанкаре, Пенлеве и добавил — . . . Он все постиг, все углубил. Обладая необычайно изобретательным умом, он не знал пределов своему вдохновению, неутомимо прокладывая новые пути, и в абстрактном мире математики неоднократно открывал неизведанные области. Всюду, куда только проникал человеческий разум, сколь бы труден и тернист ни был его путь — будь то проблемы беспроволочной телеграфии, рентгеновского излучения или происхождения Земли — Анри Пуанкаре шел рядом, чтобы оказать необходимую помощь и продолжить свои исследования, чтобы разрабатывать золотоносную жилу».

«Вместе с великим французским математиком от нас ушел единственный человек, разум которого мог охватить все, что создано разумом других людей, проникнуть в самую суть всего, что постигла на сегодня человеческая мысль, и увидеть в ней нечто новое. Преждевременная утрата столь поразительной интеллектуальной силы означает для нас катастрофу».

Академия наук, издавая полное собрание трудов Пуанкаре, выразила тем самым желание воздвигнуть единственно достойный его памятник. Мы надеемся, что к столетию со дня рождения знаменитого ученого это издание будет завершено. Оно явится еще одним подтверждением того, что Нанси и Лотарингия могут по праву с гордостью назвать Пуанкаре среди своих сынов.



А Пуанкаре на пляже летом 1911 г.

АНРИ ПУАНКАРЕ И МАТЕМАТИКА *

Ж а к А д а м а р

Сегодня Франция чествует одного из величайших своих сынов. Вряд ли найдется человек, которому не было бы известно имя Анри Пуанкаре, вызывающее в душе каждого француза чувство законной гордости не только за великолепные достижения самого Пуанкаре, но и за то влияние, которое он оказал на другие области деятельности человеческого духа. Работа математика не видна постороннему взгляду. Она составляет основу, скрытый фундамент здания, которым каждый может восхищаться, но которое нельзя было бы возвести без этого прочного фундамента.

На мою долю сегодня выпала особая честь: на нескольких примерах я должен попытаться нарисовать картину грандиозной деятельности, знаменующей собой целую эпоху в развитии человеческого духа. Обычно, когда перед нами возникает столь нелегкая задача, мы стремимся подчеркнуть единство и целостность того, что сделано великим человеком, абстрагируясь от индивидуальных черт творца, тем более бросающихся в глаза, что речь идет о гении столь же своеобразном, сколь и мощном.

Однако именно сегодня подобная точка зрения, по моему глубокому убеждению, совершенно неприемлема для нас, ибо встав на нее, мы бы умалили и исказили то, что свершил Анри Пуанкаре.

«В математике все мы скорее слуги, нежели хозяева», — сказал как-то Эрмит. Обычно при выборе задач ученый следует своему вкусу и наклонностям. Так поступает большинство исследователей.

Большинство, но не Пуанкаре. Он черпал темы своих исследований не из возможностей своего ума, а исходил из потребностей науки. Именно эти потребности неотступно занимали его мысли. Именно эти возникшие в какой-то мере извне потребности и (если воспользоваться другим любимым выражением Эрмита) «неведомая сила» рождали в Пуанкаре тот свет, который сначала был виден лишь ему одному, но впоследствии сиял для всех.

Я позволю себе кратко напомнить, в каком состоянии находилась математическая наука, когда в нее пришел Пуанкаре.

XVIII век завещал XIX веку две великие проблемы: интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений и интегрирование диффе-

* Oeuvres, t. XI. Livre du Centenaire. Paris, Gauthier-Villars, 1956, p. 50—57.

ренциальных уравнений с частными производными. Наука XIX века открыла новый путь к решению этих проблем. Она обнаружила, что многие свойства уравнений неожиданно проясняются, если входящим в уравнения переменным придавать не только вещественные, но и комплексные значения.

Такая «теория функций» или, скорее, «теория аналитических функций» была создана во Франции трудами Коши и в Германии — трудами Вейерштрасса. Каждый из этих ученых внес свой вклад в обоснование теории аналитических функций и заложил фундамент теории дифференциальных уравнений.

Коши умер в 1857 году. Вейерштрасс пережил его на 40 лет и стал объектом безудержного поклонения в немецкой науке. Однако один из наиболее знаменитых учеников Вейерштрасса — Миттаг-Леффлер — сообщил нам, что в конце жизни Вейерштрасс не без грусти взирал на превосходство немецкой науки, достигнутое во многом его трудами, перед наукой других стран.

Причиной пессимистических настроений великого аналитика явилось научное событие первостепенной важности: фуксовы функции были (как тогда говорили) «разгромлены» в серии блестящих мемуаров Анри Пуанкаре.

Одним из прекраснейших достижений теории аналитических функций была теория эллиптических функций. Однако после грандиозного обобщения теории, предпринятого Пуанкаре, выяснилось, что бесконечное множество других функций, изучаемых в общей теории, функций, глубоко различных, но в то же время имеющих много общего, обладает не менее изящными свойствами, чем эллиптические функции.

Можно сказать, что фуксовы функции стали своеобразными «ключами от алгебраического мира» и позволили решить одну из великих проблем, о которых мы упоминали вначале, — проблему интегрирования дифференциальных уравнений для важного частного случая: линейных дифференциальных уравнений с алгебраическими коэффициентами.

Еще до мемуара о фуксовых функциях Пуанкаре опубликовал несколько кратких заметок по арифметике. Об одной из них я хочу сказать несколько слов, поскольку это позволит мне продемонстрировать одну из сторон его личности. Она посвящена методу бесконечного спуска, блестящему изобретению Эрмита, которое неизменно вызывает восхищение, оставляя нас в то же время в неведении относительно того, каким образом его автору удалось до него додуматься.

Однако то, что остается для нас неясным у Эрмита, становится прозрачным у Пуанкаре, и этот стиль, в котором ясность сочетается с прямым подходом к решению проблемы, присущ всем работам Пуанкаре.

Может быть, в отличие от своего великого предшественника, который говаривал, что в подобных случаях он руководствуется «необъяснимой интуицией», Пуанкаре чуждался интуитивных соображений? Чтобы понять всю нелепость подобного предположения, достаточно вспомнить

хорошо известные внезапные озарения, столь характерные для начального периода его деятельности, которые привели к созданию теории фуксовых функций. Другим типичным примером влияния бессознательного может служить то место в томе III «Новых методов небесной механики», где Пуанкаре говорит о вариационном исчислении. Тогда же Вейерштрасс обогатил вариационное исчисление строгим методом, позволявшим дать исчерпывающий и однозначный ответ на интересовавший Пуанкаре вопрос. Однако к концу жизни Вейерштрасс не слишком заботился о публикации своих результатов, вследствие чего многие из них в течение долгого времени оставались достоянием лишь тех, кто слушал его лекции.

Был ли Пуанкаре известен метод Вейерштрасса или Пуанкаре заново переоткрыл его? Чтение знаменитого труда Пуанкаре не дает ясного ответа на эти вопросы: на одной и той же странице мы встречаем в нем как фразы, которые мог написать тот, кто ничего не знал о методе Вейерштрасса, так и фразы, которые могли выйти из-под пера человека, знакомого с этим методом. Столь явное раздвоение личности — а то, о чем мы только что рассказали, есть не что иное, как самое настоящее раздвоение личности — свидетельствует о взаимном влиянии двух слоев бессознательного, каждый из которых следует «своим собственным путем», причем отдельные этапы этого пути остаются для нас покрытыми мраком неизвестности.

Все же я должен признать, что приведенный мной случай является совершенно исключительным. Сколь ни глубоко уходят корнями в бессознательное идеи Пуанкаре, его рассуждения всегда проводятся в столь явном виде, что у каждого рождается иллюзия, будто и он мог бы достичь тех же результатов.

За появлением теории фуксовых функций и последующими событиями математики следили с неослабевающим восхищением. Их энтузиазм поддерживался той невероятной быстротой, с которой одно открытие следовало за другим. Лишь в одном XI томе журнала «Bulletin de la Société mathématique de France» Пуанкаре опубликовал три мемуара, в каждом из которых содержалось существенное продвижение вперед в той или иной области.

В последующие годы мемуары, содержавшие новые результаты принципиального значения, также продолжали выходить в свет со сказочной быстротой.

В каких же направлениях велись столь плодотворные исследования?

Во всех. Не было буквально ни одного важного вопроса, привлекавшего внимание геометров, путь к решению которого не был бы указан гением молодого ученого.

В первую очередь это теория аналитических функций, две большие главы которой, оказавшиеся особенно трудными и не поддававшиеся усилиям предшественников Пуанкаре, были выведены им из того затруднительного положения, в котором он их застал. Мы отнюдь не намерены за-

малчивать открытия первостепенной важности, сделанные другими учеными, однако недостаток времени не позволяет нам говорить здесь о них, ибо нас ждет весьма обширная тема — дифференциальные уравнения.

Точно так же мы не сможем упомянуть о том прогрессе, который был достигнут благодаря работам Пуанкаре во взглядах, уже существовавших до него в теории дифференциальных уравнений. В то же время нельзя забывать и о том, что следуя уже проторенными путями. Пуанкаре сумел найти глубоко оригинальный подход и, доказав его плодотворность, оставил область комплексного переменного с тем, чтобы заняться изучением возможных форм вещественных кривых, удовлетворяющих дифференциальному уравнению.

Здесь вновь выяснилось одно обстоятельство, которое уже встречалось ранее в других главах истории математики. Если говорить о решении одного алгебраического уравнения, то первые алгебраисты и их последователи вплоть до последней четверти XVIII века, как известно, ограничивали свое рассмотрение отдельными корнями уравнения, и такой подход не позволил им добиться решающего успеха. Плодотворным оказался совсем иной подход, основанный на рассмотрении множества всех корней алгебраического уравнения и соотношений, возникающих между ними. Пуанкаре продемонстрировал нам плодотворность аналогичного принципа в изучении дифференциальных уравнений.

Что можно сказать о различных кривых, удовлетворяющих одному и тому же дифференциальному уравнению, которое для начала мы будем считать уравнением первого порядка? Лишь то, что никакие две из них не могут пересекаться нигде, кроме особых точек. Столь скудных на первый взгляд сведений оказалось достаточно для того, чтобы Пуанкаре принял их за отправную точку своих исследований.

Однако Пуанкаре привлек на помощь весьма существенное соображение, ускользнувшее от его предшественников. Риману принадлежит одно довольно наивное на первый взгляд замечание. Наивность этого замечания особенно удивительна, если учесть ту важную роль, которую оно сыграло в истории науки. Если бы Коши в своем первом мемуаре, опубликованном в 1813 году, понял бы это, то сорок лет спустя он не уступил бы Риману чести завершить создание теории алгебраических функций. В свою очередь Риман, сформулировав принцип и применив его для завершения теории алгебраических функций, не понял, что область применимости принципа выходит за рамки интересовавшей его проблемы. Лишь Пуанкаре показал, что сформулированный Риманом принцип оказывается неопределимым при изучении дифференциальных уравнений, и с его помощью рассмотрел возможные формы кривых, определяемых этими уравнениями.

Представление о том, какими могут быть кривые, определяемые дифференциальными уравнениями, можно было бы получить, рассматривая простые случаи элементарно интегрируемых уравнений. Однако при этом можно было совершить ошибку, которую следует иметь в виду каждому,

кто интересуется научным методом. Представим, что имеется задача, решение которой известно в некоторых частных случаях. По свойствам известных решений, полученных для этих случаев, мы пытаемся вывести заключение о том, какими должны быть решения других задач, которые мы считаем аналогичными исходной задаче. Ничего другого нам не остается, однако не следует упускать из виду, что между теми и другими задачами могут существовать некие скрытые, но глубокие различия, которые не позволят перенести на одну задачу методы, оказавшиеся успешными при решении другой.

Именно так и происходит в действительности при рассмотрении дифференциальных уравнений первого порядка. В элементарных случаях такие уравнения можно рассматривать с помощью их интегралов, т. е. приравнивать нулю некоторую функцию координат, но при этом такие фигуры, которые изучал в своих работах Пуанкаре, не возникают.

Однако исследование дифференциальных уравнений первого порядка представляло собой лишь первый этап обширной программы. Исследование уравнений второго порядка естественно привело Пуанкаре к изучению объекта, который, как и весь современный анализ, до конца жизни неизменно привлекал к себе его внимание, — дифференциальных уравнений небесной механики, которые описывают движения планет, испытывающих действие не только силы притяжения со стороны Солнца, но и сил взаимного притяжения.

Вопрос об интегрировании этой системы уравнений в элементарном смысле даже не возникает, поскольку для этого необходимо было бы знать достаточное число интегралов. Однако в действительности нужного количества интегралов мы не знаем, и, более того, Пуанкаре доказал, что интегралов, которые не были бы функциями десяти классических интегралов, не существует.

Итак, прямой путь оказался закрытым, и исследования Пуанкаре приняли иное направление: существование периодических решений. Если бы какая-либо планета, например Земля, не имела иных соседей, кроме Солнца, и была подвержена лишь действию силы притяжения со стороны Солнца, то она вела бы себя так, как представляли себе это Птолемеи и даже Кеплер: по истечении каждого года она оказывалась бы в исходной точке и продолжала свое движение, совершая каждый последующий оборот точно так же, как предыдущий. Движение было бы периодическим. Но в действительности дело обстоит не так, ибо Земля подвержена притяжению и других планет, которые, кроме того, оказывают возмущающее влияние друг на друга. Могут ли при этих новых условиях существовать периодические движения в системе, которую для простоты мы будем считать состоящей лишь из трех тел? Вот вопрос, не перестававший волновать Пуанкаре с первых лет его деятельности, лет, которые выше мы охарактеризовали как необычайно плодотворные, и вплоть до момента, когда смерть подстерегла его, — до выхода последнего мемуара,

Mon cher ami,

Je vous ai parlé, lors de votre dernière
visite, d'un travail qui me retient depuis deux
ans. Je ne suis pas plus avancé et je me décide
à l'abandonner provisoirement pour lui donner
le temps de mûrir. Cela irait bien, si cela j'étais
 sûr de pouvoir le reprendre; à mon âge, je ne
peux en répondre, et les résultats, obtenus, acceptés
de cette manière, sur une voie nouvelle
et inexplorée, me paraissent trop pleins de
promesses malgré les déceptions qu'ils m'ont
données pour que je me résigne à les sacrifier.
Dans ces conditions, trouvez-les, vous, convenables
de publier en même temps l'un de ces exposés
à l'Académie, j'ai posé, le problème que je me suis
proposé, et les résultats de l'effort que j'ai fait
pour le résoudre. Ce n'est pas une solution, mais elle
paraît peut-être utile. Ce qui m'embarrasse, c'est que
je suis obligé de mettre beaucoup de figures, justement
parce que je ne puis m'en tenir à une règle générale, mais
que j'ai seulement esquissé des solutions particulières.
De là, moi, je vous prie, ce que vous pensez de cette
question et ce que vous me conseillez.

Votre ami de vous,

Poincaré

в трагическом предисловии к которому слышится беспокойство, к сожалению, глубоко обоснованное, внушаемое плохим состоянием здоровья.

Именно периодические решения, о которых мы только что упоминали, стали в руках Пуанкаре тем уникальным инструментом, который позволил проникнуть в область, считавшуюся ранее недоступной.

С этой точки зрения сравнительно простой случай дифференциального уравнения второго порядка, определяющего кривую в обычном пространстве, уже является типичным. Если интересующая нас кривая замкнута, то кривые — решения — в ее окрестности «почти замкнуты» и любая из них, выйдя из некоторой точки, периодически возвращается в окрестность той же точки. Конфигурации, образуемые последовательными дугами, — конфигурации, которые в некоторых случаях допускают вполне строгое рассмотрение методами Пуанкаре, — показывают, с одной стороны, сколь причудливыми и запутанными могут быть движения, если их рассматривать одновременно и в прошлом, и в будущем, а с другой стороны, в какой мере трудности, возникающие в классических методах небесной механики, обусловлены природой вещей.

Придя к приведенным выше отрицательным выводам, показавшим, сколь незначительного прогресса удалось бы достичь в лучшем случае, Пуанкаре в то же время предложил новый подход, позволивший продвигаться вперед, не теряя «твердой почвы» под ногами. Введенное им понятие по своим свойствам напоминало те самые интегралы, о бесперспективности дальнейших исследований которых мы только что говорили. Новизна понятия интегрального инварианта заключалась в том, что в этом понятии речь шла о рассмотрении не одного изолированного решения, а о рассмотрении вполне определенных или, по крайней мере, каких-то решений. Интегральный инвариант — это интеграл, т. е. величина, остающаяся постоянной в силу дифференциальных уравнений, но интеграл коллективный, носителем которого является некоторое *множество* решений. Именно это понятие позволило Пуанкаре, в частности, получить наиболее существенные из имеющихся в нашем распоряжении результатов по столь важному вопросу, как устойчивость солнечной системы.

Изложению новых мощных методов посвящен знаменитый труд Пуанкаре «Новые методы небесной механики». Роль, которую этот труд призван сыграть не только во всей астрономической науке, но и в решении других проблем механики, становится все более очевидной.

Сказанное, разумеется, отражает лишь незначительную часть тех великих достижений, которыми мы обязаны Пуанкаре в необъятной области — теории дифференциальных уравнений. Примером задач совершенно иного типа, возникших из физических приложений, с тех пор, как наука занялась изучением уравнений в частных производных, — задач, которые, на первый взгляд, аналогичны (с некоторыми усложнениями) задачам теории обыкновенных дифференциальных уравнений, но в действительности принципиально отличны от них, — может служить знаменитая задача Дирихле.

Какие только усилия не были затрачены на решение этой задачи! К многочисленным методам, разработанным для ее решения, Пуанкаре прибавил еще один — метод выметания. Существен ли его вклад в решение задачи Дирихле? Ответом, причем весьма красноречивым, служит все последующее развитие теории: с появлением метода выметания все работы по задаче Дирихле так или иначе используют этот метод, играющий и в настоящее время основополагающую роль в наших представлениях об этом разделе математики.

А сколько еще не менее крупных результатов, о которых я должен был бы упомянуть, но не упомянул в своем докладе, было получено Пуанкаре! Они также составляют необходимую основу будущих успехов. Сколько идей осталось незавершенными, сколько существенных точек зрения на основы науки — невысказанными, когда смерть вырвала Пуанкаре из наших рядов!

Эти проблемы он завещал нам. Я успел дать лишь чрезвычайно краткий и совершенно недостаточный обзор тех из них, которые и сейчас, более чем полвека спустя, служат основой успехов нашей науки и во многих отношениях определяют наиболее существенные достижения человеческого ума вообще.

ПУАНКАРЕ И АРИФМЕТИКА *

А н д р е В е й л ь

Позвольте мне прежде всего поблагодарить наших голландских коллег, организовавших это торжественное заседание, посвященное Анри Пуанкаре, за их любезное приглашение. Я принял его с тем большим удовольствием, что оно представило мне случай обратить внимание на мало известные, но заслуживающие изучения стороны деятельности Пуанкаре.

К сожалению, недостаток времени не позволяет мне коснуться, хотя бы кратко, трудов Пуанкаре по алгебраической геометрии и теории абелевых функций. Тем не менее я все же хочу отметить ту принципиальную важность и глубокое влияние, которое оказали работы Пуанкаре на дальнейшее развитие этих областей математики.

Работы Пуанкаре по арифметике занимают целый том его Собрания сочинений (*Oeuvres*, t. V), однако все они имеют неодинаковую ценность. Некоторые из них представляют интерес лишь в том отношении, что показывают нам, с каким вниманием Пуанкаре в начале своей деятельности изучал все работы Эрмита и как он усваивал его методы и результаты. Иногда говорят, что Пуанкаре мало читал. В томе V Сочинений Пуанкаре особенно поражает, как мало он знал о работах, написанных на немецком языке. Чтение немецких работ явно давалось Пуанкаре с большим трудом, однако он не производит впечатления невежды или самоучки.

Очевидно, под влиянием Эрмита Пуанкаре посвятил многие свои первые работы алгебраической и арифметической теории форм, в особенности кубических тернарных и кватернарных форм. Размышления на эту тему привели Пуанкаре, в частности, к доказательству и обобщению теоремы Жордана, согласно которой лишь конечное число классов алгебраических форм эквивалентно заданной форме с дискриминантом, отличным от нуля (*Oeuvres*, t. V, p. 299—305). Этот вопрос, долгое время остававшийся незаслуженно забытым, заслуживает того, чтобы о нем вспомнили, например, для того, чтобы обобщить теорему Жордана на случай поля алгебраических чисел. Для этого, несомненно, потребуется обратиться к работам Пуанкаре.

Позвольте мне сказать несколько слов о самом Пуанкаре. Вот что он сам рассказывает о своих первых исследованиях в знаменитом отрывке, повествующем об открытии фуксовых функций (*Science et méthode*, p. 52):

* *Oeuvres*, t. XI. Livre du Centenaire. Paris, Gauthier-Villars, 1956, p. 206—212.

«Я занимался изучением некоторых вопросов арифметики без особого успеха, не подозревая, что предмет моих исследований может иметь какую-то связь с моими прежними работами (по теории фуксовых функций). Разочарованный своими неудачами, я решил провести несколько дней на побережье и поразмыслить совсем о других вещах. Однажды, когда я прогуливался по обрывистому берегу, мне пришла в голову идея, столь же краткая, сколь неожиданная и вполне определенная, что арифметические преобразования неопределенных тернарных квадратичных форм должны быть тождественны преобразованиям неевклидовой геометрии.

Вернувшись в Кан, я тщательно обдумал эту идею и попытался вывести из нее некоторые следствия. Пример квадратичных форм показал мне, что существуют фуксовы группы, отличные от тех, которые соответствуют гипергеометрическому ряду, и я увидел, что смогу воспользоваться ими в теории тета-фуксовых рядов. . .»

Так Пуанкаре, пользуясь средствами арифметики, построил первый пример дискретной группы и автоморфных функций. Известно достаточно широкое обобщение этих результатов Пуанкаре на случай теории автоморфных функций нескольких переменных. Здесь прежде всего необходимо назвать работы Зигеля. Опираясь на свой пример (а также на примеры, полученные при изучении гипергеометрического ряда), Пуанкаре тотчас же разработал общую чисто геометрическую теорию всех фуксовых групп и автоморфных функций, которые были в его распоряжении. Заметим, кстати, что до сих пор мы не располагаем аналогом теории Пуанкаре для автоморфных функций нескольких переменных и не имеем общего метода построения дискретных групп, порождающих такие функции, кроме тех, которые возникают в арифметике.

Интерес к автоморфным функциям, связанным с теорией тернарных неопределенных квадратичных форм, носит не только характер исторического курьеза. Эти функции обладают одним свойством, которое, будучи впоследствии открытым Пуанкаре, вызвало всеобщее удивление. Именно это свойство позволило обобщить теорию преобразований модулярных функций. Оно заслуживает того, чтобы остановиться на нем несколько подробнее.

Пусть F — неопределенная квадратичная форма с вещественными коэффициентами от трех переменных X, Y, Z . На проективной плоскости уравнение $F=0$ определяет некоторое вещественное коническое сечение C . Кривая C допускает параметрическое представление, если координаты X, Y, Z записать в виде полиномов второй степени с вещественными коэффициентами от вещественного параметра τ . Пусть Γ означает подгруппу группы вещественных линейных унимодулярных преобразований переменных X, Y, Z , оставляющих инвариантной F . Всякая подстановка S из Γ переводит C в C и индуцирует вещественную гомографическую подстановку $\bar{S}$ параметра τ . Соответствие между S и $\bar{S}$ есть изоморфизм между Γ и группой вещественных гомографических преобразований $\bar{\Gamma}$. Пусть G — подгруппа индекса 2 группы Γ , образованная подстановками, оставляющими инвариантным

направление обхода кривой C ; пусть $\bar{G}$ — соответствующая подгруппа в $\bar{\Gamma}$. Тогда $\bar{G}$ есть множество вещественных гомографических подстановок параметра τ , переводящих в себя верхнюю полуплоскость комплексного переменного τ . Следуя Пуанкаре, мы можем рассматривать $\bar{G}$ как группу неевклидовых сдвигов в этой полуплоскости.

Предположим теперь, что коэффициенты формы F — целые числа. Пусть G' и g — подгруппы группы G , образованные соответственно подстановками из G с рациональными и целыми коэффициентами. Пусть $\bar{G}'$ и $\bar{g}$ — соответствующие подгруппы группы $\bar{G}$. Из параметрического представления G , вообще говоря, взаимно однозначного и известного под названием «преобразования Кэли», следует, что группа G' всюду плотна в G . Необходимо различать два случая, A и B , в зависимости от того, допускает ли C параметрическое представление с рациональными коэффициентами или нет. Для того чтобы имел место случай A , необходимо и достаточно, чтобы на C была одна рациональная точка, или чтобы форма F «представляла нуль», т. е. чтобы уравнение $F=0$ имело решение в целых числах. Тогда при подходящем выборе параметра τ подстановки группы $\bar{G}'$ будут иметь рациональные коэффициенты.

Как известно, Пуанкаре весьма скоро обнаружил, что $\bar{g}$ является «фуксовой группой». Точнее говоря (см. Oeuvres, t. V, p. 267—274), в случае A группа $\bar{g}$ оказалась соизмеримой с модулярной группой (следуя Пуанкаре, условимся называть две группы соизмеримыми, если их пересечение имеет конечный индекс в каждой из них). Изучение ее тогда в принципе сводится к теории модулярных функций. Следует заметить, что в этом случае $\bar{g}$ непременно содержит параболические подстановки. Таким образом, при подходящем выборе τ функциями, инвариантными относительно этой группы, будут периодические функции, допускающие разложение в ряд Фурье. Известно, сколь важную роль играют такие разложения в теории модулярных функций, в особенности в ее арифметических аспектах. Об этом свидетельствуют, например, работы Гекке.

Наоборот, в случае B группа $\bar{g}$ не может содержать параболической подстановки, и, следовательно, фундаментальная область компактна (Oeuvres, t. V, p. 272). С точки зрения чистой теории функций это в принципе упрощает ее изучение. Зато мы теряем возможность разлагать функции в ряд Фурье. Может быть, именно здесь наглядно проявляется наше еще глубокое невежество в вопросах, связанных с автоморфными функциями, отвечающими таким группам.

Пусть S — подстановка из группы G' (какой из двух случаев — A или B — мы рассматриваем, несущественно). Ее можно записать в виде $a^{-1}T$, где a — целое число, а T — подстановка с целыми коэффициентами. Если U — произвольная подстановка с целочисленными коэффициентами, то для того, чтобы $S^{-1}US$ также имела целочисленные коэффициенты, достаточно, чтобы $U \equiv 1 \pmod{D}$, где 1 означает тождественную подстановку, а D — детерминант подстановки T . Как заметил Пуанкаре, отсюда тотчас

же следует, что при любом S из G' группы g и $S^{-1}gS$ соизмеримы. Таким образом, применение общих принципов теории автоморфных функций позволяет непосредственно утверждать, что если f — фуксова функция, принадлежащая группе $\bar{g}$, то между f и ее образом при любой подстановке $\bar{S}$ из $\bar{G}'$ существует алгебраическое соотношение. Следовательно, группа $\bar{g}$, оставляющая функцию f инвариантной, содержится в гораздо более широкой группе $\bar{G}'$, которая также всюду плотна в $\bar{G}$, и содержит преобразования, переводящие f в функцию, связанную с f алгебраическим соотношением. В случае A этот результат по существу совпадает с тем, который привел к возникновению теории преобразований модулярных функций и «модулярных соответствий». Именно на нем основана, например, вся теория Гекке и нескончаемые следствия, которые из нее вытекают. Следует ли искать причину того, что к решению аналогичных проблем для случая B еще не приступали, несмотря на всю настойчивость, с которой Пуанкаре обращал наше внимание на их важность, лишь в отсутствие инструмента, сравнимого по удобству с рядом Фурье? Хотелось бы надеяться, что эти проблемы удастся решить в ближайшем будущем, быть может, в свете недавно полученных результатов о соответствии между алгебраическими кривыми.

Последняя работа Пуанкаре по арифметике (Oeuvres, t. V, p. 483—548) также берет свое начало в его размышлениях над теорией форм, однако здесь он уже не столь далек от принципов традиционной теории, в которой основная роль отводится линейной группе. Работа над теорией фуксовых функций и влияние Клейна привело Пуанкаре к изучению трудов Римана, где основным было понятие бирациональной инвариантности. Это позволило ему осознать, что некоторые важные свойства тернарной формы $F(X, Y, Z)$, например ее свойство представлять нуль, в действительности присущи кривой $F(X, Y, Z)=0$, инвариантно не только относительно проективных, но и бирациональных преобразований с рациональными коэффициентами. На эту тему Пуанкаре опубликовал в 1901 году мемуар, который по его же собственным словам содержал «скорее программу исследований, нежели законченную теорию».

Результаты, полученные Пуанкаре в этом мемуаре относительно кривых рода 0, в действительности не были новыми. Сегодня мы с легкостью выводим их из теории алгебраических кривых с константами из произвольного поля. Важность и оригинальность мемуара состоит в рассмотрении кривых рода 1 над полем рациональных чисел, в частности кубических кривых. Именно здесь Пуанкаре вводит понятие *ранга* таких кривых. Ранг кривой — это, грубо говоря, наименьшее число рациональных точек на кривой, отправляясь от которых все остальные точки той же кривой можно получить с помощью теоремы сложения для эллиптических функций, униформизирующих эту кривую. Более точно ранг кривой определяется как ранг группы рациональных точек на якобиане кривой. Пуанкаре высказал гипотезу о том, что ранг кривой рассматриваемого типа всегда конечен. Из его рассуждений утверждать конечность ранга со всей определенностью

было нельзя. Гипотеза Пуанкаре была доказана Морделлом, сформулировавшим свою знаменитую теорему. Доказательство Морделла основано на бесконечном спуске путем «деления пополам» эллиптических функций. Часть выкладок Пуанкаре эквивалентна трисекции, что в принципе, доведи он их до конца, должно было бы привести к тем же результатам, но ценой значительных усложнений. Пуанкаре так и не сделал решающего шага, и правильность его идей получила подтверждение лишь в свете работы Морделла и последующих исследований. В том же мемуаре Пуанкаре неявно содержится и понятие якобиана кубической кривой рода 1 над полем рациональных чисел, однако решить, владел ли он уже тогда этим понятием, трудно, ибо между мемуаром Пуанкаре и современными исследованиями, в которых это понятие было уточнено и распространено не только на кривые рода 1, но и на кривые произвольного рода, нет никакой связи.

Мемуар Пуанкаре имеет историческое значение со всех указанных точек зрения. То же можно сказать и о содержащихся в нем замечаниях относительно кривых, род которых больше 1, или о том месте, где Пуанкаре переносит на эти кривые понятие ранга, введенное ранее для кривых рода 1. То, что ранг этот всегда конечен не только для кривых над полем рациональных чисел, но и над любым полем алгебраических чисел с характеристикой, отличной от нуля, я доказал в своей диссертации, вдохновленной доказательством Морделла для рода 1. Недавно эти результаты получили дальнейшее существенное развитие в диссертации Неропа. Однако наши знания о кривых, не имеющих ни одной рациональной точки и, следовательно, бирационально неэквивалентных своему якобиану, остаются весьма неполными, даже если говорить о кривых рода 1. Для этих кривых несомненный интерес представляло бы рассмотрение их неразветвленных накрытий, т. е., если воспользоваться классической терминологией, кривых, в которые переходят данные кривые при «преобразовании» соответствующих эллиптических функций. Сам Пуанкаре рассмотрел кубические кривые, служащие образом некой кубической кривой при преобразованиях третьего порядка. Следовательно, более внимательное изучение его мемуаров может привести к новым результатам. Надеюсь, что сказанное мной послужит достаточно убедительным доводом, подтверждающим основную мысль моего доклада. Труды Пуанкаре, с какой бы точки зрения мы ни подходили к их оценке, принадлежат не только истории нашей науки, но и являются неотъемлемой частью ее сегодняшнего развития.

ПУАНКАРЕ И ТЕОРИЯ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ*

Г а н с Ф р е й д е н т а л ь

Фуксовы функции, которые в наши дни принято называть автоморфными, составляют первую главу в научном наследии Пуанкаре. Ей предшествуют лишь диссертация и небольшое число работ, которыми без особого ущерба для их автора вообще можно пренебречь. Именно этой первой главе и суждено было несколько десятилетий спустя первой достичь того состояния, когда о математической теории начинают говорить, что она уже «стала классической».

Пусть же это соображение в какой-то мере примирит вас с выбором докладчика, неизменно выступавшего в театре автоморфных функций лишь в роли заинтересованного зрителя, выбором весьма спорным, но вынужденным!

Я принял на себя эту обязанность, лишь когда выяснилось, что гармонии торжеств, до начала которых оставалось 15 дней, угрожает серьезная опасность. Позвольте же мне подойти к теме моего доклада как историку, который погружается в прошлое, дабы вы могли составить хотя бы некоторое представление об эпохе, завершившейся в тот момент, когда первая глава в научной биографии Пуанкаре была признана классической.

Всем присутствующим хорошо известно то место, которое занимают в истории анализа автоморфные функции, теория которых была разработана Пуанкаре в 1881 году. С помощью автоморфных функций и сам Пуанкаре, и Феликс Клейн пытались решить проблему униформизации алгебраических и даже аналитических функций и римановых поверхностей. Известно также, что эти попытки, столь же упорные, сколь и блестящие, не были достаточно подготовлены и не привели к желаемому результату, но подготовили окончательное решение проблемы униформизации четверть века спустя.

Такова вкратце история автоморфных функций. Будучи формально правильной, она тем не менее может создать у непосвященного человека неверное представление обо всех наиболее важных пунктах развития теории. История всегда сложнее, чем думают потомки.

Начать с того, что когда Пуанкаре в 1880—1881 годах опубликовал свои первые работы, никакой проблемы униформизации не было, или,

* Oeuvres, t. XI. Livre du Centenaire. Paris, Gauthier-Villars, 1956, p. 212—219.

скорее, если такая проблема когда-либо и возникла, то ее давно уже успели решить. Столь парадоксальное утверждение, очевидно, нуждается в обосновании.

Первая нетривиальная проблема униформизации была решена Абелем и Якоби. Речь шла об униформизации алгебраической функции, определяемой соотношением

$$w^2 = R(z), \quad (1)$$

где R — полином третьей или четвертой степени. Эллиптический интеграл первого рода

$$u = \int_{z_1} \frac{dz}{w} \quad (2)$$

есть многозначная двоякопериодическая функция. Функция, обратная эллиптическому интегралу первого рода, обладает двоякой периодичностью и порождает однозначное отображение плоскости u на риманову поверхность (z, w) . При этом отображении z и w становятся однозначными функциями от u , или, что то же, введение параметра u униформизирует соотношение (1).

При более высоких степенях $R(z)$, например для полинома пятой степени, ситуация уже не столь проста. Интеграл (2), как и обратная ему функция, в этом случае имеет четыре периода. Обратная функция, кроме того, обладает парадоксальными свойствами, которые в свое время привели в замешательство Якоби. Многозначность этой функции удалось описать лишь в рамках теории функций комплексной переменной, предложенной Риманом. Как бы то ни было, в гиперэллиптическом случае интеграл (2) не может осуществлять униформизацию соотношения (1).

Якоби обнаружил следующее. Рассматривая p -ю топологическую степень римановой поверхности (рода p), он с помощью теоремы Абеля осуществлял униформизацию с помощью p интегралов первого рода $u_1, \dots, u_p$. Если $x_1, \dots, x_p$ — система, состоящая из p точек поверхности, то сравнения

$$u_i(x_1) + \dots + u_i(x_p) \equiv c_i \pmod{\text{периодов}} \quad (i = 1, \dots, p) \quad (3)$$

допускают единственное решение при произвольно заданных c_i .

Якоби удалось рассмотреть гиперэллиптический случай лишь при условии, что род римановой поверхности равен 2, причем он не сумел доказать однозначность полученного решения, но метод Якоби на протяжении последующих 50 лет оставался основным методом теории униформизации. Риман в фундаментальных работах по теории абелевых функций обобщил метод Якоби на случай произвольной алгебраической функции.

Итак, ситуация, сложившаяся в теории функций, когда Пуанкаре исполнилось 27 лет, сводилась к следующему: проблема униформизации алгебраических функций была окончательно разрешена, и никто не мог добавить ни одной сколько-нибудь существенной идеи. Правда, униформиза-

ции удавалось достичь лишь с помощью p функций от p переменных (эти функции входят в левую часть сравнений (3)), однако парадокс Якоби не позволял даже надеяться на что-либо лучшее.

И все же Пуанкаре удалось просто выйти из этой ситуации. Пожалуй, вряд ли можно найти более поразительное подтверждение мысли, высказанной Пуанкаре на Международном математическом конгрессе в Риме (1908 г.): «Не существует проблем, решенных или не решенных. Существуют лишь проблемы, решенные в *большей или меньшей степени*. ...» То, что в течение полувека считалось невозможным, — униформизация произвольных алгебраических зависимостей с помощью функций одной комплексной переменной — оказалось до смешного просто, во всяком случае гораздо более просто, чем теория обращения интегралов, которая доставила столько хлопот Якоби и Риману. Но чтобы достичь успеха, Пуанкаре пришлось отказаться от преклонения перед неповторимыми свойствами интегралов первого рода и ввести новые трансцендентные функции, которые Пуанкаре назвал фуксовыми.

Как объяснить столь дерзкий поступок двадцатисемилетнего ученого, осмелившегося порвать с полувековой традицией? Его гений, несомненно, является необходимым условием — необходимым, но не достаточным. Здесь крылась некая тайна весьма деликатного свойства: когда в 1881 году Пуанкаре предложил свой метод решения проблемы униформизации, он не знал о том, что проблема эта уже решена с помощью метода, освященного полувековой традицией. Разрыв со столь почтенной традицией произошел по неосведомленности Пуанкаре.

Вы думаете, будто я преувеличиваю и рассказываю вам небылицы? Если рассказанное мной кажется фантастическим, то это фантазия, не выходящая за пределы реальности. Реальность же состояла в том, что Пуанкаре не знал не только о проблеме обращения интегралов Якоби—Римана, но и почти обо всем, что было достигнуто до него в теории функций. Его математическое образование было весьма скудным.

Доказательства тому мы находим не только в его первых работах. О том же свидетельствует он сам в анализе своих собственных работ, данном 20 лет спустя. Так, упомянув о принципе Дирихле, Пуанкаре замечает: «Я не знал этого принципа в то время, но и будь он мне известен, я бы им не воспользовался. . .» (*Acta mathematica*, 1921, t. 38, p. 45)*. Если Пуанкаре не был известен принцип Дирихле, то можно с уверенностью сказать, что он не читал работ Римана и других математиков, развивавших идеи последнего. Даже понятие римановой поверхности, по-видимому, не было известно Пуанкаре. Во всяком случае, определение топологического рода поверхности в те времена, когда он начал переписку с Клейном, оказалось для него совершенно новым (*Acta mathematica*, 1923, t. 39, p. 105).

* См. наст. изд., т. 3, стр. 587. (*Прим. ред.*).

Я обещал вам подойти к теме моего доклада как историк, но даже историку трудно перенестись в те времена, когда молодой двадцатисемилетний математик вдруг превращается в одного из величайших сынов своего века, оставаясь в полном неведении относительно фундаментальных работ своих предшественников, выполненных на 25 лет раньше. Правда, Пуанкаре был учеником Эрмита, необычайно искусного аналитика, мало чем напоминавшего Римана, как, впрочем, и самого Пуанкаре, — математиков с сильно развитой геометрической интуицией. Не следует забывать и о том, что в те времена молодые ученые еще не имели обыкновения разговаривать на нескольких иностранных языках и путешествовать из одного процветающего научного центра в другой и что личные связи между отдельными учеными ограничивались перепиской. Однако в поразительной неосведомленности молодого Пуанкаре в не меньшей степени повинны и некоторые особенности его характера. По описаниям его друзей, в молодом Пуанкаре нетрудно узнать человека, стремящегося уйти от внешнего мира, погруженного в размышления, не обращающего внимания на то, что происходит вокруг, но реагирующего на то, что его занимает, весьма бурно, наподобие извержению вулкана. Одно из таких первых научных «извержений» и произошло в 1881—1882 годах, когда Пуанкаре опубликовал в «Comptes rendus» серию из 25 заметок и несколько обширных мемуаров.

Своей отправной точкой Пуанкаре избрал проблему униформизации алгебраических функций. Как известно, на протяжении всей своей жизни Пуанкаре почти всегда черпал вдохновение из приложений. Проблема униформизации алгебраической функции с помощью трансцендентных функций, своего рода интеллектуальная забава, состоящая в сведении простого к сложному, была полностью чужда его уму. Для Пуанкаре она оказалась легко преодолимым препятствием. То, что эта проблема обрела для него первостепенное значение, объясняется случайностью, столь характерной для работ Пуанкаре.

Пуанкаре поставил перед собой чисто практическую задачу: эффективное интегрирование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с алгебраическими коэффициентами. Пуанкаре попытался представить решения таких уравнений в виде комбинаций хорошо известных трансцендентных функций, например в виде абсолютно сходящихся рядов Маклорена. Именно здесь он, сам того не зная, и сформулировал проблему униформизации решений дифференциальных уравнений, частным случаем которой являлась проблема униформизации алгебраических функций.

В начале мая 1880 года Пуанкаре прочитал одну работу Фукса, которая захватила его воображение. 28 мая Пуанкаре представил на конкурс, объявленный Парижской академией, мемуар, который содержал анализ и дальнейшее развитие идей Фукса (*Acta mathematica*, 1923, t. 39, p. 38). На протяжении июня и июля того же года Пуанкаре ведет переписку с Фуксом (*Acta mathematica*, 1921, t. 38, p. 185—187), который упорно отказывается признать грубые ошибки, обнаруженные Пуанкаре в его

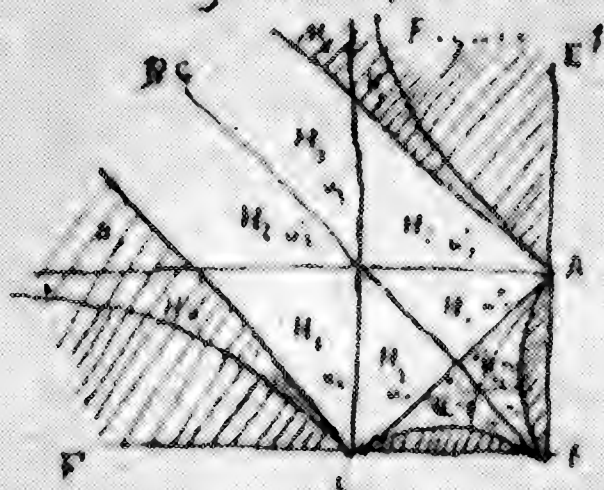
Pour tout type se trouve un tableau de figures

C. A. + D.

Copie dans les deux sens

- § 8. Premiers principes de la méthode de continuation
- § 9. Deuxième leçon
- § 10. Types particuliers
- § 11. Généralisation de théorèmes particuliers
- § 12. Polygone d'ordre
- § 13. Note 1
- § 14. Polygone, le double
- § 15. Note 2
- § 16. Méthode de continuation

Figure



Non, alors, de même, de même que, par conséquent, on applique la méthode de continuation. Non, d'ailleurs, par là, le cas le plus simple qui peut se présenter, c'est le cas du 1^{er} exemple du § 12, en supposant que R_1 n'a que 6 côtés (c'est le cas du parallélogramme (1^{er})) le § 12 est un exemple fondamental d'application de la méthode.

Dans le cas qui nous occupe, la multiplicité M_1 est représentée comme on l'a vu par le parallélogramme (1^{er}). Voyez ce que signifie la multiplicité M_1 .

L'application de la méthode de continuation, par M_1 , donne 1^{er} et 2nd résultats.

работе. В третьем письме Пуанкаре говорит о «фуксовой функции», в четвертом этот термин фигурирует уже во множественном числе. Первая заметка о фуксовых функциях, появившаяся в «Comptes rendus» в феврале 1881 года, воочию свидетельствует о том, что план всей теории, занимающей в Собрании сочинений Пуанкаре почти целый том, уже ясен автору.

Идея Пуанкаре довольно проста. Фукс исследовал условия, при которых отношение двух интегралов уравнения с рациональными коэффициентами

$$y'' + P(x)y' + Q(x) = 0$$

является функцией, обратной некоторой мероморфной функции. При обходе вокруг точки, в которой коэффициенты имеют особенность, фундаментальная система интегралов подвергается линейному преобразованию, отношение двух интегралов — проективному преобразованию, а обратная ему функция переходит сама в себя, если на ее независимую переменную подействовать тем же проективным преобразованием. Так Пуанкаре пришел к исследованию «фуксовых» функций, удовлетворяющих функциональным уравнениям

$$F(Sz) = F(z),$$

где S пробегает все подстановки группы преобразований

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

с вещественными коэффициентами (такие преобразования сохраняют единичную окружность). Эта группа должна быть дискретной. Пользуясь ею, Пуанкаре построил то, что впоследствии было названо фундаментальной областью. Была решена и обратная задача — найдены необходимые и достаточные условия, при которых фундаментальный многоугольник, ограниченный дугами окружностей, ортогональными вещественной оси, и отрезком самой оси, с определенным образом отождествленными участками границы, принадлежит некоторой дискретной группе. Наконец, Пуанкаре необычайно простым способом получил автоморфные функции.

Отправляясь от рациональной функции $H(z)$, он построил «ряд Пуанкаре»

$$\sum H(S_i z) \left(\frac{dS_i z}{dz} \right)^m,$$

который под действием подстановки $z \rightarrow Sz$, принадлежащей дискретной группе, умножается на $\left(\frac{dS}{dz} \right)^{-m}$ (таким образом, отношение двух рядов

Пуанкаре при одном и том же значении является автоморфной функцией). Пуанкаре рассмотрел частный случай, когда группа порождается поворотами вокруг конечного числа точек $a_1, \dots, a_{n+1}$. Если углы поворотов равны $2\pi/k_i$, то образом относительно автоморфной функции F является риманова поверхность, имеющая в точках $F(a_i)$ ветвления порядка k_i .

Следовательно, при надлежащем выборе функции F , обратная ей функция будет униформизирующей для данной римановой поверхности. Чтобы униформизовать произвольную риманову поверхность с конечным числом точек ветвления (для начала — вещественных), необходимо так варьировать точки a_i , чтобы функции $F(a_1), \dots, F(a_{n+1})$ пробегали все допустимые наборы значений. Эта задача была решена Пуанкаре с помощью знаменитого «принципа непрерывности»: если компактное многообразие M (допустимые наборы точек $a_1, \dots, a_{n+1}$) взаимно однозначно отобразить на другое многообразие M' той же размерности (риманову поверхность, обладающую конечным числом точек ветвления), то образ многообразия M накроет все многообразие M' . Тем же методом непрерывности можно воспользоваться, чтобы произвести еще одно «обращение»: по заданной группе найти фуксово уравнение, которое обладает ею. Наконец, расширив класс допустимых групп так, чтобы он включал в себя клейновы группы, т. е. группы произвольных (не только вещественных) линейных рациональных преобразований, Пуанкаре применил к новым группам все методы, которые оказались столь плодотворными при рассмотрении фуксовых групп. В то же время он никогда не забывал об отправной точке своих исследований, постоянно возвращаясь к дифференциальным уравнениям, эффективное решение которых оставалось его главной задачей.

Может показаться, что исследования Пуанкаре, о которых я кратко рассказал, представляли собой последовательное логическое развитие простых и интуитивно ясных идей. Должен честно признаться, что я слегка искажил картину, незаконно воспользовавшись одной идеей, принадлежавшей Клейну. Пуанкаре никогда не связывал униформизацию алгебраических функций со специальными группами, порожденными поворотами, которые он рассматривал столь подробно. В тот момент, когда все необходимые приготовления были закончены и оставалось лишь сформулировать результат, Пуанкаре изменил направление исследований и доказал теорему об униформизации совершенно иным методом. Пуанкаре считал допустимым значения $k_i = \infty$, т. е. рассматривал многоугольники с нулевыми углами и автоморфные функции (являющиеся обобщением модулярных функций), которые отображают полуплоскость в риманову поверхность, накрывающую плоскость с $n+1$ выколотыми точками. Если воспользоваться принципом непрерывности, то выколотые точки можно локализовать так, чтобы они соответствовали точкам ветвления заданной алгебраической функции. Тогда заданная алгебраическая функция будет униформизована с помощью автоморфной функции.

Почему произошел этот загадочный поворот? Может быть, здесь сыграли роль какие-нибудь неизвестные нам причины или просто сказался недосмотр автора, свободно плававшего в море своих идей и с непостижимой быстротой выпускавшего одну за другой работы, ясные в мельчайших деталях, но несколько сумбурные по композиции? Во всяком случае Пуанкаре предоставил Клейну честь первым указать более прямой путь

Sur les Groupes Kleinian
par H. POINCARÉ à Paris

§ 1 Substitutions imaginaires

Dans un mémoire antérieur, j'ai étudié le groupe des formes pour les substitutions linéaires à coefficients réels. Dans le présent travail, je s'agit d'exposer quelques résultats relatifs aux groupes de substitutions linéaires à coefficients imaginaires. Ces substitutions se classent naturellement en quatre catégories, comme on va le voir.

Soit une substitution quelconque, telle que l'on suppose toujours

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

Si on a

$$(\alpha + \delta)^2 = 4$$

la substitution peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{1}{z-a}, \frac{1}{z-a} + k \right)$$

où a et k sont des constantes; on dit alors qu'elle est parabolique.

Si on a

$$(\alpha + \delta)^2 \text{ est réel et } < 4 \quad (\alpha + \delta)^2 \neq 4$$

la substitution peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{z-a}{z-b}, k \frac{z-a}{z-b} \right)$$

a, b, k étant des constantes.

Si

$$(\alpha + \delta)^2 \text{ est positif et } > 4$$

k est réel positif et la substitution est hyperbolique.

Si

$$(\alpha + \delta)^2 \text{ est positif et } < 4$$

k est imaginaire et $|k|$ pour module 1; la substitution est elliptique.

Si enfin $(\alpha + \delta)^2$ est négatif ou négatif, k est également imaginaire ou négatif et la substitution est loxodromique.

к решению проблемы униформизации, и если я не ошибаюсь, это был единственный существенный пункт в теории автоморфных функций, в котором Клейну удалось превзойти Пуанкаре.

Уже из первых заметок, опубликованных Пуанкаре, Клейну стала ясна важность его идей. Все были изумлены, но единственным, у кого восхищение основывалось на глубоком понимании, был Клейн. Понятие автоморфной функции уже было ему знакомо, хотя он встречался с ним в весьма специальных случаях. Клейн любил идиллическую красоту специальных задач, своеобразных «натюрмортов», подобных тому, который он нарисовал в своих лекциях об икосаэдре. Не будь Пуанкаре, Клейн развил бы теорию автоморфных функций, последовательно переходя от одного обобщения к другому, не пропуская ни единой ступени. Браться за решение задачи во всей ее общности было несвойственно творческой манере Клейна. Появление работ Пуанкаре вынудило Клейна заняться изучением чуждых ему методов. Клейн ошибался, сравнивая свое состязание со скачками, на которых то один, то другой жокей вырывается вперед, — с самого начала Пуанкаре настолько вырвался вперед, что догнать его Клейн так и не смог.

26 писем, которыми обменялись Клейн и Пуанкаре, посвящены автоморфным функциям. Первое письмо написал Клейн после опубликования третьей заметки Пуанкаре. В этой переписке Пуанкаре — ученик, задающий вопросы, Клейн — учитель, который со всей искренностью и тактичностью руководит своим учеником и восполняет огромные пробелы в его математической эрудиции. Единственное разногласие между ними: Клейн упорно отказывался от предложения Пуанкаре называть функции фуксовыми, игнорируя заслуги математиков школы Римана, в то время как Пуанкаре подчеркивает их заслуги. Назвав впоследствии фуксовы функции автоморфными, мы тем самым стали на точку зрения Клейна.

Как описать те чувства, которые должны были вызвать у Клейна головокружительные успехи Пуанкаре? Ведь Пуанкаре часто менял свои подходы к решению проблем, в то время как Клейн со своими учениками предпочитал двигаться постепенно, шаг за шагом. Чем больше становится известного в связи с этой ситуацией, тем большее восхищение вызывает у нас безупречное поведение Клейна.

Ни Клейн, ни Пуанкаре не дожили до наших дней. В их рассуждениях имеются серьезные пробелы, причем гораздо более серьезные у Клейна, чем у Пуанкаре. Серьезные возражения вызывал среди прочих и принцип непрерывности. Ни регулярные топологические свойства многообразий M и M' , ни сам принцип не были обоснованы. Понадобилось четверть века, прежде чем были накоплены знания, и основы принципа непрерывности подверглись критическому пересмотру. В своем знаменитом списке проблем Гильберт привел и проблему униформизации. В 1907 году эту проблему вслед за самим Пуанкаре решил Кебе. Накрывающая поверхность, — понятие, которое было предложено еще Шварцем и проверено «на деле»

Пуанкаре в 1883 году, — оказалась ключом к построению теории униформизации.

Я не буду прослеживать историю автоморфных функций во всех подробностях, а лишь укажу на три следствия, к которым привели исследования в этой области. Оценить их сможет любой математик, даже тот, кто почти не интересуется теорией автоморфных функций.

1. Построение фундаментальной области дискретной группы, которым мы обязаны смелости Клейна и которое было совершенно необычным для эпохи, когда математики еще не успели привыкнуть к прямым неаналитическим методам.

2. Выявление связи, существующей между вещественными линейными и рациональными преобразованиями одного комплексного переменного и преобразованиями неевклидовой геометрии, т. е. создание модели Пуанкаре неевклидовой геометрии.

3. Принцип непрерывности и понятие топологического многообразия привлекли внимание Брауэра; для доказательства инвариантности области он создал фундаментальные методы, которые используются в топологии с того времени и до наших дней.

АНРИ ПУАНКАРЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЗИКИ*

Л о р а н Ш в а р ц

Пуанкаре принадлежат важные работы в области собственно физики: о поляризации света при дифракции, теории Лоренца, волнах Герца и т. д. Я буду говорить здесь лишь о его работах по приложениям математики к физике и, в частности, о трех наиболее важных мемуарах.

1. Об уравнениях в частных производных математической физики (American Journal of Mathematics, 1890). В этом мемуаре содержится изложение метода выметания для решения задачи Дирихле.

2. Об уравнениях математической физики (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1894). В этом мемуаре Пуанкаре исследует уравнение колеблющейся мембраны и находит все его собственные значения.

3. Метод Неймана и задача Дирихле (Acta mathematica, 1896).

Все три мемуара помещены в томе IX Собрания сочинений Пуанкаре.

Задача Дирихле. Эта задача занимала и в какой-то мере еще занимает центральное место в математической физике, хотя ее современная постановка по сравнению с первоначальной претерпела существенное обобщение.

В наиболее простом случае задача Дирихле состоит в отыскании функции U , гармонической в некоторой ограниченной области Ω евклидова пространства и совпадающей с заданной непрерывной функцией на границе S области Ω .

Первое решение, предложенное Риманом (1851 г.) оказалось некорректным. В качестве функции U Риман выбрал среди функций, принимающих на границе S заданные значения, ту, которая минимизирует интеграл
$$\iint \cdots \int_{\Omega} \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right)^2 dx.$$

Однако, хотя этот интеграл действительно ограничен снизу, ибо он больше нуля, ниоткуда не следует, что искомый минимум реализуется на некоторой функции U . Когда в 1869 году Вейерштрасс выдвинул это возражение против решения Римана, в математическом мире оно произвело впечатление подлинного бедствия, поскольку никому не удавалось ни исправить доказательство Римана и придать ему надлежащую строгость, ни предложить иное решение. Первые корректные решения были

* Oeuvres, t. XI. Livre du Centenaire. Paris, Gauthier-Villars, 1956, p. 219—225.

получены Нейманом (1877 г.) и Шварцем (1869 г.). Решение Неймана было справедливо лишь для областей с выпуклой границей.

Альтернирующий метод Шварца был первоначально предложен лишь для двумерного случая, но допускал, хотя и с некоторыми трудностями, обобщение на случай произвольной размерности. Этот метод позволял находить решение для области Ω , представляющей собой объединение двух областей, в каждой из которых решение известно. Решение, предложенное Пуанкаре в первом из перечисленных выше трех мемуаров, необычайно оригинально и по своей общности намного превосходит решения его предшественников. Мы изложим основную идею этого решения, основанного на так называемом методе выметания.

Если функция, заданная на границе S , достаточно гладка, то ее можно продолжить до дважды непрерывно дифференцируемой функции, заданной во всем пространстве, и, не ограничивая общности, предположить, что вне некоторого компактного множества эта функция обращается в нуль. Таким образом продолженная функция представляет не что иное, как потенциал U^ρ простого слоя с непрерывной плотностью ρ , который всегда можно считать неотрицательным; разлагая в случае необходимости на разность двух слоев с неотрицательными потенциалами. По современной терминологии, потенциал U^ρ называется супергармонической функцией (случай, когда функция, заданная на границе, лишь непрерывна, сводится к рассматриваемому частному случаю с помощью предельного перехода).

В чем состоит метод выметания? Пусть μ — некоторое неотрицательное распределение масс в области ω , ограниченной гладкой границей s . Вымести μ на s означает найти некоторое новое распределение масс $\nu \geq 0$, сосредоточенное на s , и такое, что потенциал U^ν равен потенциалу U^μ в дополнении к ω и мажорируется потенциалом U^μ в самом ω . Эта задача почти эквивалентна задаче Дирихле. Предположим, например, что мы вывели на границу S часть μ_s массы μ , распределенной по Ω с плотностью ρ , оставив без изменения массы, лежащие вне Ω . Новое распределение ν , сосредоточенное на $S\Omega$, обладает потенциалом U^ν , гармоническим в Ω и совпадающим на $S\Omega$ с потенциалом U^μ . Если бы мы могли показать, что функция U непрерывна, то на S выполнялось бы равенство $U^\nu = U^\mu$ и потенциал U^ν был бы решением задачи Дирихле для области Ω . Однако неизвестно, как действует выметание на Ω , а именно это обстоятельство имеет решающее значение. Известно, что метод выметания позволяет получить решение задачи Дирихле для случая, когда ω — шар, а его граница s — сфера: ядро Пуассона $K(t, r)$, $t \in \omega$, $r \in s$, задает поверхностную плотность распределения, выметенного на границу s , единичной массы, сосредоточенной в точке t шара ω . Покроем область Ω последовательностью шаров $B_1, B_2, \dots, B_p, \dots$ и обозначим через $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ элементы этой последовательности, взятые в таком порядке, что каждый из шаров B_k встречается бесконечное число раз $B_1, B_2, B_1, B_2, B_3, B_1, B_2, B_3, B_4, \dots$. Выметание произведем следующим образом. По-

ложим $\mu_0 = \mu = \rho$. Распределение μ_1 получается при выметании на границу s_1 той части μ_0 , которая сосредоточена на ω_1 (та часть μ_0 , которая расположена вне ω_1 , остается без изменений), и т. д. Распределение μ_n получается при выметании на s_n той части μ_{n-1} , которая сосредоточена на ω_n (часть распределения μ_{n-1} , расположенная вне ω_n , остается без изменений). Следует заметить, что каждая последующая операция частично разрушает результат предыдущей операции. Например, если пересечение шаров ω_{n-1} и ω_n не пусто, то в результате n -го выметания вся масса, сосредоточенная на ω_n , перейдет на границу s_n , в то же время никакая часть границы s_n разгружаться не будет. Таким образом, та часть границы s_n , которая расположена внутри шара ω_{n-1} , вновь окажется покрытой некоторой массой, хотя предыдущее $(n-1)$ -е выметание вытеснило всю массу, сосредоточенную на ω_{n-1} , на его границу s_{n-1} .

Итак, каждая функция U^n — супергармоническая, гармоническая в некоторой области, содержащей ω_n , но не допускающей расширения. Однако, как нетрудно видеть, масса, расположенная в компактной части области Ω , убывает и стремится к нулю. Это обстоятельство имеет существенное значение. Предел U будет гармонической функцией, но сходящиеся к нему функции будут гармоничны не во всех областях. Точнее, последовательность функций U^n убывает и, следовательно, имеет предел U при $n \rightarrow \infty$. Поскольку в каждом шаре B_k имеется бесконечно много гармонических функций U^n , U гармонична в B_k и, следовательно, в Ω . В сущности используемый метод очень напоминает альтернирующий метод, позволяющий переходить от одного шара к любой области, представляющей собой объединение произвольного числа шаров. Если Ω есть объединение двух шаров B_1, B_2 , то последовательность ω_n имеет вид $B_1, B_2, B_1, B_2, \dots$, и метод выметания в этом случае полностью совпадает с альтернирующим методом Шварца.

Итак, функция U будет решением задачи Дирихле, обращающимся на границе в заданную функцию U^p , если удастся доказать, что U непрерывна вплоть до границы, поскольку вне Ω $U = U^p$. Чтобы проверить непрерывность U в точке $a \in S$, предположим, что существует некоторая область $\Omega' \supset \Omega$, граница которой S' содержит точку a границы S . Будем считать, что задача Дирихле с начальной функцией U^p (напомним, что функция U^p предполагается заданной во всем пространстве) решена для Ω' , например с помощью того же метода выметания, и что решение U' непрерывно в $a \in S'$. Из неравенства $U^p \geq U^n \geq U'$ следует, что $U^p \geq U \geq U'$. Когда $x \in \Omega$ приближается к точке a , функции U^p и U' в силу сделанного предположения стремятся к одному и тому же пределу. Следовательно, функция U также стремится к их общему пределу. Рассматривая область, дополнительную к конусу вращения, можно доказать непрерывность функции U' , из которой следует, что если в окрестности точки $a \in S$ существует конус вращения, целиком лежащий вне Ω , то функция U также непрерывна в точке a . По современной терминологии, точка a называется регулярной точкой задачи Дирихле. Мы здесь впервые встречаем столь

детальное рассмотрение свойств границы. Тем не менее это пока еще только тщательность аналитика: хотя рассмотренный им случай далеко не был самым общим, Пуанкаре даже не подозревал о существовании иррегулярных точек. Эту задачу поставил и решил Лебег. И все же мы можем сказать, что современные понятия регулярных и иррегулярных точек (точка $a \in S$ иррегулярна, если $C\Omega$ имеет «острие» в a) берут свое начало в работе Пуанкаре. Разумеется, современные методы позволяют ставить задачу Дирихле в столь общем виде, о котором Пуанкаре не мог и мечтать: область Ω есть любое открытое множество евклидова пространства с произвольной (замкнутой) границей S .

Но вернемся к методу выметания. Одно обстоятельство заслуживает особого внимания. Пользуясь своим методом, Пуанкаре с помощью альтернирующего процесса выметал определенную часть μ_Ω распределения μ , сосредоточенного на Ω , на границу S и получал функцию U . Масса ν (предел распределений μ_n), для которой роль функции U играет потенциал U^ν , Пуанкаре не интересовала. Она в какой-то мере оставалась в стороне от метода выметания! Валле-Пуссену первому пришла в голову идея заняться изучением масс, возникающих в результате последовательных выметаний. Вот что он писал в мемуаре (1931 г.), посвященном обобщению метода выметания Пуанкаре и задачи Дирихле (Annales de l'Institut Henri Poincaré): «Создается впечатление, что знаменитый математик не придавал своему методу того значения, которое он заслуживает, и не вполне сознавал его мощь. В самом деле, Пуанкаре интересовался лишь потенциалами и полностью пренебрегал массами. Ни он сам, ни его последователи не задавали себе вопроса о том, что же происходит с массами, перемещаемыми при выметании». Известно, сколь большую пользу сумели извлечь Валле-Пуссен и его последователи, математики, занимающиеся современной теорией потенциала, из рассмотрения масс.

Методы гильбертова пространства и теорема о проекционных операторах позволили проводить выметание сразу для всей области Ω и тем самым решать задачу Дирихле, не прибегая к вспомогательным шарам, не обращаясь к альтернирующему методу и не совершая предельного перехода. Мера ν , получаемая при выметании на S части μ_Ω распределения μ , сосредоточенного на Ω (остальная часть распределения μ остается неизменной), есть распределение, сосредоточенное на $C\Omega$ и отстоящее от μ на минимальном расстоянии в смысле «энергетической нормы». Вместе с тем нельзя не признать, что хотя сам метод является прямым, некоторые его части носят трансцендентный характер: такова, например, теорема о проекционных операторах в гильбертовом пространстве, в которой, как теперь ясно, по существу используется минимизирующая последовательность, т. е. предельный переход. Но методы гильбертова пространства используются не только в методе выметания! Гильберт в 1900 году показал, что методу, предложенному первоначально Риманом и отвергнутому затем Вейерштрассом, можно придать необходимую строгость, и действительно, наилучшие результаты для эллиптических уравнений высших порядков,

а также наиболее общих краевых задач для гиперболических уравнений, были получены с помощью метода Римана.

Рассмотрение метода выметания было бы неполным, если не упомянуть о мемуаре 1896 года (последнем из трех мемуаров, перечисленных в начале выступления). В этом мемуаре Пуанкаре не предлагает нового метода. Предположив, что теорема существования уже доказана, Пуанкаре рассматривает ряд Неймана, с помощью которого математики доказывали принцип Дирихле для выпуклой границы, показывает, что этот ряд сходится и дает решение задачи Дирихле для произвольной регулярной односвязной границы. В этом решении перед нами предстает Пуанкаре не только математик, но и физик, который без колебаний посвящает весь мемуар методу вычисления. Кроме того, в этом мемуаре Пуанкаре впервые систематически использует понятие собственных значений, к обсуждению которых мы сейчас перейдем.

Собственные значения и уравнение колеблющейся мембраны. Работы Пуанкаре, посвященные проблеме собственных значений, мы рассмотрим не столь подробно, как метод выметания. Уравнение колеблющейся мембраны имеет вид $\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$. Если стационарное решение u искать в виде $u = U(x, y) \cos \omega t$, то функция U будет удовлетворять уравнению эллиптического типа $\Delta U + \lambda U = 0$, $\lambda = \omega^2/v^2$, и кроме того, некоторым граничным условиям. Рассмотрим случай, когда край мембраны жестко закреплен, тогда на границе $U = 0$. Допустимые значения λ называются собственными значениями краевой задачи, соответствующие им частоты $N = \omega/2\pi$ — собственными частотами мембраны. Наименьшая из частот отвечает основному (самому низкому) тону, остальные — обертонам. Физическая природа задачи позволяет а priori утверждать, что ее собственные значения существуют. Параметр λ также физического происхождения. Исследованиям собственных значений посвящено много работ. Первое (наименьшее) собственное значение нашел Шварц в 1885 году. Следующее (второе) собственное значение нашел в 1893 году Пикар («нашел» в математическом смысле: доказал существование). Пуанкаре во втором из перечисленных нами трех мемуаров доказал существование всей дискретной последовательности собственных значений следующим образом.

Пуанкаре рассмотрел уравнение $\Delta U + \lambda U + f = 0$ при $U = 0$ на границе. Решение U он искал в виде ряда $U = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n U_n$ по степеням параметра λ , а для отыскания коэффициентов U_n решал задачу Дирихле. Мажорируя U_n , нетрудно показать, что ряд сходится и дает, таким образом, решение краевой задачи при достаточно малых $|\lambda|$. Умножая затем найденное решение на полином от λ с неопределенными коэффициентами, Пуанкаре показал, что степень полинома и коэффициента всегда можно выбрать так, чтобы ряд сходился при любом заранее заданном значении λ . Пуанкаре также ввел в рассмотрение мероморфную функцию комплексной перемен-

ной λ , полюсы которой (соответствующего порядка) дают искомые собственные значения. Установив этот результат вполне строго, Пуанкаре приводит затем несколько разложений, выведенных им лишь на эвристическом уровне строгости и позволяющих получать собственные значения краевой задачи при других условиях на границе. Не содержится в его работе и доказательства того, что найденные им собственные функции образуют полную систему ортогональных функций.

Совершенно иной подход к проблеме собственных значений дается в мемуаре, опубликованном в «Acta mathematica» (третьем из названных нами мемуаров). В проводимых Пуанкаре рассуждениях на этот раз не используются никакие физические соображения. Параметр λ вводится достаточно искусственным образом. Удобство именно такого выбора параметра выясняется позднее. Параметр λ необходим Пуанкаре лишь для того, чтобы единым образом рассмотреть внешнюю и внутреннюю задачу Дирихле: $\lambda = -1$ внутри области Ω и $\lambda = +1$ — вне ее. Существование собственных значений рассматриваемой краевой задачи Пуанкаре оставляет без доказательства. Он лишь предполагает, что они существуют, и бегло намечает, каким образом их можно было бы получить. Затем он показывает, как этот результат, если он верен, позволяет понять, почему ряд Неймана сходится, и вполне строго доказывает сходимость ряда Неймана.

Приведенное Пуанкаре доказательство не использует ни одного из принятых им предположений о собственных значениях. Единственное, что он допускает — это обоснованность принципа Дирихле. Еще немного, и Пуанкаре стал бы автором открытий, сделанных несколько лет спустя другим математиком, Фредгольмом (1903): итерированных ядер, определителя Фредгольма, целой голоморфной функции от λ , нули которой являются собственными значениями, разложений в ряд по собственным функциям и т. д. Тем не менее он по достоинству оценил работы Фредгольма, с энтузиазмом воспринял результаты своего соперника и опубликовал многочисленные статьи по теории уравнений Фредгольма. Можно с полным основанием утверждать, что исследования собственных частот колеблющейся мембраны (исследования, увенчавшиеся успехом) и последовавшие затем менее плодотворные работы по рядам Неймана составляют существенную часть открытия Фредгольма и всей современной спектральной теории вполне непрерывных операторов.

АНРИ ПУАНКАРЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ *

Луи де Бройль

Деятельность Анри Пуанкаре была грандиозной: она охватывала все области физико-математических наук. Пуанкаре внес существенный вклад в развитие не только высшего анализа, неевклидовой геометрии, арифметики, Analysis situs (или топологии), механики, астрономии, математической физики, но и других наук. Все они несут на себе печать его гения. Пуанкаре умер в 58 лет, оставив после себя научное наследие, поражающее своим величием. Трудно поверить, что за сравнительно короткую жизнь человек сумел так много сделать в столь различных областях знания.

Я буду говорить здесь лишь о работах Пуанкаре по математической физике, поскольку в дни своей юности я особенно усердно изучал именно эту науку. Все молодые люди моего поколения, интересовавшиеся математической физикой, воспитывались на книгах Пуанкаре. В ту пору преподавание математической физики в Сорбонне несколько отставало от требований времени. Поль Ланжевен так никогда и не опубликовал прекрасные курсы, прочитанные им в Коллеж де Франс. Новые физические теории, к тому же блестяще изложенные, мы смогли найти лишь в книгах Пуанкаре. Даже через много лет, став уже вполне зрелыми людьми, мы все еще ощущали на себе благотворное влияние этих книг.

Некоторые авторы проводят различие между теоретической и математической физикой. Сам Анри Пуанкаре в своих известных работах по философии науки («Наука и гипотеза», «Ценность науки», «Наука и метод», «Последние мысли») никогда не делал такого различия. Тем не менее, мне кажется, что различие между теоретической и математической физикой все же имеет под собой достаточно веские основания. Математическая физика — это углубленное, критическое изучение физических теорий разумом, изощренным в математических рассуждениях, с целью усовершенствовать эти теории, придать им бóльшую строгость, а также найти новые темы для чисто математических исследований: известно, что геометры в своих открытиях нередко руководствуются физическими соображениями. Теоретическая же физика занимается построением теорий, позволяющих надлежащим образом учитывать экспериментальные факты

* Oeuvres, t. XI. Livre du Centenaire. Paris, Gauthier-Villars, 1956, p. 62—71.

и направлять исследования, проводимые в лабораториях. Теоретическая физика, в особенности в наше время, требует обширных математических познаний, но обычно не является полем деятельности истинных математиков: она предполагает свободное владение всеми экспериментальными фактами и самое главное ту физическую интуицию, которой не обладают математики.

Первоклассный математик, обладавший острым критическим умом, Пуанкаре как нельзя лучше подходил для занятий математической физикой, понимаемой в смысле только что данного определения. Он не преминул воспользоваться своими природными дарованиями, и его вклад в развитие математической физики оказался весьма значительным. Некоторые из известных мемуаров Пуанкаре и большая часть его знаменитых книг, по крайней мере, частично посвящены уточнению доказательств, приводимых в различных классических теориях физики, и обоснованию новых способов рассуждения. Говоря о созданных Пуанкаре новых методах, нельзя не упомянуть знаменитый метод выметания, разработанный Пуанкаре для доказательства принципа Дирихле в теории ньютоновского потенциала и позволяющий переносить решение, полученное в более узкой области, на более широкую область так же, как и о проведенном Пуанкаре тонком анализе теории распространения тепла Фурье. Во времена моей юности лишь в книгах Пуанкаре по теории Фурье студенты могли найти полное изложение теории интегралов Фурье, играющих весьма важную и все возрастающую роль в математическом образовании современного физика. В общем же курсе математики, читавшемся тогда в Сорбонне, столь неоценимые для будущего теоретика интегралы Фурье почти полностью игнорировались, как, впрочем, и функции Бесселя, и многие другие сведения, имеющие фундаментальное значение для приложений. Именно при изучении задач, связанных с распространением тепла, Анри Пуанкаре разработал изящные и остроумные методы доказательства существования величин, называемых ныне «собственными значениями» краевой задачи для дифференциального уравнения, и сходимости разложений в ряды по собственным функциям. Как показали глубокие исследования Пуанкаре, все эти вопросы, тесно связанные с принципом Дирихле, вскоре после появления его работ получили дальнейшее существенное развитие: были открыты и исследованы интегральные уравнения, а несколько позднее Гильберт ввел абстрактное пространство, носящее ныне его имя. Вряд ли нужно упоминать о том, сколь важную роль играют в настоящее время все эти понятия в квантовой физике. Они достаточно убедительно свидетельствуют о том, сколь значительным был вклад Пуанкаре в эту область.

К числу работ Пуанкаре по математической физике принадлежит и великолепно написанный и ставший классическим курс термодинамики. Как известно, любая попытка корректного изложения этой строгой науки наталкивается на значительные трудности, в особенности если мы будем сознательно отказываться от статистической и молекулярной интерпрета-

ции термодинамики, предложенной Больцманом и Гиббсом, и курсы термодинамики изобилуют «опасными» местами. Изложение термодинамики, данное Пуанкаре, и поныне считается образцовым, и представляет интерес для тех, кто преподает термодинамику. Кроме того, строгое изложение основ физики отнюдь не означало, что Пуанкаре отрицает ценность молекулярной и статистической физики. Наоборот, многие его мемуары посвящены выяснению различных аспектов этих наук. Так, читатель его великолепной книги «*Les Hypothèses cosmogoniques*» с некоторым удивлением, но безусловно с пользой для себя, обнаружит в ней изложение кинетической теории газа.

Хотя Пуанкаре по вполне понятным причинам — в силу врожденных особенностей своего ума — внес особенно блестящий вклад в развитие математической физики, понимаемой в смысле данного выше определения, ему тем не менее принадлежит ряд полезных и оригинальных работ в области теоретической физики. С особым успехом Пуанкаре выступил в роли физика-теоретика, выдвигающего и открывающего свежие идеи, предлагающего новые интерпретации в обширной области оптики и электромагнетизма, переживавшей в ту пору период своего возрождения. Пуанкаре превосходно знал старые механические теории света, уступившие впоследствии место волновой теории Френеля, и в ряде прекрасных работ дал глубокий анализ этих теорий. Пуанкаре развил и углубил теорию Максвелла, мало известную в то время во Франции, поняв, что она позволяет единым образом охватить и обобщить все предшествующие попытки создания теории электромагнитных явлений и осуществить синтез оптики и электромагнетизма. Пуанкаре следил за всеми перипетиями открытия волн Герца и их свойств, явившимся замечательным подтверждением правильности концепций Максвелла. На заре радиотехники он выступал с критическим разбором экспериментальных результатов, развивал теоретические интерпретации и, читая специальный курс в Высшей школе телеграфии, стремился ознакомить инженеров с последними достижениями в этой области. Пуанкаре принадлежит также и популярное изложение основ беспроводной телеграфии для широкой публики, изданное в виде отдельной брошюры в серии «*Scientia*». И всюду Пуанкаре находился в первых рядах, критикуя и уточняя уже достигнутое, но в то же время стремясь в соответствии с духом теоретической физики проникнуть как можно дальше вглубь новой территории и не слишком заботясь о строгости и совершенстве.

В своих прекрасных мемуарах и фундаментальном труде «*Électricité et optique*» Пуанкаре обсудил незадолго до того предложенные новые формы электромагнитной теории, в частности теорию электронов Лоренца, которую он оценивал особенно высоко. Пуанкаре много размышлял над проблемой абсолютного и относительного движения и часто обращался к этой теме в своих философских статьях. Он был убежден, что абсолютное движение лишено смысла и его нельзя обнаружить никакими опытами. Пуанкаре не верил в существование эфира достаточно серьезно для того,

чтобы считать, что движение наблюдателя относительно этой гипотетической среды можно обнаружить экспериментально. Поэтому для него не явился неожиданностью отрицательный результат экспериментов типа опыта Майкельсона, и он с интересом, но и не без тайной иронии следил за попытками Лоренца и других теоретиков согласовать полученные отрицательные результаты с существованием эфира.

В 1904 году, накануне появления решающих работ Альберта Эйнштейна по теории относительности, Анри Пуанкаре уже владел всеми наиболее существенными элементами этой теории. Он глубоко проанализировал все трудности электродинамики движущихся тел и ясно сознавал искусственный характер введенного Лоренцом местного времени и сокращения Фидджеральда, с помощью которых эти физики надеялись сохранить инвариантность уравнений Максвелла и объяснить результаты эксперимента Майкельсона. Пуанкаре было ясно, что эти гипотезы, носившие отрывочный характер и произвольно введенные одна за другой, должны уступить место общей теории и стать не более чем частными следствиями из нее. Развита к тому времени Лоренцом динамика электрона с переменной массой, зависящей от скорости, была хорошо известна Пуанкаре: он сознавал, что теория Лоренца устанавливает для материальных тел существование верхнего предела скорости, равного скорости света в пустоте. В полной мере оценивая все следствия, вытекающие из этого факта, Пуанкаре писал в «Науке и методе» (*Science et méthode*, p. 252): «Можно было бы рассуждать следующим образом. Наблюдатель может достичь скорости в 200 000 км/сек. Тело в своем движении относительно наблюдателя может достигнуть той же скорости. Тогда его абсолютная скорость будет равна 400 000 км/сек, что невозможно, поскольку это превышает скорость света. Кажущееся противоречие разрешается, если принять во внимание то, каким способом Лоренц вычисляет местное время». Этот отрывок показывает, что Пуанкаре до Эйнштейна были известны формулы релятивистского сложения скоростей. И действительно, в замечательном мемуаре, написанном еще до выхода в свет работ Эйнштейна и опубликованном в «*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*», в котором Пуанкаре более глубоко исследовал динамику электрона с массой, зависящей от скорости, содержатся формулы релятивистской кинематики.

Еще немного и Анри Пуанкаре, а не Альберт Эйнштейн, первым построил бы теорию относительности во всей ее общности, доставив тем самым французской науке честь этого открытия. Действительно, разве не Пуанкаре принадлежат следующие строки, в которых он подытожил все свои размышления о принципе относительности (*Science et méthode*, p. 240): «Как бы то ни было, нельзя отделаться от впечатления, что принцип относительности есть общий закон природы и что никогда, никакими мыслимыми средствами не удастся измерить что-нибудь иное, кроме относительных скоростей. Под последними я понимаю не только скорости тел относительно эфира, а и скорости одних тел относительно других. Самые

разнообразные эксперименты привели к столь хорошо согласующимся между собой результатам, что представляется естественным приписать принципу относительности значение, сравнимое со значением, например, принципа эквивалентности. Во всяком случае, необходимо исследовать, к каким следствиям приведет нас такая точка зрения, чтобы затем подвергнуть эти следствия экспериментальной проверке». Вряд ли можно более близко подойти к идее Эйнштейна.

Однако Пуанкаре так и не сделал решающего шага, и предоставил Эйнштейну честь разглядеть все следствия из принципа относительности и, в частности, путем глубокого анализа измерений длины и времени выяснить подлинную физическую природу связи, устанавливаемой принципом относительности между пространством и временем. Почему Пуанкаре не дошел до конца в своих выводах? Несомненно, чрезмерно критическая направленность его склада мышления, обусловленная, быть может, тем, что Пуанкаре как ученый, был прежде всего чистым математиком. Как уже говорилось ранее, Пуанкаре занимал по отношению к физическим теориям несколько скептическую позицию, считая, что вообще существует бесконечно много логически эквивалентных точек зрения и картин действительности, из которых ученый, руководствуясь исключительно соображениями удобства, выбирает какую-то одну. Вероятно, такой номинализм иной раз мешал ему признать тот факт, что среди логически возможных теорий есть такие, которые ближе к физической реальности, во всяком случае, лучше согласуются с интуицией физика, и тем самым больше могут помочь ему. Вот почему молодой Альберт Эйнштейн, которому в то время исполнилось лишь 25 лет и математические знания которого не могли идти в сравнение с глубокими познаниями гениального французского ученого, тем не менее раньше Пуанкаре нашел синтез, сразу снявший все трудности, использовав и обосновав все попытки своих предшественников. Этот решающий удар был нанесен мощным интеллектом, руководимым глубокой интуицией о природе физической реальности.

Однако блестящий успех Эйнштейна не дает нам права забывать о том, что проблема относительности была еще ранее глубоко проанализирована светлым умом Пуанкаре и что именно Пуанкаре внес существенный вклад в будущее решение этой проблемы. Без Лоренца и Пуанкаре Эйнштейн не смог бы достичь успеха.

Не имея возможности остановиться подробно на содержании прекрасного мемуара Пуанкаре, опубликованного в «*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*», мы тем не менее хотели бы напомнить следующее. Изучая устойчивость электрона, знаменитый геометр показал, что объяснить ее можно лишь в том случае, если наряду с известными электромагнитными силами допустить существование силы неизвестной природы — «давления Пуанкаре». Эта сила, уравновешивая взаимное отталкивание различных частей электрона, позволяет ему существовать, несмотря на это отталкивание. Открытие Пуанкаре не потеряло своего значения и сегодня: хотя теория элементарных частиц и их структуры ушла далеко вперед

(впрочем, ее уровень по-прежнему не может считаться удовлетворительным), в наши дни снова нередко можно услышать разговоры о «давлении Пуанкаре».

Если к работам Пуанкаре по электромагнетизму и теории электронов прибавить те его труды, которые были посвящены исследованию волн Герца, их генерированию, распространению и свойствам, то станет ясно, что Пуанкаре возглавлял авангард физиков-теоретиков своего времени, направляя его победное шествие.

Проблемой, имеющей большое значение как для теоретической физики, так и для всей натуральной философии, является проблема детерминизма и тесно связанная с ней проблема корректного определения случайного, вводящего в детерминизм вероятность. Пуанкаре неоднократно обращался к этим проблемам. В настоящее время, когда они вновь стали предметом рассмотрения, весьма интересно перечитать посвященные им работы Пуанкаре. Как все ученые его времени, Пуанкаре ничуть не сомневался в том, что все физические явления, в том числе и наиболее элементарные, подчиняются строгим законам, незыблемому детерминизму, выражаемому дифференциальными уравнениями, решения которых полностью определяются заданием достаточного числа начальных данных. Такая уверенность в детерминизме делала неизбежным подход к проблеме случайного, по существу полностью совпадающий со взглядами, изложенными великим Лапласом в его фундаментальных работах по теории вероятностей. Для Пуанкаре, так же как и для Лапласа, случай в подлинном смысле этого слова не существовал: если случайность и возникала в каких-либо явлениях природы, то ее появление было обусловлено либо нашей неспособностью решить задачу, трудность которой превосходит силы нашего разума, либо тем, что мы пренебрегли какими-то данными, необходимыми для ее решения.

Известно, что последующее развитие наших знаний о явлениях, происходящих на атомном уровне, или о квантах, существенно повлияли на взгляды большинства физиков на природу случайности и коренным образом изменили эти взгляды. Согласно современным представлениям, явления на этом уровне происходят чисто случайно, и если на макроскопическом уровне нам кажется, будто мы располагаем неким точным законом, то это происходит лишь потому, что макроскопические явления представляют собой статистическое среднее огромного числа элементарных явлений. Эта точка зрения прямо противоположна классической точке зрения на природу случайности, которую разделял еще Пуанкаре. Согласно классической точке зрения, лишь строго детерминированный закон соответствовал глубокому слою физической реальности, а статистический закон был лишь его макроскопическим проявлением. Согласно современной точке зрения, наоборот, статистический закон играет основную роль, а детерминированный служит лишь его макроскопическим проявлением. Однако и при таком понимании соотношения между необходимым и случайным, несмотря на то, что детерминированный закон утрачивает свое привилеги-

рованное положение, было бы неверно утверждать, будто природа подчиняется только капризу лишь потому, что, помимо детерминированных, существуют еще и статистические законы.

Эти новые тонкие идеи, завоевавшие всеобщее признание у современных физиков, занимающихся квантовой теорией, определяются развитием физики, о которых Пуанкаре ничего не было известно. Эти фундаментальные результаты не могли быть для него доступны, поэтому Пуанкаре до конца своей жизни оставался непоколебимым приверженцем детерминизма, понимаемого в классическом духе, и связанного с ним понимания случайности. Таким образом, будучи убежденными сторонниками чисто вероятностной интерпретации волновой механики, большинство физиков-теоретиков теперь утверждают, что Пуанкаре придерживался ошибочных взглядов.

Но действительно ли ошибочны его взгляды по этому вопросу?

Не желая вдаваться здесь в подробности, которые завели бы нас слишком далеко, я напомним, однако, что столь известные ученые, как Планк, Эйнштейн и Шредингер, чьи имена значатся среди имен основателей и пионеров квантовой теории с момента ее возникновения, всегда отвергали чисто вероятностную интерпретацию, которую получила впоследствии квантовая физика. Я напомним также о предпринятой в 1927 году попытке причинной и детерминистской, в духе классических представлений, интерпретации волновой механики, тогда еще совсем молодой науки. Через три года эта попытка — теория двойного решения, автором которой был я сам, — привела к формулировке первых идей волновой механики. Однако разочарованный холодным приемом, оказанным моей теории большинством других физиков-теоретиков, уже сошедших к чисто вероятностной интерпретации Борна, Бора и Гейзенберга, и уstraшенный значительными математическими трудностями, вставшими на пути развития теории двойного решения, я отказался от своей попытки и в последующие годы присоединился к общепринятой интерпретации.

В настоящий момент я думаю, что Анри Пуанкаре, как я уже писал раньше, заблуждался, когда упорно отстаивал традиционную точку зрения, согласно которой вероятность, возникающая в физических теориях на месте строгого детерминизма, означает либо полное, либо частичное незнание некоего скрытого детерминизма. Правда, должен признаться, что ныне я несколько менее уверен в правильности своей точки зрения, чем несколько лет назад. Года два назад, под влиянием ряда работ физиков молодого поколения, я вновь вернулся к более глубокому изучению своих идей, высказанных 25 лет назад, относительно двойного решения. Я отнюдь не дерзаю утверждать, что могу полностью обосновать детерминистскую интерпретацию волновой механики, содержащуюся в теории двойного решения, но считаю себя вправе заявить, что кое-какие шаги в этом направлении уже сделаны. Если бы предпринятые попытки увенчались успехом, то мы получили бы причинную картину явлений, описываемых волновой механикой, а вероятностные законы, ставшие ныне

классическими в квантовой физике и, безусловно, являющиеся точными законами, можно было бы на том же основании, что и в старой кинетической теории газов, рассматривать как проявление нашей неспособности проследить во всех подробностях за неким скрытым детерминизмом. Таким образом, мы получили бы намного более ясную картину явлений на корпускулярном уровне, чем та, которую считают ортодоксальной почти единодушно физики, занимающиеся квантовой теорией. Не возвращаясь полностью ко всем понятиям классической физики (ибо революция столь значительных масштабов, которую произвело в физике появление квантов, всегда оставляет глубокие следы), мы, однако, в значительной мере приблизились бы к ним, и еще раз сочли бы вполне обоснованным то упорство, с которым Пуанкаре стремился сохранить в неприкосновенности традиционные представления о детерминизме и смысле введения вероятности в физику.

В заключение я хотел бы сказать несколько слов о последних работах Пуанкаре по теории квантов. Вряд ли можно предполагать, что знаменитый ученый, поглощенный трудами и обремененный многочисленными обязанностями, которые налагала на него его известность, с вниманием следил за первыми шагами квантовой теории. В статьях и книгах, написанных Пуанкаре до 1910 года, явно не упоминаются даже первые работы Планка, к тому времени уже устаревшие на несколько лет. Участие в октябре 1911 года в Сольвеевском конгрессе, встречи с физиками и острые обсуждения различных, подчас еще фрагментарных, аспектов новой теории, обратили внимание Пуанкаре на важность идей Планка. Он пишет превосходный мемуар, в котором доказывает, что экспериментальные результаты делают принятие гипотезы квантов Планка неизбежным. В опубликованной посмертно книге Пуанкаре «Последние мысли» содержится популярное изложение замечаний и выводов, которые великий ученый сделал, изучая квантовую теорию. Правда, большую часть вопросов Пуанкаре был вынужден оставить без ответа. Кроме того, успехи, достигнутые с тех пор наукой в области квантовой теории, столь значительны, что все соображения, высказанные в первоначальный период развития новой области физики, в настоящее время не представляют особого интереса. Тем не менее, следует отметить, что квант света, по глубокому убеждению Анри Пуанкаре, может интерферировать лишь сам с собой — факт, который в настоящее время служит основой статистической интерпретации квантовой теории света и, в более общем плане, всей волновой механики.

Вскоре после завершения своих исследований по квантовой теории, в начале июля 1912 года, Анри Пуанкаре скоропостижно скончался после операции в возрасте 58 лет. Бесконечно жаль, что столь мощный мозг не мог следить за быстрым развитием новых релятивистских и квантовых теорий и применить к их исследованию возможности своего математического гения, обширные познания и тонкое критическое чутье. Пуан-

каре, несомненно, не мог бы без удивления видеть, как физика отказывается от некоторых столь милых его сердцу идей, как, например, идея детерминированности явлений. Однако он был слишком проникательным, чтобы не воспринять быстро новые идеи, не понять их привлекательность или не обсудить их точность. Сколько услуг он мог оказать совсем еще молодой теории квантов, делавшей лишь первые неуверенные шаги, или будущей волновой механике, рождение которой происходило столь трудно!

Позвольте мне закончить воспоминаниями личного характера. В 1912 году, когда мне было всего лишь 19 лет, я с восторгом следил за развитием новой физики и без устали зачитывался томами курса математической физики Анри Пуанкаре и его работами по философии науки. В поезде, увозившем меня на каникулы в деревню, я узнал из журнала о внезапной кончине великого мыслителя. Меня охватило чувство непоправимой катастрофы: казалось, французскую науку жестоко обезглавили именно в тот момент, когда великая революция, которая по моим предчувствиям должна была вот-вот произойти, делала присутствие великого ученого столь необходимым. С тех пор я часто думал, что пережитое мной тогда ощущение невосполнимой утраты для науки не обмануло меня.

КОММЕНТАРИИ

БИБЛИОГРАФИЯ

ТЕОРИЯ ФУКСОВЫХ ГРУПП

А. Пуанкаре принадлежит заслуга введения в математику произвольных дискретных групп конформных преобразований полуплоскости. Эти группы названы им фуксовыми. Развитый им метод представления таких групп через фундаментальную область («производящий многоугольник») в дальнейшем стал одним из основных методов теории дискретных групп преобразований.

Теория фуксовых групп и фуксовых функций была подхвачена Ф. Клейном и разрабатывалась дальше параллельно им и А. Пуанкаре¹.

Фуксовы группы представляют особый интерес в связи с так называемой проблемой униформизации, известной также как 22-я проблема Гильберта. Решение этой проблемы в основном было завершено в 1907 г. П. Кебе и независимо А. Пуанкаре. Суть этого решения состоит в том, что всякая риманова поверхность (т. е. одномерное комплексное многообразие), отличная от тора, может быть получена факторизацией полуплоскости по некоторой фуксовой группе.

В конце раздела II мемуара А. Пуанкаре указывает на возможность интерпретации фуксовых групп как дискретных групп движений плоскости Лобачевского. Эта идея оказалась весьма плодотворной. Так, например, К. Зигель установил, что фуксовы группы первого, второго и шестого семейств (в терминологии А. Пуанкаре) характеризуются тем, что их производящий многоугольник имеет конечную в смысле геометрии Лобачевского площадь². Разрабатываются новые аспекты геометрии фуксовых групп³.

1 (стр. 10). Вот перевод терминологии Жордана на современный язык теории групп: изоморфизм — эпиморфизм;

голоэдрический изоморфизм — изоморфизм;

мериэдрический изоморфизм — эпиморфизм, не являющийся изоморфизмом.

2 (стр. 18). Подобному разбиению на области R_i всегда можно подвергнуть всю верхнюю полуплоскость. Для этого можно поступить, например, следующим образом.

Пусть z_0 — точка верхней полуплоскости, не являющаяся неподвижной ни для какой подстановки из группы G , кроме тождественной. В качестве R_i можно тогда взять так называемые *области Дирихле*:

$$R_i = \{z: \rho(z, f_i(z_0)) \leq \rho(z, f_k(z_0)) \forall f_k \in G\},$$

где $\rho(\alpha, \beta) = \ln [\alpha, \beta]$ — расстояние в смысле геометрии Лобачевского. Области Дирихле являются выпуклыми многоугольниками в смысле геометрии Лобачевского.

3 (стр. 19). Существуют топологически правильные разбиения на конгруэнтные области, не соответствующие никакой фуксовой группе. Нужно требовать, чтобы

¹ См.: R. Fricke und F. Klein. Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. Leipzig, 1897.

² См.: C. L. Siegel. Some remarks on discontinuous groups. — Ann. Math., 1945, 46, № 4, 708—718.

³ См.: L. Keen. Intrinsic moduli on Riemannian surfaces. — Ann. Math., 1966, 84, № 3, 404—420; С. М. Натанзон. Инвариантные прямые фуксовых групп. — УМН, 1972, 27, № 4.

для любых двух областей разбиения существовала вещественная подстановка, переводящая первую область во вторую и совмещающая разбиение с самим собой.

4 (стр. 19). См. прим. [2].

5 (стр. 21). Возможность перейти из одной области в другую, пересекая лишь конечное число границ, зависит не от группы, а от выбранного разбиения на области R_i . Для этого достаточно, чтобы области R_i покрывали всю верхнюю полуплоскость и чтобы каждая точка, не лежащая на оси X , обладала окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом областей R_i . Эти условия всегда можно соблюсти. Например, им удовлетворяет разбиение на области Дирихле (см. прим. [2]).

6 (стр. 24). В терминах геометрии Лобачевского нормальность многоугольника R_0 означает, что его границы первого рода прямолинейны.

7 (стр. 25). Имеется в виду выпуклость в топологическом смысле.

8 (стр. 25). Исключение составляет случай, когда точки A и B (а, следовательно, и A' и B') лежат на оси X . В этом случае существует бесконечно много вещественных подстановок, переводящих AB в $A'B'$, и многоугольник R_0 порождает бесконечно много фуксовых групп (изоморфных между собой).

9 (стр. 27). Следует иметь в виду, что, поскольку производящий многоугольник выбирается неоднозначно, одна и та же группа в принципе может быть отнесена к различным семействам. И действительно, существуют, например, фуксовы группы, принадлежащие одновременно ко второму и шестому семействам. См. также прим. [14].

10 (стр. 32). Если выполнены условия прим. [5], то циклы четвертого подвида невозможны. Таким образом, для всякой фуксовой группы можно найти производящий многоугольник, не содержащий циклов четвертого подвида.

11 (стр. 33). См. прим. [8].

12 (стр. 43). Этот случай можно не рассматривать (см. прим. [10]).

13 (стр. 44). Для того чтобы определенный таким образом род фуксовой группы не зависел от выбора производящего многоугольника R_0 , нужно потребовать, чтобы многоугольник R_0 не содержал вершин четвертого подвида (в этом случае его образы покрывают всю верхнюю полуплоскость). Докажем, что при этом условии род является инвариантом группы.

Пусть группа G относится к первому, второму или шестому семейству. Обозначим через P открытую верхнюю полуплоскость и рассмотрим фактор-пространство P/G . Оно получается из замкнутой поверхности, построенной в тексте, выкалыванием m точек, где m — число циклов второй категории многоугольника R_0 . Отсюда следует, что род этой поверхности, а также число m не зависят от выбора R_0 . Аналогично доказывается инвариантность рода для групп остальных семейств.

14 (стр. 47). Это утверждение неверно. Нетрудно привести примеры, когда многоугольник шестого (соответственно, пятого, седьмого) семейства преобразуется в многоугольник второго (соответственно, третьего, четвертого) семейства с меньшим числом сторон. В остальном классификация по семействам инвариантна, если исключить многоугольники с вершинами четвертого подвида. Для доказательства рассмотрим поверхность P/G (см. прим. [13]). Группа первого семейства характеризуется тем, что она компактна, группы второго и шестого семейств — тем, что она некомпактна, но имеет конечную площадь в смысле меры, индуцированной инвариантной мерой на P (см. раздел II).

Относительно упоминаемого Пуанкаре исключения см. прим. [19].

15 (стр. 47). См. прим. [13].

16 (стр. 47). Вершины второго подвида, принадлежащие циклам с суммой углов $2\pi/p$ — это в точности те точки многоугольника R_0 , стационарная подгруппа которых есть (циклическая) группа порядка p . Поэтому число циклов второго подвида с суммой углов $2\pi/p$ равно числу классов сопряженных максимальных конечных подгрупп порядка p в группе G .

17 (стр. 49). См. прим. [1].

18 (стр. 49). Это означает одинаковое чередование сторон первого и второго рода и одинаковое разбиение сторон первого рода на сопряженные пары.

19 (стр. 52). Семиугольник R'_0 не может быть получен из восьмиугольника R_0 с помощью процедуры, описанной в разделе IX, поскольку он не содержит точек, соответствующих точкам, расположенным под полуокружностью MN . Тем не менее верно, что он является производящим многоугольником той же группы. То же относится к последующим преобразованиям семиугольника R'_0 в шестиугольник R''_0 и затем в четырехугольник R'''_0 .

Э. Б. Винберг

О ФУКСОВЫХ ФУНКЦИЯХ

Непосредственной целью рассмотрения фуксовых, или, как их теперь называют, автоморфных, функций для А. Пуанкаре было приложение к решению линейных дифференциальных уравнений с алгебраическими коэффициентами (см. мемуар «О группах линейных уравнений», помещенный в этом же томе). Однако значение теории автоморфных функций выходит далеко за рамки этого приложения.

Так, А. Пуанкаре применил автоморфные функции для униформизации алгебраических зависимостей между двумя переменными. В дальнейшем эти результаты были обобщены (о проблеме униформизации см. комментарий к мемуару «Теория фуксовых групп»).

Рассмотрение автоморфных функций, связанных с арифметически определенными фуксовыми группами, приводит к так называемой арифметической теории автоморфных функций. Начало этой теории положил сам А. Пуанкаре, заметивший, что группа целочисленных автоморфизмов неопределенной рациональной квадратичной формы от трех переменных естественно изоморфна некоторой фуксовой группе¹. В дальнейшем арифметическая теория автоморфных функций разрабатывалась многими авторами. Значительных успехов в этом направлении добились М. Эйхлер и Г. Шимура².

В разделе I настоящего мемуара производится разбиение фуксовых групп на классы таким образом, что две группы относятся к одному классу, если, грубо говоря, одна из них может быть непрерывно деформирована в другую. В связи с этим возникает вопрос о топологическом и аналитическом строении класса фуксовых групп. Этот вопрос был значительно продвинут в работах О. Тейхмюллера, Л. Альфорса и Л. Берса³.

Изложение теории автоморфных функций и связанных с ней вопросов на русском языке имеется в следующих монографиях: Р. Ф о р д. Автоморфные функции. М.—Л., ОНТИ, 1936; Р. Н е в а н л и н н а. Униформизация. М., ИЛ, 1955; Дж. С п р и н г е р. Введение в теорию римановых поверхностей. М., ИЛ, 1960.

Обзор современного состояния теории римановых поверхностей см. в сборнике «Advances in the theory of Riemann surfaces». Proceedings of the 1969 Stony Brook Conference. — Ann. Math. Studies, 1971, N 66.

1 (стр. 75). Ряды типа (5) принято теперь называть рядами Пуанкаре.

2 (стр. 77). Свойство (7) означает инвариантность дифференциальной формы $\Theta(z) dz^m$ относительно подстановок из группы G . Такие дифференциальные формы называются автоморфными формами веса m .

Можно дать еще одну, весьма полезную, интерпретацию тэта-фуксовых функций. Пусть P — открытый фундаментальный круг (если фундаментальная окружность вырождается в прямую, то P — открытая полуплоскость). Рассмотрим фактор-пространство P/G и обозначим через π естественную проекцию $P \rightarrow P/G$. Функцию, определенную в области $U \subset P/G$, назовем голоморфной, если ее прообраз есть голоморфная функция в области $\pi^{-1}(U) \subset P$, инвариантная относительно подстановок

¹ Les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique. — Oeuvres, t. II.

² G. S h i m u r a. Introduction to the arithmetical theory of automorphic functions. — Publ. Math. Soc. Japan, 1971, 11.

³ Л. А л ь ф о р с, Л. Б е р с. Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения. М., ИЛ, 1961.

из группы G . Пусть теперь x — любая точка поверхности P/G . Легко видеть, что в достаточно малой окрестности U точки x существует комплексная координата, т. е. такая взаимно однозначная голоморфная функция u , что всякая голоморфная функция, определенная в U , есть голоморфная функция от u . Тем самым P/G превращается в одномерное комплексное многообразие, или «риманову поверхность».

Автоморфные формы веса m на P — это в точности прообразы дифференциальных форм степени m на римановой поверхности P/G .

3 (стр. 77). См. прим. [9] к статье о фуксовых группах.

4 (стр. 77). Если фуксова группа G обладает производящим многоугольником с вершинами четвертого подвида, то площадь поверхности P/G бесконечна. Следовательно, в этом случае группа G не может относиться к первому типу шестого семейства (см. прим. [14] к статье о фуксовых группах).

5 (стр. 79). Под изолированной особой точкой Пуанкаре понимает, по-видимому, особую точку, не принадлежащую никакой дуге, состоящей целиком из особых точек.

6 (стр. 81). Риманова поверхность P/G (см. прим. [2]) может быть пополнена «идеальными» точками, соответствующими циклам второй категории производящего многоугольника. В случае, когда группа G принадлежит ко второму или шестому семейству, при таком пополнении получается компактная поверхность.

Если α — одна из вершин цикла второй категории, то функция $u = e^{\frac{2i\pi}{\beta(z-\alpha)}}$ определяет комплексную координату в окрестности соответствующей идеальной точки поверхности P/G . Непосредственное вычисление показывает, что

$$\Theta(z) dz^m = \left(\frac{i\beta}{2\pi}\right)^m \Phi(u) u^{-m} du^m,$$

где $\Phi(u) = \Theta(z) (z-\alpha)^{2m}$. Таким образом, дифференциальная форма на P/G , соответствующая тэта-фуксовой функции Θ , продолжается на пополнение P/G . (При этом не исключено, конечно, что в некоторых идеальных точках, как и в некоторых обычных, эта форма будет иметь полюсы.)

7 (стр. 84). Будем считать для простоты, что $\alpha=0$. Тогда подстановки из стационарной группы имеют вид $(z, \varepsilon z)$, где $\varepsilon^k=1$. Функция $u=z^k$ определяет локальную координату в окрестности точки $\pi(\alpha) \in P/G$ (см. прим. [2]). Следовательно, дифференциальная форма $\Theta(z) dz^m$ должна записываться: $H(u) du^m = k^m H(z^k) z^{m(k-1)} dz^m$. Отсюда сразу получается сравнение (9). Можно также заметить, что если кратность нуля функции Θ в точке α равна p , то кратность нуля соответствующей дифференциальной формы на P/G в точке $\pi(\alpha)$ равна $\frac{p+m}{k} - m$. (При этом полюс следует считать нулем отрицательной кратности.)

8 (стр. 88). Эта формула может быть доказана более поучительным способом с помощью интегрирования по римановой поверхности P/G (см. прим. [2]).

Напомним для этого некоторые известные факты. Всякая компактная риманова поверхность S рода $g > 1$ может быть представлена как фактор-пространство верхней полуплоскости P по фуксовой группе Γ , принадлежащей, в терминологии Пуанкаре, к первому типу первого семейства, т. е. действующей в P без неподвижных точек. В этом случае отображение $\pi: P \rightarrow P/\Gamma = S$ является накрытием; комплексная структура и инвариантная метрика круга P переносятся на S тривиальным образом.

Будем считать, что метрика нормирована таким образом, что кривизна равна -1 . Тогда по формуле Гаусса площадь поверхности S равна $-2\pi N$, где $N=2-2g$ — эйлерова характеристика.

Плотностью гладкой меры μ на римановой поверхности называется такая функция $\Phi(u, \bar{u})$, что мера любого множества A равна

$$\mu(A) = \frac{i}{2} \int_A \int \Phi(u, \bar{u}) du \wedge d\bar{u}.$$

При переходе к другой координате v функция плотности делится на $\left| \frac{dv}{du} \right|^2$.

Функция $\tilde{\Phi}(u, \bar{u}) = \frac{\partial^2 \ln \Phi(u, \bar{u})}{\partial u \partial \bar{u}}$ ведет себя так же и, значит, тоже является плотностью некоторой гладкой меры $\tilde{\mu}$. Если исходная мера μ произошла от инвариантной меры на универсальной накрывающей, то это же будет справедливо и в отношении меры $\tilde{\mu}$. Следовательно, в этом случае $\tilde{\mu} = c\mu$ и $\tilde{\Phi} = c\Phi$, где c — константа. Для «стандартной» меры μ на римановой поверхности S , определяемой метрикой постоянной кривизны, равной -1 , нетрудно подсчитать, что $c = 1/2$.

Т е о р е м а. Пусть θ — мероморфная дифференциальная форма степени m на компактной римановой поверхности S рода $g > 1$. Тогда разность между числом нулей и числом полюсов формы θ равна $-mN$, где $N = 2 - 2g$ — эйлерова характеристика поверхности S .

В самом деле, пусть u — локальная координата в некоторой области U поверхности S . Тогда $\theta = \Theta(u) du^m$, где Θ — мероморфная функция. Пусть, далее, C — контур, стягиваемый в области U и не содержащий нулей и полюсов формы θ . Тогда разность между числом нулей и числом полюсов формы θ , заключенных внутри C , равна

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} du.$$

С другой стороны, пусть $\Phi(u, \bar{u})$ — плотность стандартной меры μ на S . Рассмотрим функцию $H(u, \bar{u}) = \frac{\Theta(u)}{\Phi(u, \bar{u})^m}$. При переходе к другой координате v она

умножается на $\left(\frac{dv}{du} \right)^m$. Отсюда следует, что дифференциальная форма $\alpha = \frac{\partial \ln H(u, \bar{u})}{\partial u} du$ не зависит от выбора координаты.

Имеем теперь

$$\oint_C \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} du = \oint_C \alpha + m \oint_C \frac{\partial \ln \Phi(u, \bar{u})}{\partial u} du.$$

В последнем интеграле можно перейти к интегрированию по внутренности A контура C :

$$\oint_C \frac{\partial \ln \Phi(u, \bar{u})}{\partial u} du = - \iint_A \frac{\partial^2 \ln \Phi(u, \bar{u})}{\partial u \partial \bar{u}} du \wedge d\bar{u} = - \frac{1}{2} \iint_A \Phi(u, \bar{u}) du \wedge d\bar{u} = i\mu(A).$$

Возьмем теперь достаточно мелкое клеточное разбиение поверхности S , и пусть $C_1, \dots, C_l$ — контуры двумерных клеток этого разбиения. Очевидно, что $\sum_{C_i} \oint \alpha = 0$.

Следовательно, разность между числом нулей и числом полюсов формы θ на всей поверхности S равна $\frac{m\mu(S)}{2\pi} = m(2g - 2)$, что и требовалось доказать.

Для того чтобы получить формулу, доказываемую Пуанкаре, нужно установить связь между числом существенно различных нулей и полюсов функции $\Theta(z)$ и числом нулей и полюсов соответствующей дифференциальной формы на римановой поверхности $S = P/G$. Для простоты условимся говорить только о нулях, считая полюсы нулями отрицательной кратности.

Пусть α — нуль кратности p функции $\Theta(z)$. Если α не является неподвижной точкой никакой подстановки из группы G , кроме тождественной, то $\pi(\alpha)$ будет нулем той же кратности p для формы θ . Пусть теперь порядок стационарной подгруппы точки α равен $k > 1$. При этом условии α автоматически является одной из вершин

производящего многоугольника. В силу принятого Пуанкаре соглашения, вершины, эквивалентные α , образуют p/k существенно различных нулей функции $\Theta(z)$. С другой стороны, точка $\pi(\alpha)$ является для формы θ нулем кратности $\frac{p}{k} - m \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ (см. прим. [7]). Поэтому число ν существенно различных нулей функции $\Theta(z)$ превосходит число нулей формы θ на $m \left(s - \sum \frac{1}{k_i}\right)$, где s — число циклов, образуемых вершинами производящего многоугольника, а $k_1, \dots, k_s$ — порядки соответствующих стационарных подгрупп.

Применяя доказанную выше теорему и учитывая, что $N = s + 1 - n$ (см. раздел VIII мемуара «Теория фуксовых групп»), находим

$$\nu = -mN + m \left(s - \sum \frac{1}{k_i}\right) = m \left(n - 1 - \sum \frac{1}{k_i}\right),$$

т. е. как раз ту формулу, которую доказывает Пуанкаре.

9 (стр. 89). Доказательство этой формулы может быть проведено так же, как это было сделано для групп первого семейства в прим. [8], если взять в качестве S поверхность P/G , пополненную идеальными точками (см. прим. [6]). При этом необходимо дополнительно рассмотреть случай, когда α — вершина второй категории. Функ-

ция $\Theta(z)$ представляется тогда в виде $\Theta(z) = (z - \alpha)^{-2m} \Phi(u)$, где $u = e^{\frac{2i\pi}{\beta(z-\alpha)}}$. В силу соглашения, принятого Пуанкаре, вершины, входящие в цикл, к которому принадлежит α , образуют p различных нулей функции Θ , где p — кратность точки $u=0$ как нуля функции $\Phi(u)$. С другой стороны, из формулы, приведенной в прим. [6], видно, что форма θ имеет в точке $\pi(\alpha)$ нуль кратности $p - m$.

Следовательно, число различных нулей функции $\Theta(z)$ (считая полюсы нулями отрицательной кратности) превосходит число нулей формы θ на $m \left(s - \sum_{i=1}^t \frac{1}{k_i}\right)$, где s — число циклов, образуемых вершинами производящего многоугольника, t — число циклов первой категории, а $k_1, \dots, k_t$ — порядки соответствующих стационарных подгрупп. Далее рассуждаем так же, как в прим. [8].

10 (стр. 91). При надлежащем выборе римановой поверхности S эта формула может быть выведена так же, как в прим. [8] соответствующая формула для групп первой категории.

11 (стр. 92). См. прим. [5].

Э. Б. Винберг

О ГРУППАХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мемуар «О группах линейных уравнений» положил начало теории униформизации римановых поверхностей. Общая задача униформизации — отобразить конформно универсальную накрывающую над данной римановой поверхностью на сферу, плоскость или круг — составляет (в несколько иных терминах) содержание 22-й проблемы Д. Гильберта. На протяжении всей жизни А. Пуанкаре неоднократно возвращался к этой задаче, и в 1907 году, одновременно с П. Кебе, дал ей окончательное решение. В предлагаемом мемуаре теорема об униформизации доказана для компактных римановых поверхностей с конечным числом выколотых точек¹.

¹ Точнее, в мемуаре доказана более общая теорема об униформизации компактной римановой поверхности с заданной сигнатурой (см. прим. [10]).

Хотя теорема об униформизации навсегда останется связанной с именем А. Пуанкаре, ее доказательство, данное в мемуаре «О группах линейных уравнений», оказалось почти забытым: его нет ни в одной из распространенных монографий, посвященных римановым поверхностям или автоморфным функциям. В то же время методы, применяемые А. Пуанкаре, не менее ценны, чем окончательный результат. Метод непрерывности, описанный в разделе VIII, стал одним из основных топологических методов доказательства теорем существования, а теория, которую А. Пуанкаре развил для применения этого метода к проблеме униформизации, на много лет опередила свое время. Так, А. Пуанкаре свободно использует пространства римановых поверхностей, которые были строго определены как аналитические многообразия только в 1958—1960 годах², а основное утверждение разделов XII—XIII до сих пор остается открытой проблемой³.

1 (стр. 145). Вторая задача эквивалентна проблеме униформизации; подробнее см. прим. [10].

2 (стр. 146). Линейные подстановки — линейные преобразования.

3 (стр. 146). В левой части формулы (3) подразумевается выражение для $\det S$.

4 (стр. 148). До этого места речь шла об инвариантах индивидуального линейного преобразования $C^p \rightarrow C^p$, число которых равно $p - 1$. В дальнейшем речь идет, как правило, об инвариантах группы — параметрах, задающих n образующих элементов $S_1, \dots, S_n$ с точностью до трансформации одним и тем же линейным преобразованием σ .

5 (стр. 149). Определение ложных особых точек дано на стр. 157.

6 (стр. 149). Решение (интеграл) уравнения (1) называется регулярным в окрестности особой точки a , если оно может быть представлено в виде произведения функции, голоморфной и отличной от нуля в окрестности точки a , на $(x - a)^\lambda [\ln(x - a)]^k$ (k — неотрицательное целое число, не превосходящее $p - 1$) или в виде линейной комбинации таких произведений. Число λ называется характеристическим показателем особой точки. Особая точка, в которой все решения регулярны, называется регулярной. Определяющее уравнение позволяет находить характеристические показатели регулярной особой точки. Теория линейных уравнений, у которых все особые точки регулярны (так называемых уравнений класса Фукса), излагается, например, в следующих монографиях: В. В. Г о л у б е в. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.—Л., 1941; Ф. Т р и к о м и. Дифференциальные уравнения. М., ИЛ, 1962.

7 (стр. 157). В разделе IV $\varphi_k(x)$ — рациональные функции.

8 (стр. 159). В этом замечании — подход к решению известной проблемы Римана, общая постановка которой составляет 21-ю проблему Гильберта: найти линейное уравнение класса Фукса, допускающее данную группу⁴.

9 (стр. 159). Здесь неточность, не влияющая, однако, на рассуждения дальнейших разделов: корни λ_i определяющего уравнения, а значит и выражения $2\pi(1 - 2\lambda_i)$, в общем случае комплексны.

10 (стр. 163). Как указывалось в прим. [1], найти фуксово уравнение среди уравнений данного типа — это значит решить задачу об униформизации некоторой римановой поверхности π' . Чтобы доказать это утверждение, нужно предварительно уточнить определение нормального уравнения.

Уравнение $\psi(x, y) = 0$ задает в комплексной проективной плоскости компактную риманову поверхность π . Эта поверхность, как накрывающая над расширенной плоскостью x , имеет конечное число точек ветвления p_i порядка k_i , $i = 1, \dots, l$, и конечное число бесконечно удаленных точек p_i , $i = l + 1, \dots, m$, которые в общем случае не яв-

² См.: Л. А л ь ф о р с, Л. Б е р с. Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения. Сборник. М., ИЛ, 1961.

³ Близкое утверждение сформулировано в качестве гипотезы в статье Берса: Kleinian groups and boundary points of Teichmüller spaces, I. — Ann. Math., 1970, 91, № 3, 570—600.

⁴ Подробнее см.: Проблемы Гильберта. Сборник. Под ред. П. С. Александрова. М., «Наука», 1969.

ляются точками ветвления. Нормальное уравнение определяется таким образом, чтобы частное z (или $1/z$) от деления двух его решений было локальным параметром на поверхности π всюду, за исключением конечного числа точек q_j , которые А. Пуанкаре называет «особыми в собственном смысле слова» (в общем случае ни одна из точек q_j не совпадает ни с одной из точек p_i). Это свойство функции z налагает дополнительные алгебраические требования на нормальное уравнение: эти требования сформулированы в разделе IV мемуара «О фуксовых функциях», и их надо добавить к определению нормального уравнения.

Переформулируем теперь в геометрических терминах определение эквивалентных нормальных уравнений. Два нормальных уравнения (1) и (1') называются эквивалентными, если соответствующие римановы поверхности π и π_1 конформно эквивалентны; конформное отображение $\pi \rightarrow \pi_1$ переводит собственно особые точки одного уравнения в собственно особые точки другого, причем соответствующим точкам отвечают одинаковые разности корней определяющего уравнения. Поэтому тип уравнения задается абстрактной римановой поверхностью π с отмеченными на ней точками $q_1, \dots, q_n$, которым приписаны числа k_j (k_j — натуральное число или бесконечность); короче — римановой поверхностью с заданной сигнатурой.

Перейдем к описанию римановой поверхности π' , которую униформизует функция z . Пусть при $i=1, \dots, s$ число k_j натуральное, а при $j=s+1, \dots, n$ число k_j равно бесконечности. Поверхность π' является разветвленной накрывающей над поверхностью π с выколотыми особыми точками $q_{s+1}, \dots, q_n$. Точки поверхности π' , не лежащие над q_j , $j=1, \dots, s$, являются регулярными точками накрытия; все точки, лежащие над q_j , $j=1, \dots, s$, являются точками ветвления порядка k_j . Эти условия определяют поверхность π' неоднозначно. Выберем и зафиксируем любую такую поверхность π' ; универсальную накрывающую над ней обозначим $\hat{\pi}'$. Эти обозначения используются в дальнейших комментариях без пояснений.

Докажем, наконец, что если уравнение (1) нормально и фуксово, то частное z от деления двух его решений униформизует риманову поверхность π' . Для краткости мы будем говорить, что *функция z униформизует поверхность π с заданной сигнатурой*. Действительно, в силу нормальности уравнения (1), z — локальный параметр всюду на π' , а значит, и на $\hat{\pi}'$. Далее, в силу определения поверхности π' , функция z однозначна на $\hat{\pi}'$ и отображает $\hat{\pi}'$ на некоторую область Ω , инвариантную под действием группы G уравнения (1). Поскольку группа G фуксова, граничные точки области Ω лежат на единичной окружности. По теореме о монодромии, область Ω совпадает с внутренностью (или внешностью) единичного круга, и отображение $z: \hat{\pi}' \rightarrow \Omega$ конформно.

Это утверждение, не сформулированное явно, используется в мемуаре неоднократно: на стр. 166, 168, в доказательстве фундаментальной леммы раздела VII и т. д.

11 (стр. 167). Отношение подчинения для типов допускает следующую геометрическую интерпретацию. Пусть π' — риманова поверхность, определенная в предыдущем примечании и соответствующая уравнению (1), π'' — аналогичная риманова поверхность, соответствующая уравнению (1'). Если тип уравнения (1') подчинен типу уравнения (1), то риманова поверхность π'' получается из некоторого конечнолистного накрытия поверхности π' выкалыванием конечного числа точек. Все неоднозначные регулярные аналитические функции на поверхности π' можно интерпретировать как однозначные аналитические функции на универсальной накрывающей $\hat{\pi}''$ над поверхностью π'' ; отсюда следует основное утверждение раздела VI.

12 (стр. 170). Приведем более простое доказательство фундаментальной леммы. Поскольку уравнения E и E' принадлежат одному типу, можно считать, что им соответствуют одни и те же поверхности π и π' . Отношения z и t двух решений первого (соответственно второго) уравнения отображают конформно универсальную накрывающую $\hat{\pi}'$ на единичный круг. Поэтому функция $z \circ t^{-1}$ отображает единичный круг конформно на себя. В силу условий нормировки, наложенных на z и $t: z(a)=t(a)$, $\arg z(b)=\arg t(b)$ — это отображение тождественно, т. е. $z \equiv t$. Но уравнение

$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x) v$ однозначно восстанавливается по частному z двух его решений: коэффициент -2φ равен производной Шварца $[z]_x$. Поэтому уравнения E и E' совпадают.

13 (стр. 173). А. Пуанкаре называет замкнутым компактное многообразие без края. В дальнейшем доказывается более слабое утверждение, чем компактность многообразия S' . А именно, доказывается, что многообразие S' можно компактифицировать (полученное многообразие обозначим $\bar{S}' = S' \cup \Gamma$), и отображение $f: S' \rightarrow S$ непрерывно продолжается на Γ . Оказывается, что $f(\Gamma)$ принадлежит компактификации многообразия S и является подмногообразием вещественной коразмерности больше 1. Размерности многообразий S' и S совпадают, и отображение f — мономорфизм по фундаментальной лемме. Отсюда следует, что $f: S' \rightarrow S$ — гомеоморфизм.

Надо сказать, что эта программа, далеко опережающая свое время, осуществлена А. Пуанкаре на физическом уровне строгости; некоторые ее части являются достижениями последних лет; некоторые до сих пор остаются открытыми проблемами.

Так, многообразие S , о комплексной размерности которого говорит А. Пуанкаре, — это пространство римановых поверхностей (точнее, фактор-пространство пространства Тейхмюллера по модулярной группе). Пространство римановых поверхностей было строго определено в работах О. Тейхмюллера в начале 40-х гг.; аналитическая структура на этом пространстве введена Л. Альфорсом и Л. Берсом в 1958—1960 гг. Основная теорема разделов XII и XIII, с помощью которой А. Пуанкаре описывает компактификацию Γ многообразия S' («Предельный многоугольник может быть приведенным, если он принадлежит к первому типу»), в общем случае остается нерешенной проблемой. А posteriori, считая теорему об униформизации уже доказанной, теорему А. Пуанкаре можно переформулировать как утверждение о граничных точках пространства Тейхмюллера. Эти граничные точки подробно изучены в недавних статьях Л. Берса (см. выше, стр. 721) и Б. Маскита⁵. Понятия, введенные в этих статьях, позволили сформулировать в строгих терминах утверждение, очень близкое к теореме А. Пуанкаре (см.: Л. Б е р с, цит. выше соч., § 11, Conjecture IV).

14 (стр. 202). Неточность: следует читать $\alpha_{2p} \alpha_{4p} \geq \alpha_{2p} \alpha_{2p+1}$.

15 (стр. 234). Это утверждение неясно. Если x — клейнова функция от z , определенная на всей плоскости, то это значит, что функция z отображает универсальную накрывающую $\hat{\pi}'$ на множество Ω , которое плотно на расширенной комплексной плоскости, связно и односвязно. Группа G соответствующего уравнения действует на Ω дискретно. Существование клейновых групп, которые действуют дискретно на связном, односвязном, всюду плотном множестве, было открыто Л. Берсом (1965 г.); подробное изложение дано в его статье⁶; Л. Берс назвал такие группы вырожденными. А. Пуанкаре утверждает, что каждому уравнению данного типа, т. е. каждой римановой поверхности π с заданной сигнатурой, соответствует одна такая группа. Однако Л. Берс доказал, что каждой римановой поверхности π с заданной сигнатурой соответствует континуум попарно несопряженных вырожденных групп.

Ю. С. Ильяшенко

ФУКСОВЫ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЕ $\Delta u = e^u$

В этом мемуаре А. Пуанкаре дает прямое доказательство теоремы об униформизации для компактных римановых поверхностей с заданной сигнатурой (см. прим. [10] к мемуару «О группах линейных уравнений»). А. Пуанкаре решает эквивалентную задачу: доказать существование на римановой поверхности с заданной сигнатурой эрмитовой метрики постоянной отрицательной кривизны, имеющей специального вида осо-

⁵ Kleinian groups and boundary points of Teichmüller spaces, II. — Ann. Math., 1970, 91, № 3, 606—638.

⁶ См. сноску 3 на стр. 721.

бенности при подходе к отмеченным точкам. Такая метрика на римановой поверхности называется теперь метрикой Пуанкаре. Методы, созданные А. Пуанкаре для решения этой задачи, оказали существенное влияние на дальнейшее развитие теории уравнений с частными производными. Так, А. Пуанкаре впервые доказывает разрешимость дифференциального уравнения на многообразии, не сводя его к уравнению в области числового пространства. Для доказательства разрешимости рассматриваемого уравнения А. Пуанкаре развил метод продолжения по параметру с использованием априорной оценки — метод, который до нашего времени остается одним из основных в теории уравнений эллиптического типа.

1 (стр. 235). Как отмечалось в прим. [10] к мемуару «О группах линейных уравнений», найти фуксово уравнение среди уравнений данного типа — это значит униформизовать некоторую риманову поверхность π' , накрывающую над поверхностью π , заданной соотношением $f(x, y) = 0$. Построение поверхности π' по уравнению данного типа описано в указанном примечании. Существенно отметить, что А. Пуанкаре, не оговаривая этого явно, рассматривает уравнения фуксова типа, отличные от уравнений рационального и эллиптического типов, определенных в разделе IV мемуара «О группах линейных уравнений». Для рассматриваемых уравнений π' — риманова поверхность рода g' с n' выколотыми точками, причем $g' + \frac{n'}{2} > 1$.

2 (стр. 238). Полезно следующее геометрическое истолкование уравнения (3). Пусть эрмитова метрика на римановой поверхности записывается через локальный параметр ξ в виде $g|d\xi|^2$. Тогда гауссова кривизна поверхности равна $-\Delta \ln g / 2g$. Поэтому уравнение (3) означает, что кривизна поверхности π в метрике $e^u |dZ|^2$ равна -4 , и следует из того, что кривизна плоскости Лобачевского в метрике $|dz|^2 / (1 - |z|^2)^2$ равняется -4 .

3 (стр. 245). В современных терминах эта теорема доказывается просто. Пусть π — произвольная компактная риманова поверхность. Превратить ее в изотропную поверхность Клейна — это значит задать на ней эрмитову метрику. Для этого достаточно задать эрмитову метрику на проективной плоскости CP^2 и построить регулярное отображение поверхности π в CP^2 (существование такого отображения А. Пуанкаре неоднократно использует). Метрика, индуцированная на поверхности π этим отображением, и будет искомой. Геометрическое истолкование дальнейших уравнений сильно упрощается, если метрика на π — эрмитова.

4 (стр. 253). Уравнение (1bis) допускает геометрическое истолкование, полезное для дальнейшего. Будем считать, что поверхность Клейна, рассматриваемая А. Пуанкаре, изотропна (см. прим. [3]); соответствующую эрмитову метрику на римановой поверхности π обозначим через ω . Если на поверхности π нет вершин второго и третьего типов, то метрика Пуанкаре ищется в виде $e^U \omega$. Пусть метрика ω через локальный параметр ξ записывается в виде $g|d\xi|^2$; тогда кривизна поверхности π в метрике $e^U \omega$ равна $-\frac{\Delta U + \Delta \ln g}{2ge^U}$ и должна быть равна -4 , поскольку $e^U \omega$ — метрика Пуанкаре. Отсюда следует уравнение (1) раздела IV. Свободный член этого уравнения $-\Phi = \Delta \ln g / g$ имеет замечательный геометрический смысл: это удвоенная кривизна поверхности π в метрике ω .

Если на поверхности π имеются вершины второго и третьего типов, то вместе с поверхностью π нужно рассматривать поверхность π' . Метрика $e^h \omega$ на поверхности π индуцирует метрику ω' на накрывающей π' , регулярную во всех регулярных точках накрытия. Условие, наложенное на поведения функции h в окрестности вершин второго типа (стр. 253), означает, что метрика ω' регулярна также и в точках ветвления накрывающей π' . Метрика Пуанкаре на поверхности π ищется в виде $e^U e^h \omega$; функция U регулярна всюду на π . Уравнение, требующее, чтобы кривизна поверхности π в этой метрике равнялась -4 , запишется так: $\Delta U / g = 8e^h e^U - (\Delta h + \Delta \ln g) / g$. Полагая $8e^h = \Phi$ и $(\Delta h + \Delta \ln g) / g = \Phi$, получим уравнение (1bis). Свободный член этого уравнения также допускает геометрическое истолкование: кривизна поверхности π' в метрике ω'

равна $-\frac{1}{2} \Phi \frac{d\omega}{d\omega'} = -\frac{1}{2} \Phi e^{-h}$. Поскольку метрика ω' регулярна всюду на π' , последняя функция гладко продолжается в точки ветвления поверхности π' , как накрывающей над π .

5 (стр. 260). Речь идет о точке ветвления алгебраической кривой над плоскостью Z , которая выделяется условиями: $f=0$, $\frac{df}{dZ} \neq 0$, $\frac{df}{dZ'} = 0$.

6 (стр. 261). Здесь неточность, впрочем легко исправимая: G как функция от M_1 имеет полюс в точке P .

Пусть $f(U_1)$ — финитная функция с носителем в окрестности точки P и тождественно равная 1 в меньшей окрестности точки P . Разность $G_1 = G - f(U_1) \ln|Z_0 - U_1|$ ограничена как функция M_1 в области S'' вместе со всеми производными. Если в интеграле v'' заменить G на G_1 , то интеграл изменится на константу; поэтому равенство $Dv''=0$ действительно следует из равенства $DG=0$.

7 (стр. 262). Это равенство справедливо для всех $M \neq P_1$, независимо от того, обращается в нуль интеграл $\int \varphi d\omega$ или нет.

8 (стр. 290). Нужно еще потребовать, чтобы отношение Dv/ξ было ограниченным; для этого достаточно, чтобы функция v была постоянна в окрестности точек K и K_1 .

9 (стр. 307). Предполагая по-прежнему, что поверхность Клейна изотропна, т. е. метрика ω на поверхности π — эрмитова, приведем геометрическое доказательство разрешимости уравнений (1) и (1 bis) раздела IV. Если поверхность π не имеет вершин второго и третьего типов, то, как указывалось в прим. [4], свободный член $-\Phi$ уравнения (1) — это удвоенная гауссова кривизна K поверхности π в метрике ω . По формуле Гаусса—Бонне, интеграл $\int \Phi d\omega = -2 \int K d\omega = 8\pi(g-1)$ положителен. Действительно, род g поверхности π больше 1, поскольку рассматриваемое уравнение не принадлежит к рациональному или эллиптическому типу (см. прим. [1]). Если на поверхности π есть вершины второго и третьего типов, то вместе с интегралом $J_1 = \int_{\pi} \Phi d\omega$

нужно рассматривать интеграл $J_2 = \int_{\pi'} \Phi \frac{d\omega}{d\omega'} d\omega'$. Поверхность π' — компактная по-

верхность рода g' с n' выколотыми точками, и, в силу прим. [1], $g' + \frac{n'}{2} > 1$.

Пусть N — число листов накрытия π' над π . Интеграл $J_2 = NJ_1$ и, как указывалось в прим. [4], $\Phi \frac{d\omega}{d\omega'} = -2K$, где K — гауссова кривизна поверхности π' в метрике ω' .

По формуле Гаусса—Бонне, интеграл $J_2 = 8\pi\left(g' + \frac{n'}{2} - 1\right)$ и, следовательно, положителен. Отсюда следует разрешимость уравнений (1) и (1bis).

Ю. С. Ильяшенко

О КРИВЫХ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ.

О КРИВЫХ НА АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В этих двух статьях (имеется еще короткая публикация¹ под тем же названием) Пуанкаре обращается к некоторым вопросам алгебраической геометрии и оставляет здесь, по словам Кастельнуово, незабываемый след своего универсального дарования, доказывая следующую фундаментальную теорему:

¹ См.: С. г. Acad. Sci., 1909, 149.

Пусть S — алгебраическая поверхность (над полем C комплексных чисел). Тогда на S существует q -мерная алгебраическая система линейно неэквивалентных алгебраических кривых, где q — число интегралов Пикара первого рода на S , т. е. размерность пространства замкнутых голоморфных дифференциальных 1-форм на S .

Согласно теореме Дольбо, последнее число равно размерности $H^1(S, O_S)$, т. е. *иррегулярности* поверхности S . Впрочем, уже во времена Пуанкаре было известно совпадение числа интегралов Пикара первого рода с иррегулярностью поверхности, которая понималась как разность $p_g - p_a$ геометрического и арифметического рода (Севери, Кастельнуово, 1905 г.).

Кроме того, Пуанкаре получает мимоходом следующий результат Пикара: если S — поверхность степени m в трехмерном пространстве, то линейная система, высекаемая на плоском сечении S присоединенными к S поверхностями порядка $m - 3$, имеет дефект q .

Наконец, Пуанкаре предлагает метод, позволяющий оценивать и вычислять число Пикара ρ — ранг группы Нерона—Севери поверхности S — и, в частности, доказывающий конечность ρ .

Немного об истории основной теоремы, доказанной Пуанкаре². В 1893 г. G. Humbert показал, что если алгебраическая поверхность обладает непрерывной системой алгебраических кривых, не принадлежащих одной линейной системе, то поверхность иррегулярна. Это указывало на существование связи между иррегулярностью и размерностью непрерывных систем алгебраических кривых и привлекло внимание геометров итальянской школы. Кастельнуово устанавливает, что размерность любой системы линейно неэквивалентных кривых не превосходит иррегулярности q ; обращение этого результата было получено комбинированными усилиями Энрикеса, Севери и Пуанкаре (интересно отметить аналогию с кривыми: на кривой рода g множества из n точек ($n \geq g$) образуют непрерывную систему, расслоенную на линейные ряды g -мерной базой).

Первое доказательство теоремы было предложено в 1905 г. Энрикесом и в том же году Севери; оба доказательства опирались на так называемое утверждение Энрикеса о полноте характеристической системы. Позже Севери пришел к выводу, что это утверждение неверно, и упорно отстаивал его; в 1943 г. его ученик Цаппа сконструировал контрпример, показывающий, что не всякая инфинитезимальная деформация кривой на поверхности продолжается до «настоящей» деформации; подлинный смысл этого обстоятельства становится ясным лишь в теории схем Гротендика³.

Поэтому доказательство Пуанкаре теоремы Кастельнуово—Энрикеса—Севери с помощью введенного им понятия нормальных функций, не опирающееся на геометрию поверхностей, установленную итальянцами, долгое время (по сути дела до 1960 г.) оставалось единственным подходом к этой проблеме. Метод нормальных функций был затем упрощен и усовершенствован Севери и Лефшецем. Кстати, Лефшец⁴ заметил очень красивую переформулировку условий Пуанкаре на систему нормальных функций для алгебраичности определяемой ею кривой: двумерный цикл γ на поверхности алгебраичен тогда и только тогда, когда период любой голоморфной замкнутой 2-формы на γ равен 0.

Распространение цикла результатов итальянской и французской школ об иррегулярности, непрерывных системах кривых, дефекте систем, полноте характеристических систем с поверхностями на произвольные алгебраические многообразия было достигнуто в работах Кодaira⁵. Отметим, однако, что все эти результаты относятся к многообразиям над C . Положение в случае основного поля ненулевой характеристики сложнее уже для поверхностей; в частности, как показал Игуза в 1955 г., не всегда

² Подробности и библиографию см. в книгах: O. Z a r i s k i. Algebraic surfaces. Berlin, 1935; F. E n r i q u e s. Le superficie algebriche. Bologna, 1949.

³ См. по этому поводу: Д. М а м ф о р д. Лекции о кривых на алгебраической поверхности. М., 1968.

⁴ S. L e f s c h e t z. L'Analysis situs et la géométrie algébrique, Paris, 1924.

⁵ Ann. Math., 1954, 53, 86—134.

существует q -мерная система линейно не эквивалентных кривых на поверхности с иррегулярностью q ; причины и детальный анализ этого можно найти в лекциях Мамфорда. В современной терминологии теорема, доказанная Пуанкаре, — совпадение $H^1(S, \mathcal{O}_S)$ и касательного пространства к схеме Пикара $\text{Pic } S$; отличие от классического случая в том, что $\text{Pic } S$ может быть неприведенным.

Вернемся к Пуанкаре. Важно отметить, что его метод носит элементарный характер и использует только теорию алгебраических кривых. Следуя Пикару, он расслаивает поверхность S плоскими сечениями $y = \text{const}$ на семейство кривых K_y , параметризованное точками пополненной комплексной плоскости. Кривая C , лежащая на S , пересекает на каждой кривой K_y конечное число точек, которые улавливаются при помощи интегралов первого рода на кривой K_y . Напомним поэтому некоторые факты об абелевых интегралах, используемые Пуанкаре⁶.

Пусть K — кривая с обыкновенными двойными точками в качестве особенностей; полными дифференциалами первого рода Пуанкаре называет замкнутые голоморфные дифференциальные 1-формы на K (полные, ибо они локально являются полными дифференциалами функций). Если K задана уравнением $f(x, y) = 0$ степени m , то все такие дифференциалы приводятся к виду

$$\omega = \frac{P_{m-3}(x, y)}{f'_y} dx,$$

где P_{m-3} — присоединенный многочлен степени $m-3$ (многочлен, а также кривая, задаваемая им, называется присоединенным, если он обращается в нуль во всех двойных точках K). Таких независимых дифференциалов p штук, где p — род кривой K ; в нашем случае род может быть подсчитан по формуле $\frac{(m-1)(m-2)}{2} = d$, где d — число двойных точек K .

Билинейные соотношения Римана. На кривой K можно так выбрать базис 1-мерных циклов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2p}$, что, обозначая $\omega_j = \int_{\gamma_j} \omega$ период замкнутой голоморфной 1-формы ω относительно цикла γ_j , имеем:

1. Для любых двух голоморфных дифференциалов ω и ω'

$$\sum_{j=1}^p (\omega_j \omega'_{p+j} - \omega_{p+j} \omega'_j) = 0.$$

2. Для голоморфного дифференциала ω

$$\sqrt{-1} \sum_{j=1}^p (\omega_j \omega_{p+j} - \omega_{p+j} \omega_j) = \sqrt{-1} \int_K \omega \wedge \omega \geq 0.$$

Имея дифференциал ω и n точек $P_1, P_2, \dots, P_n$ на кривой K , можно образовать абелеву сумму

$$\sum_{i=1}^n \int_A^{P_i} \omega = v,$$

где A — фиксированная точка на K , а интегрирование производится по путям из A в P_i ; разумеется, v определено только по модулю периодов ω . Тогда теорема Абеля утверждает, что если мы заменим точки $P_1, P_2, \dots, P_n$ на точки $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$ так,

⁶ См.: С п р и н г е р. Введение в теорию римановых поверхностей. М., 1960.

что дивизор $\sum P_i$ останется линейно эквивалентным дивизору $\sum P'_i$, то абелева сумма не изменится.

Теорема обращения Якоби указывает случай, когда по значениям абелевых сумм восстанавливаются точки $P_1, P_2, \dots$. А именно. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_p$ — базис голоморфных дифференциалов; тогда для почти всех значений $\nu_1, \dots, \nu_p$ система уравнений (относительно $P_1, \dots, P_p \in K$)

$$\sum_{i=1}^p \int_A^{P_i} \omega_j = \nu_j$$

имеет, и притом единственное, решение.

1 (стр. 310). Как правило, дальше будут рассматриваться интегралы первого рода; здесь же интегралы второго рода нужны потому, что для интеграла U первого рода $\frac{dU}{dy}$ может оказаться интегралом второго рода.

2 (стр. 312). См.: E. P i c a r d, G. S i m a r t. Theorie des fonctions algébriques de deux variables indépendentes, t. 1. Paris, 1897.

3 (стр. 320). Имеется в виду формула $q = p - \theta_{n-3} + \theta_{n-4}$ из раздела VIII.

4 (стр. 320). По существу, это σ -процесс в особой точке.

5 (стр. 324). В следующей статье, в разделе 3, Пуанкаре соединяет разрезами особые значения $y_1, \dots, y_q$ с бесконечно удаленной точкой. Возможно, и здесь надо понимать так же.

6 (стр. 324). См. по этому поводу: O. C h i s i n i. Mem. Accad. Sci. Bologna, serie 7, 1921, 8.

7 (стр. 327). Здесь Θ -функция зависит от p аргументов и строится с учетом $2p$ периодов интегралов $u_1, \dots, u_p$; ее построение напоминает на стр. 329. Поэтому более точно формула должна выглядеть так:

$$\Theta \left(\sum_{h=1}^{p-1} \int^{M_h} du_1, \dots, \sum_{h=1}^{p-1} \int^{M_h} du_p \right) = 0.$$

По поводу Θ -функций см.: F. C o n f o r t o. Funzioni abeliane e matrici di Riemann. Roma, 1942; A. В е й л ь. Введение в теорию келеровых многообразий. М., 1961.

8 (стр. 331). Случай $p=1$ подробно разбирается в следующей статье, раздел 4.

9 (стр. 332). Более детально эти условия сформулированы в следующей статье, раздел 3.

10 (стр. 333). Так называемое число Пикара поверхности ρ — ранг группы Нерона—Севери, т. е. группы дивизоров поверхности, по модулю алгебраически эквивалентных нулю. Впервые появилось у Пикара при рассмотрении интегралов третьего рода на поверхности; Севери связал это число с алгебраической эквивалентностью кривых.

11 (стр. 334). Более аккуратно понятие интегралов, лишенных критических значений первого сорта, сформулировано в следующей статье, конец раздела 1.

12 (стр. 334). Действительно, общая поверхность третьей (как и любой) степени неособа, поэтому неособы и ее общие сечения. Выбрав оси координат так, чтобы бесконечно удаленное сечение было неособым, рассмотрим аффинную часть поверхности, задаваемую уравнением $F(x, y, z) = 0$ третьей степени. Особенности у плоских сечений $y = \text{const}$ появляются для тех значений y , для которых разрешима система

$$F(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 0.$$

По теореме Безу эти три поверхности степени 3, 2 и 2 пересекаются в 12 точках.

13 (стр. 335). Это явно противоречит тому, что число Пикара p для неособой кубики равно 7 (см., например: F. Severi. *Fondamenti di geometria algebrica*. Padova, 1948). Здесь и далее Пуанкаре при вычислении p допускает ошибку на единицу. В самом деле, если a_{ik} — значение интегралов u_i в точках A_k , а C — плоское сечение поверхности S , то по теореме Абеля нормальные функции v_i , соответствующие кривой C , равны $\sum_k a_{ik}$. Поэтому выбрасывая из рассмотрения нормальные функции, соответ-

ствующие точкам A_k , Пуанкаре упускает из рассмотрения плоские сечения.

14 (стр. 336). Неособая поверхность четвертой степени доставляет пример так называемых поверхностей $K3$ (см.: Алгебраические поверхности. — Труды Матем. института им. Стеклова, т. 75, 1965). В частности, число Пикара для них ≤ 20 , и для общей поверхности 4-й степени $p=1$; см. также приводимый ниже результат Нётера.

15 (стр. 336). *J. reine und angew. Math.*, 1882, 93, 301—306.

16 (стр. 337). Рассуждаем как в прим. [12]. $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial z}$ третьей степени, и их пересечение задает кривую C девятой степени. Эта кривая распадается. Одна из ее компонент — двойная прямая D ; значит, $C=D \cup C'$, и особые значения y соответствуют точкам пересечения поверхности S с кривой C' ; S — поверхность четвертой степени, а C' — восьмой, и имеем, казалось бы, 32 особых значения. Однако C' пересекает D в четырех точках, как следует из рассмотрения уравнения S в окрестности двойной прямой D , и эти точки не надо учитывать, так как здесь обыкновенная двойная точка превращается в двойную точку типа *острие*, а это не сказывается на роде кривой. В каждой такой точке кратность пересечения C' и S равна 3, так что на самом деле имеются только $32-12=20$ особых значений.

17 (стр. 344). Рассмотрение этого случая было упрощено Севери (*Atti. Rend. Accad. naz. Lincei*, 1921, 30, 277).

18 (стр. 351). См. наст. том, стр. 310—350.

19 (стр. 352). Пуанкаре обозначает логарифмическую функцию $\ln$ через L .

20 (стр. 355). См. прим. [6] к стр. 324.

21 (стр. 355). Более точно, $\rho_{ii}=Q/Q'$ и $\rho_{ik}=0$ при $i \neq k$.

22 (стр. 358). Это период по так называемому исчезающему циклу Лефшеца.

23 (стр. 362). См. прим. [14] к стр. 336.

24 (стр. 363). Это видно, например, из формулы

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

В. И. Данилов

ЗАМЕЧАНИЯ О КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

В этой статье А. Пуанкаре обсуждает трудности кинетической теории газов, связанные с доказательством возрастания энтропии. Он показывает на простых примерах, как для систем из очень большого числа частиц, в пределе стремящихся к бесконечности, можно согласовать микроскопическую обратимость движения по фазовой траектории с макроскопической необратимостью. Согласно доказанной Пуанкаре теореме о возвращении¹, движение фазовых точек для механической гамильтоновской системы не обнаруживает необратимого поведения. С другой стороны, энтропия изолированной системы, не находящейся в состоянии термодинамического равновесия, должна возрастать. Это противоречие (в действительности лишь кажущееся) послужило Э. Цермело² основой для критики кинетической теории газов и привело к ошибочным

¹ *Acta math.*, 1890, 13, 67—72.

² Э. Цермело. Об одном положении динамики в связи с механической теорией теплоты. Пер. с нем. В сб. «Людвиг Больцман, Статьи и речи». М., 1970.

выводам о невозможности объяснения необратимых процессов на основе обычной механики.

В статье Пуанкаре рассмотрены два примера: система из большого числа малых планет, движущихся по круговым орбитам в одной плоскости, и одномерный газ (газ в кубическом сосуде настолько разреженный, что происходят соударения лишь со стенками) во внешнем потенциальном поле. На этих примерах исследованы причины возникновения необратимости. Показано, что с ростом времени первоначально неоднородный газ будет казаться все более однородным и видимая упорядоченность будет отсутствовать. Поэтому появляется возможность описания системы функцией распределения. В то же время будет сохраняться скрытая упорядоченность, которая может проявиться лишь на больших временах, порядка времени возвращения. Поэтому грубая энтропия, которая уже не отражает скрытой упорядоченности, будет возрастать. Тонкая (или гиббсовская) энтропия, разумеется, всегда остается постоянной.

Дальнейшее развитие теории необратимых процессов подтвердило взгляды Пуанкаре на природу необратимости. Разработанный Н. Н. Боголюбовым³ последовательный динамический метод вывода кинетических уравнений показывает, как для масштабов времени, значительно больших времени столкновения, возникает возможность сокращенного описания системы из большого числа частиц с помощью одночастичной функции, подчиняющейся кинетическому уравнению. В методе Боголюбова статистика вводится через граничные условия в бесконечно удаленном прошлом и все высшие функции распределения зависят от времени лишь через одночастичную функцию.

1 (стр. 385). Пуанкаре определяет энтропию со знаком минус по сравнению с обычным определением (см. уравнение (3) на стр. 386).

2 (стр. 385). Переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ для гамильтоновой системы из N частиц есть обобщенные координаты $q_1, q_2, \dots, q_{3N}$ и канонические сопряженные им импульсы

$p_1, p_2, \dots, p_{3N}$. Уравнения Гамильтона $\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ имеют форму (1) и удовлетворяют условию (2).

3 (стр. 388). На необходимость различать тонкую, или гиббсовскую, энтропию (соответствующую мелкоструктурной плотности распределения) и грубую энтропию (соответствующую крупноструктурной плотности распределения) было указано П. Эренфестом и Т. Афанасьевой-Эренфест^{4, 5}. Это связано с тем, что лишь грубая энтропия может возрастать. Указание на возможность построения грубой энтропии с помощью усреднения тонкой, по малой ячейке фазового пространства, еще не решает проблему необратимости. Необходимо еще показать свойство перемешивания фазовых траекторий.

4 (стр. 388). Уравнение для P , приводимое ниже (обычно называемое уравнением Лиувилля), следует из инвариантности фазового объема, т. е. из теоремы Лиувилля.

Д. Н. Зубарев

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И ОПТИКА

Пуанкаре как физик-теоретик начинал свою деятельность в пору господства в физике «механицизма». Он был одним из первых, поставивших под сомнение осуществимость построения физики на основе механики. Тут Пуанкаре прошел два этапа в развитии своих взглядов на механицизм. На первом этапе он убедительно показал

³ Н. Н. Б о г о л ю б о в. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.—Л., 1946; Избранные сочинения в трех томах, т. 2. Киев, 1970.

⁴ Р. Е h r e n f e s t, Т. Е h r e n f e s t. Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik. Enzyklopädie der Math. Wiss., Bd. IV, 1912.

⁵ Дж. У л е н б е к, Дж. Ф о р д. Лекции по статистической механике. Перев. с англ. М., 1965.

несостоятельность «наивного механицизма», апеллирующего к наглядным моделям. Он признавал, что дать полное механическое описание, например электрических явлений, сведя законы физики к основным положениям динамики, — проблема достаточно заманчивая. Но как ее надо ставить? Не является ли это делом праздным? Сама постановка такого вопроса характерна для Пуанкаре. Конечно, если бы такая проблема допускала единственное решение, то такое решение было бы истиной. Однако не на этом пути можно найти истину. Несомненно, можно придумать механизм, более или менее полно имитирующий электростатические и электродинамические явления. Но если можно придумать один такой механизм, то их может быть бесчисленное множество. Последнее утверждение составляет теорему Пуанкаре, обоснованную им во введении к его курсу «Электричество и оптика». Заслуживают внимания выводы, сделанные Пуанкаре, исходя из такой теоремы. Он подчеркивает то обстоятельство, что ни один из возможных механизмов для интерпретации электродинамических явлений не выделяется своей простотой. Поэтому нет оснований полагать, что один из них лучше поможет нам проникнуть в тайны природы, чем остальные. Следовательно, любой механизм, какой можно предложить в указанных целях, является чем-то искусственным.

Отказавшись от упрощенного механицизма, Пуанкаре сформулировал для физики своего времени значительно более утонченную механистическую программу. Праздным делом надо считать стремление наглядно передать с помощью механизмов все детали электрических явлений, но очень важно показать, что эти явления подчиняются общим законам механики. Последние же не зависят от того частного механизма, к которым их применяют, и если электрические явления им не подчиняются, то нечего надеяться на их механическое истолкование. Если же электрические явления подчиняются законам механики, то механическое истолкование заведомо возможно.

Но Пуанкаре не ограничивается последним заявлением, он принципиально углубляет постановку вопроса. И на этом пути (это второй этап в развитии его взглядов) он увидел крушение механицизма.

Как фактически убедиться в соответствии законов электростатики и электродинамики принципам динамики? Ответ Пуанкаре поучителен: рядом сравнений. Анализируя электрическое явление, надо сопоставить с ним хорошо изученное явление механики и установить их полный параллелизм. Применение при этом математического анализа покажет, что такое сравнение не является грубым приближением, а что оно может давать все более точные данные. Иными словами, Пуанкаре выдвигает идею, так сказать, математического моделирования, допускающего уточнение аппроксимации, достигаемой в процессе механического истолкования явлений из другой области физики. Но Пуанкаре не стал рабом собственной программы и смог творчески участвовать в создании теории относительности, успех которой означал невыполнимость включения электродинамики в классическую механику и пересмотр основ этой механики.

И. Б. Погребысский

ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕНИ

Статья А. Пуанкаре «Измерение времени», опубликованная в 1898 г., дает возможность лучше понять его роль как предшественника специальной теории относительности, предвосхитившего ряд существенных ее аспектов. А. Пуанкаре был, видимо, первым, кто обратил внимание на неудовлетворительность бытовавших в физике представлений об одновременности разноместных событий и равенстве двух временных интервалов как интуитивно ясных понятий, и указал на необходимость их эмпирического определения. Как известно, такой подход к данным понятиям явился исходным пунктом создания Эйнштейном теории относительности.

Позиция А. Пуанкаре характеризуется следующими моментами:

1. Определение времени (равенство двух интервалов времени, одновременность) основано не только на опыте, но и на постулате постоянства скорости света в двух противоположных направлениях.

2. Поскольку этот постулат не может быть эмпирически проверен и принимается в виде некоторого соглашения, то это приводит к конвенциональности в определении времени.

3. Несмотря на условность определений времени, предпочтение должно быть отдано таким определениям, которые делают физические законы как можно более простыми.

Необходимо отметить принципиальную правильность изложенных взглядов А. Пуанкаре по проблеме измерения времени. Они представляют большую ценность не только в ретроспективном отношении, но и для исследования оснований современной физики, прежде всего теории относительности.

Особо следует сказать о конвенционализме А. Пуанкаре. Дело в том, что само по себе признание роли конвенций в научном познании не эквивалентно конвенционализму как философской концепции. Конвенции являются неустранимым элементом научного творчества. Конвенционализм же состоит в абсолютизации конвенционального элемента в научном познании, в отрицании объективного содержания научных теорий. В ряде своих работ по общим вопросам науки А. Пуанкаре действительно стоял на позициях конвенционализма (в частности, по вопросу о статусе геометрии и физических законов), за что он был подвергнут критике В. И. Лениным в книге «Материализм и эмпириокритицизм»¹. Однако взгляды Пуанкаре на этот счет не отличались последовательностью. В данной статье влияние конвенционализма проявляется больше в терминологии, чем в существе дела.

Ю. Б. Молчанов, Ю. В. Сачков, Э. М. Чудинов

О ДИНАМИКЕ ЭЛЕКТРОНА

Статья Пуанкаре замечательна во многих отношениях. По времени своего появления (начало 1906 г.) — она несколько запаздывает по сравнению с основной статьей Эйнштейна, появившейся в сентябре 1905 г., но написана она абсолютно независимо от Эйнштейна, что видно по датам поступления в печать: 30 июня и 23 июля. Пуанкаре дает своему изложению сразу удачную математическую форму. Прежде всего, Пуанкаре, как и Эйнштейн, выдвигает основную идею в виде четкого «постулата относительности» (у Эйнштейна — «принцип относительности»). Преобразования Лоренца (также термин Пуанкаре) составляют группу в многообразии четырех измерений и Пуанкаре находит инварианты этой группы. Преобразования плотности тока, плотности электричества и напряжений электрического и магнитного полей с изумительной простотой получаются в окончательном виде (в отличие от упоминаемой на стр. 434 статьи Лоренца). В статье плодотворно использован принцип наименьшего действия в четырехмерной формулировке. Пользуясь современной терминологией, можно сказать, что все величины электромагнитного поля выступают как тензоры соответствующих рангов четырехмерного многообразия.

Пуанкаре первый вводит мнимую координату времени и толкует преобразование Лоренца как поворот в пространстве четырех измерений. Здесь он находит также знаменитую теорему о сложении скоростей.

Работы Пуанкаре практически нашли немедленное продолжение в исследованиях Минковского (Phys. Z., 1909, 10, 104), который наряду с широко известной трактовкой четырехмерного пространства-времени начал развивать также идеи Пуанкаре о гравитации. В исторической перспективе сейчас ясно, что Пуанкаре первый предпринял попытку построения Лоренц-инвариантной теории гравитации, обобщая закон тяготения Ньютона путем учета запаздывания распространения гравитации и указывая на то, что ее скорость равна скорости света. Гравитационные идеи Пуанкаре (§ 6) были развиты Лоренцом (Phys. Z., 1910, 11, 1234), позднее Уитроу и Мордухом (Nature, 1960, 188, 790); речь идет о теориях запаздывающего действия на расстоянии

¹ В. И. Ленин. Полное собрание сочинений, т. 18, стр. 7—384.

в плоском пространстве, которые анализируются и сейчас, хотя общепризнанным базисом понимания гравитации остается общая теория относительности Эйнштейна (1915), трактующая тяготение в связи с искривлением пространства-времени.

Статья Пуанкаре фактически оказалась почти незамеченной, тогда как статьи Эйнштейна и Минковского сразу привлекли к себе всеобщее внимание. Причина этого весьма любопытного обстоятельства, не имеющего аналогов в современной физике, не может, конечно, заключаться в одной только сравнительно малой известности среди физиков столь знаменитого математического журнала, как «Rendiconti del Circolo matematico di Palermo», в котором была напечатана статья Пуанкаре. Для большинства физиков был малопривычен строгий математический язык Пуанкаре и теория групп; работа Пуанкаре на первых порах могла показаться рядом до некоторой степени чисто формальных математических преобразований, тогда как статья Эйнштейна сразу указала на вытекающую из вновь открытых закономерностей необходимость пересмотреть наши основные физические представления о времени и пространстве. Стиль работы Пуанкаре — инвариантно-теоретический, тогда как Эйнштейн начал строить свою статью с рассмотрения мысленных экспериментов об измерении длин и промежутков времени.

Вместе с тем обращает на себя внимание своеобразная недооценка Пуанкаре своих результатов, рассматриваемых им как некоторое уточнение исследований Лоренца, в противоположность уверенному стилю статьи Эйнштейна.

В некоторой мере в статье Пуанкаре сказываются его конвенционалистские взгляды, с признанием, например, возможности описывать пространства геометриями разного типа.

Д. Д. Иваненко

ДИНАМИКА ЭЛЕКТРОНА

А. Пуанкаре обсуждает в статье находившуюся тогда в центре внимания физиков проблему динамики электрона. В этой статье, в отличие от двух предыдущих, посвященных тем же вопросам (см. наст. том, стр. 429 и 433), автор совершенно не пользуется математическим аппаратом. А. Пуанкаре делает большие исторические экскурсы, оценивая в связи с обсуждаемой проблемой работы Дж. Дж. Томсона, Вихерта, Кремье, Абрагама, Лоренца, Кауфмана, Ланжевена и других. В статье затрагиваются и вопросы теории гравитации.

1 (стр. 489). Дж. Дж. Томсон еще в 1881 г. (Philos. Mag., 1881, 11, 229) показал, что движущееся заряженное тело, как следует из теории Максвелла, ведет себя по отношению к внешним силам так, как будто возросла его масса. «Приращение массы» зависит от величины заряда и формы тела. О. Хевисайд вычислил энергию медленно движущегося заряженного тела (Philos. Mag., 1889, 27, 324); Дж. Дж. Томсон нашел, что при скоростях движения, близких к световым, приращение массы является функцией скорости (Recent researches, 1893, p. 21). С этими работами непосредственно связаны его опыты по определению отношения заряда электрона к массе и скорости электронов в катодных лучах (Philos. Mag., 1897, 44, 223). Использовались два метода: 1) метод отклонений в скрещенных электрическом и магнитном полях; 2) метод, где измерялась энергия частиц с помощью фарадеева цилиндра и термостолбика. Точность измерений была невысока. Для скоростей были найдены значения $(2,4—3,2) \cdot 10^9$ см/сек, а для e/m величина порядка $(1,1—1,5) \cdot 10^{11}$ кул/кг.

2 (стр. 489). Э. Вихерт экспериментально определил скорость электронов в катодных лучах и отношение e/m (Ann. Phys., 1899, 69, 739). Для определения скорости измерялось время, необходимое электрону, чтобы пройти расстояние между двумя диафрагмами. Точность экспериментов была невелика. Для e/m получилось значение $(0,87—1,84) \cdot 10^7$ э^{-1/2} см^{1/2}, а для отношения скоростей v/c — величина 0,132—0,168, где v — скорость частицы (электрона).

3 (стр. 489). В. Кремье поставил опыты по обнаружению магнитного поля конвекционных токов (по схеме Роуланда). Им был предложен новый метод: исследовалось

магнитное поле переменного электрического заряда, а не постоянного. Возникающее переменное магнитное поле вызывало в катушке, расположенной около вращающихся дисков, индукционные токи, которые обнаруживались после выпрямления чувствительным гальванометром. Как отмечал А. А. Эйхенвальд, преимущество метода Кремье было в том, что магнитная стрелка могла быть помещена вдали от вращающихся дисков и тем самым значительно уменьшались посторонние влияния на стрелку. Однако Кремье не сумел обнаружить магнитное поле движущегося заряда и отрицал поэтому возникновение магнитного поля при движении электрических зарядов (С. г. Acad. sci., 1900, 130, 1574; 1900, 131, 578). Г. Пандер повторил опыты Кремье и получил положительный результат с высокой степенью точности (Philos. Mag., 1901, 2, 179). А. Пуанкаре внимательно следил за опытами Кремье, работавшего в Сорбонне, давал советы по постановке экспериментов и опубликовал несколько работ об этих опытах (см., например: Rev. gén. sci. pures et appl., 1901, 12, 994). По предложению А. Пуанкаре, Кремье и Пандер поставили в Сорбонне совместный эксперимент, давший положительный результат (С. г. Acad. sci., 1903, 136, 548, 955).

Наиболее точные опыты по обнаружению магнитного поля движущихся заряженных тел поставлены А. А. Эйхенвальдом в 1901—1904 гг. («О магнитном действии тел, движущихся в электростатическом поле», Москва, 1904). Эйхенвальд не только обнаружил магнитное поле конвекционных токов, как и его предшественники (Роуланд, Рентген), но с высокой степенью точности измерил его величину, составлявшую, примерно, одну миллионную от величины магнитного поля Земли. Результаты опытов Эйхенвальда позволили решить важную для того времени проблему: сделать выбор между теориями полностью увлекаемого эфира (Г. Герц) и неподвижного эфира (Г. А. Лоренц). Сам Эйхенвальд считал, что результаты его опытов согласуются с теорией Лоренца. Этот вывод был сделан им до работ Эйнштейна. Позже Эйхенвальд показал, что результаты его опытов находятся в хорошем согласии и со специальной теорией относительности.

4 (стр. 490). М. Абрагам подробно разработал понятие электромагнитной массы и динамику электрона (Phys. Z., 1902, 4, 54—57; Ann. Phys., 1903, 10, 105—179). Он считал, что с помощью динамики электрона можно будет обосновать и общую динамику. Абрагам исходил из электронной теории Лоренца и понятия электромагнитного импульса, введенного А. Пуанкаре. Сопоставив свою теорию с экспериментальными результатами В. Кауфмана, Абрагам сделал вывод о чисто электромагнитной природе массы электрона. Для построения динамики электрона необходимо было сделать предположение о форме электрона. Абрагам считал, что электрон — твердый шарик с равномерным поверхностным или объемным распределением заряда. Такое предположение казалось простым с энергетической точки зрения. Оно давало, кроме того, возможность применить кинематику обычного твердого тела к электрону, построить динамику электрона по аналогии с принципами обычной динамики. Им было получено выражение для электромагнитной энергии и подробно разобран вопрос об электромагнитном количестве движения. Пользуясь понятием электромагнитного импульса и законами Ньютона, Абрагам нашел выражения для продольной и поперечной масс электрона и зависимости массы от скорости.

Выражение для массы, полученное Абрагамом, имеет вид:

$$m_{\text{пр.}} = m_0 \frac{3}{4} \frac{1}{\beta^2} \left\{ -\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) + \frac{2}{1-\beta^2} \right\},$$

$$m_{\text{поп.}} = m_0 \frac{3}{4} \frac{1}{\beta^2} \left\{ \left(\frac{1+\beta^2}{2\beta} \right) \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - 1 \right\},$$

где m_0 — масса покоя, $\beta = v/c$.

Формула Лоренца

$$m_{\text{пр.}} = m_0 (1 - \beta^2)^{-3/2},$$

$$m_{\text{поп.}} = m_0 (1 - \beta^2)^{-1/2}.$$

5 (стр. 490). Эксперименты В. Кауфмана относятся к 1900—1906 гг. В них, как отмечал Кауфман (Phys. Z., 1902, 4, 54), было обнаружено значительное возрастание массы с ростом скорости и преобладание электромагнитной массы, однако вклад электромагнитной массы в общую массу нельзя было оценить. В опытах Кауфмана электроны отклонялись совпадающими по направлению электрическим и магнитным полями.

После появления теоретической работы М. Абрагама (1902 г.) Кауфман повторил опыты на усовершенствованной установке (Ann. Phys., 1906, 19, 487). Он считал, что его результаты в пределах погрешности совпадают с теорией Абрагама, и сделал вывод об электромагнитной природе массы электрона. Кауфман считал, что хорошее совпадение его измерений с теорией Абрагама исключает вопрос о строении электрона. Опыты Кауфмана и теоретические работы Абрагама произвели в то время сильное впечатление на физиков. На собрании естествоиспытателей в Карлсбаде в 1902 году, где выступили Кауфман и Абрагам, М. Планк, отмечая значение этих работ, говорил, что ими заложена основа электромагнитной картины мира. Однако в работах Г. А. Лоренца (1904, Г. А. Лоренц. Старые и новые проблемы физики. М., «Наука», 1970. стр. 28), М. Планка (Phys. Z., 1906, 7, 753—761) и других было показано, что измерения Кауфмана не позволяют сделать выбор между теориями твердого (Абрагам) и деформируемого электрона. Позднее Гайль (1909 г.) показал, что Кауфман переоценил точность своих измерений: погрешность измерений была больше различия между этими теориями.

В более точных опытах А. Бухерера (1908—1909 гг.) электроны подвергались действию скрещенных электрического и магнитного полей. Результаты этих опытов больше свидетельствовали в пользу теории Лоренца—Эйнштейна.

Опыты Гупка и исследования Ратновского (1911 г.) также не привели к однозначному решению. В 1912 г. Леванши, Ратновский и другие тщательно проверили методом скрещенных полей формулу Лоренца—Эйнштейна для массы, а в 1914 г. Нейман показал справедливость релятивистской формулы. Триккер, который провел измерения по методике, предложенной П. Л. Капицей, показал, что при скоростях электронов до 0,8 с изменение массы со скоростью соответствует формуле Лоренца—Эйнштейна с точностью 1—2%, тогда как при тех же условиях разница между формулой Лоренца—Эйнштейна и Абрагама составляет 5%.

Создание ускорителей, рассчитанных на основании законов релятивистской динамики, лишает актуальности этот спор. Опыты, выполненные Рейнольдсом после 1938 г., так же как и проведенные позднее эксперименты (см., например: V. M e y e r, W. R e i c h a r t, H. H. S t u b, H. W i n k l e r, F. Z a m b o n i, W. Z u s c h. Experimentelle Untersuchung des Massen—Impulsrelation des Elektronen.—Helv. phys. acta, 1963. 36, N 7, 981—982), вновь подтвердили справедливость формулы Лоренца—Эйнштейна.

6 (стр. 494). Определенные отклонения в положении звезд с годичным периподом наблюдали уже Пикар (1671 г.), Гук (1674 г.), Флэмстид (1689—1698 гг.), но лишь в 1728 г. после длительных наблюдений абerrация света была открыта и объяснена английским астрономом Бредли. Данное с точки зрения корпускулярной теории объяснение опиралось на два основных факта: Земля движется вокруг Солнца и скорость света конечна. Открытие абerrации света было важнейшим вкладом XVIII в. в оптику, однако в рамках корпускулярной теории света абerrация осталась изолированным явлением и не вызвала каких-либо принципиально новых проблем. При этом принималось как нечто само собой разумеющееся, что скорость света не зависит от скорости источника.

Возрожденная в начале XIX в. волновая теория света сразу же выдвинула кардинальный вопрос об отношении между эфиром и движущимися в нем телами. Как Юнг, так и Френель для объяснения абerrации вынуждены были постулировать неувлекаемость эфира движущимися телами. Но объясняя абerrацию, эта гипотеза вступала в противоречие с результатами тех опытов, которые показали, что движение Земли не оказывает влияния на происходящие на ней оптические явления: Араго (1810 г.), Бабинне (1838 г.), Хека (1868 г.), Маскара (1872 г.). Таким образом, в рамках волновой теории объяснение абerrации стало частью общей проблемы оптических явлений

в движущихся телах, ядром которой был вопрос об увлечении эфира. Еще в 1818 г. Френель показал, что можно построить единую непротиворечивую теорию всех этих явлений, если принять, что содержащийся в телах эфир частично увлекается при их движении, причем коэффициент увлечения равен $k=1-1/n^2$, где n — показатель преломления тела.

7 (стр. 496). Упомянутый в статье Пуанкаре опыт с наблюдением аберрации при помощи заполненного водой телескопа был предложен Бошковичем еще в 1766 г. Френель показал теоретически, что если принять предложенное им выражение для коэффициента увлечения, то результат подобного опыта должен быть отрицательным, т. е. вода не влияет на величину угла аберрации. Но лишь в 1871 г. Эйри удалось убедительно подтвердить этот вывод экспериментально.

И все же теория Френеля встретила с рядом трудностей. В частности, оставался неясным вопрос о механизме частичного увлечения, трудно было понять, как для разных длин световых волн вследствие существования дисперсии увлекаются разные доли эфира.

8 (стр. 496). В 1845—1846 гг. Стокс попытался построить теорию аберрации и других оптических явлений в предположении, что эфир полностью увлекается движущимися телами, но его теория, как оказалось, была построена на противоречивых предпосылках. Электродинамика движущихся тел Герца (1890), воспринявшего основную идею Стокса, была с самого начала обречена на неудачу, поскольку не в состоянии была объяснить не только аберрацию, но и результаты опытов Физо (1851), подтвердившего величину френелевского коэффициента увлечения в опытах с движущейся водой. Большое значение опытов Физо для проблемы эфира в целом заставило Майкельсона и Морли (1886) и Зеемана (1914) повторить их с большей точностью. Уже в 1964 г. Мачек, Шнайдер и Саламон вернулись к этому опыту с использованием лазеров. Результаты Физо неизменно подтверждались.

9 (стр. 496). Трудности теории Френеля отпали после создания Лоренцом электронной теории, согласно которой эфир всегда неподвижен, а увлекаются только заряды. Лоренцу удалось с единой точки зрения объяснить все оптические явления в движущихся телах, пока речь шла об эффектах первого порядка относительно v/c .

10 (стр. 501). Речь идет о давлении света. Экспериментально было впервые обнаружено П. Н. Лебедевым. Результаты экспериментов Лебедева были сообщены на конгрессе в Париже в 1900 г. и опубликованы в 1901 г.

11 (стр. 503). См. прим. [4].

12 (стр. 503). См. прим. [5].

13 (стр. 510). Смещение перигелия Меркурия подробно исследовалось Леверрье. Исследования приводили к необъясненному ньютоновской теорией тяготения остатку в $38''$ за столетие. Многочисленные попытки дать объяснение с помощью различных гипотез (неизвестная планета внутри орбиты Меркурия, неизвестный спутник Меркурия, несферичность формы Солнца и др.) не привели к успеху. В теории Эйнштейна смещение перигелия вытекает из строгого решения уравнений тяготения. Вычисление Эйнштейна дало для Меркурия поворот перигелия на $43''$, тогда как астрономы из наблюдений указывали на величину $45'' \pm 5''$ в качестве необъяснимой разницы между наблюдением и ньютоновской теорией.

И. Я. Итенберг, А. М. Френк

О ТЕОРИИ КВАНТОВ. ГИПОТЕЗА КВАНТОВ

Существенную роль, которую сыграли немногочисленные работы Пуанкаре по квантовой теории в развитии последней, можно уяснить только на фоне общего положения в физике в первом десятилетии XX века.

Сформулированная Планком в 1900 г. гипотеза квантов энергии почти не вызвала откликов: физики пользовались полученной им формулой, фактически не обсуждая основы, на которой она была получена. Выдвинутая Эйнштейном в 1905 г. идея световых квантов воспринималась с трудом. Создание Эйнштейном первой квантовой теории

теплоемкости в какой-то мере расширило область приложения новых идей, но и оно не поколебало надежду на возможность какого-то решения всех накопившихся трудностей без выхода за пределы привычных понятий и законов классической физики. Первую брешь пробил Лоренц в 1908 г., показав, что никакими путями нельзя получить формулу Планка, рассматривая системы, подчиняющиеся уравнениям Гамильтона. Сложность создавшейся ситуации выявилась очень четко на собрании немецких естествоиспытателей и врачей (1909 г.), где в дискуссии по докладу Эйнштейна состоялось фактически первое публичное обсуждение квантовых идей. К 1911 г. положение настолько усложнилось, что крупнейшие физики — Нернст, Планк, Лоренц, Эйнштейн — сочли необходимым созвать специальный конгресс для обсуждения проблем теории излучения и квантов.

Конгресс, вошедший в историю как I Сольвеевский конгресс, состоялся в Брюсселе с 30 октября по 3 ноября 1911 г. Именно здесь Пуанкаре впервые встретился с кругом идей, охватываемых квантовой теорией; в опубликованных в период 1900—1911 гг. работах Пуанкаре нет и намека на кванты. Этот факт тоже о многом говорит. Пуанкаре на конгрессе многократно выступал в прениях, стремясь выяснить, какие из обсуждавшихся вопросов были наиболее существенными. Так, он выступил против Джинса, пытавшего объяснить на классической основе расхождение между выведенной Рэлеем и им формулой излучения и экспериментом, указав при этом на недопустимость введения в старую теорию новых произвольных констант для объяснения каждого вновь обнаруженного факта; интересовался, обнаруживает ли опыт какие-нибудь малейшие отклонения от формулы Планка; допытывался несколько раз у Планка, насколько произволен использованный им способ деления фазового пространства на ячейки при вычислении числа возможных состояний осциллятора; указывал на противоречивость двух этапов вывода формулы Планка. Поддержав вывод Лоренца о том, что никакими ухищрениями нельзя получить правильную формулу излучения, оставаясь в рамках классической механики, Пуанкаре в заключительной дискуссии поставил вопрос о том, сохраняется ли вообще возможность выражать законы физики дифференциальными уравнениями? Фактически в этом вопросе заключалась основная проблема: по какому пути должна идти ставшая уже явно необходимой реформа основ классической физики? Удастся ли сохранить универсальную непрерывность физических процессов, или введение требуемой квантовой гипотезой дискретности абсолютно неизбежно?

Именно решение этого вопроса и продолжало занимать Пуанкаре после конгресса. Уже через месяц, в декабре 1911 г. он представил Парижской академии работу, опубликованную в «Comptes rendus»; в начале 1912 г. вышла в свет вторая работа, значительно более обширная, а затем и третья, на этот раз в популярном журнале. Он умер в том же году, не завершив цикл своих работ по квантам. Но и полученный результат оказался существенным; он доказал, что гипотеза квантов является не только достаточной, но и необходимой предпосылкой для вывода формулы Планка, оправданной всей совокупностью имевшихся экспериментальных фактов. Более того, если предположить, что в будущем будут обнаружены отклонения от этой формулы, то и тогда избежать бесконечной суммарной энергии излучения удастся лишь путем введения дискретности. К аналогичному результату пришел в 1911 г. и Эренфест в своей работе «Какие черты гипотезы световых квантов играют существенную роль в теории теплового излучения?». Значение этих работ заключалось не столько в том, что они внесли положительный вклад непосредственно в развитие квантовой теории, сколько в том, что они внесли перелом в отношении физиков к квантовой трактовке различных физических явлений. После них стало ясно, что вероятность построения новой теории без привлечения квантов совершенно ничтожна: основа для распространения квантовой гипотезы на теорию строения атома была подготовлена. Для этого понадобился всего один год — теория Бора появилась в первой половине 1913 г.

А. М. Френк

БИБЛИОГРАФИЯ *

ТРУДЫ А. ПУАНКАРЕ

I. МАТЕМАТИКА

1. Дифференциальные уравнения

1. Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles. — J. l'École Polytechnique, 1878, 45^e Cahier, 13—26; Oeuvres, t. I, p. XXXVI—XLVIII.
2. Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles. — Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris, 1^{er} août 1879. Paris, Gauthier-Villars, 1879, 93 p. Oeuvres, t. I. p. XLIX—CXXXI.
3. Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante. (Мемуар, написанный для конкурса 1880 г. «Гран-при по математике». Опубликовано только часть II (см. [68]).)
4. Sur les courbes définies par une équation différentielle. — C. r. Acad. sci., 1880, 90, 673—675; Oeuvres, t. I, p. 1—2.
5. Sur les fonctions fuchsienues. — C. r. Acad. sci., 1881, 92, 333—335; Oeuvres, t. II, p. 1—4.
6. Sur les fonctions fuchsienues. — C. r. Acad. sci., 1881, 92, 395—398; Oeuvres, t. II, p. 5—7.
7. Sur les équations différentielles linéaires à intégrales algébriques. — C. r. Acad. sci., 1881, 92, 698—701; Oeuvres, t. III, p. 95—97.
8. Sur une nouvelle application et quelques propriétés importantes des fonctions fuchsienues. — C. r. Acad. sci., 1881, 92, 859—861; Oeuvres, t. II, p. 8—10.
9. Sur l'intégration des équations linéaires par le moyen des fonctions abéliennes. — C. r. Acad. sci., 1881,

* В библиографию трудов А. Пуанкаре включены статьи и прижизненные издания книг Пуанкаре. Приведены переводы работ Пуанкаре только на русский язык. Звездочками отмечены работы, включенные в настоящее издание. При отнесении работ Пуанкаре к тому или иному разделу учитывалась классификация, проведенная А. Пуанкаре (см.: Анализ работ Анри Пуанкаре, сделанный им самим. Наст. изд., т. 3, стр. 579), Е. Лебоном (см.: Е. L e b o n. Henri Poincaré. 2 éd. Paris, 1912, 111 p.) и издателями французского собрания сочинений Пуанкаре. При составлении библиографии были использованы следующие источники:

Е. L e b o n. Henri Poincaré. 2 éd., Paris, 1912, 111 p.

Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré, faite par lui-même. — Acta mathematica, 1921, 38, 3—135.

Oeuvres de Henri Poincaré, t. I—XI. Paris, Gauthier-Villars, 1916—1956.

J. J. M o o i j. La philosophie des mathématiques de Henri Poincaré. Paris, Gauthier-Villars, 1966, p. 159—171.

Catalogue of scientific papers. Completed by the Royal Society of London, v. XI. 1896, p. 39—41; v. XVII. 1921, p. 942—944.

J. C. Poggendorffs Biographisch-Literarisches Handwörterbuch der exacten Naturwissenschaften, Bd. IV. 1904, S. 1178—1180; Bd. V. 1925, S. 990.

Указатель работ об А. Пуанкаре не претендует на полноту.

Библиография составлена Е. И. Погребысской.

- 92, 913—915; Oeuvres, t. III, p. 98—100.
10. Sur les fonctions fuchsienues. — C. r. Acad. sci., 1881, 92, 957; Oeuvres, t. II, p. 11.
11. Sur les fonctions fuchsienues. — C. r. Acad. sci., 1881, 92, 1198—2000; Oeuvres, t. II, p. 12—15.
12. Sur les fonctions fuchsienues. — C. r. Acad. sci., 1881, 92, 1274—1276; Oeuvres, t. II, p. 16—18.
13. Sur les fonctions fuchsienues. — C. r. Acad. sci., 1881, 92, 1484—1487; Oeuvres, t. II, p. 19—22.
14. Sur les groupes kleinéens. — C. r. Acad. sci., 1881, 93, 44—46; Oeuvres, t. II, p. 23—25.
15. Sur une fonction analogue aux fonctions modulaires. — C. r. Acad. sci., 1881, 93, 138—140; Oeuvres, t. II, p. 26—28.
16. Sur les fonctions fuchsienues. — C. r. Acad. sci., 1881, 93, 301—303; Oeuvres, t. II, p. 29—31.
17. Sur les fonctions fuchsienues. — C. r. Acad. sci., 1881, 93, 581—582; Oeuvres, t. II, p. 32—34.
18. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (I partie). — J. math. pures et appl., 3^e sér., 1881, 7, 375—422; Oeuvres, t. I, p. 3—44.
19. Sur les courbes définies par les équations différentielles. — C. r. Acad. sci., 1881, 93, 951—952; Oeuvres, t. I, p. 85—86.
20. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (II partie [18]). — J. math. pures et appl., 3^e sér., 1882, 8, 251—296; Oeuvres, t. I, p. 44—84.
21. Sur les points singuliers des équations différentielles. — C. r. Acad. sci., 1882, 94, 416—418; Oeuvres, t. XI, p. 3—5.
22. Sur l'intégration des équations différentielles par les séries. — C. r. Acad. sci., 1882, 94, 577—578; Oeuvres, t. I, p. 162—163.
23. Sur les fonctions fuchsienues. — C. r. Acad. sci., 1882, 94, 163—166; Oeuvres, t. II, p. 35—37.
24. Sur les groupes discontinus. — C. r. Acad. sci., 1882, 94, 840—843; Oeuvres, t. II, p. 38—40.
25. Sur les fonctions fuchsienues. — C. r. Acad. sci., 1882, 94, 1038—1040; Oeuvres, t. II, p. 41—43.
26. Sur les fonctions fuchsienues. — C. r. Acad. sci., 1882, 94, 1166—1167; Oeuvres, t. II, p. 44—46.
27. Sur une classe d'invariants relatifs aux équations linéaires. — C. r. Acad. sci., 1882, 94, 1402—1405; Oeuvres, t. II, p. 47—49.
28. Sur les fonctions fuchsienues. — C. r. Acad. sci., 1882, 95, 626—628; Oeuvres, t. II, p. 50—52.
29. Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires. — Math. Ann., 1882, 19, 553—564; Oeuvres, t. II, p. 92—104.
30. Sur les fonctions uniformes que se reproduisent par des substitutions linéaires (extrait d'une lettre adressée à F. Klein). — Math. Ann., 1882, 20, 52—53; Oeuvres, t. II, p. 106—107.
31. Sur la théorie des fonctions fuchsienues. — Mémoires Acad. nationale des Sciences, Arts et Belles—Lettres de Caen, 1882, 3—29; Oeuvres, t. II, p. 75—91.
- 32*. Théorie des groupes fuchsienues. — Acta math., 1882, 1, 1—62; Oeuvres, t. II, p. 108—168.
- 33*. Sur les fonctions fuchsienues. — Acta math., 1882, 1, 193—294; Oeuvres, t. II, p. 169—257.
34. Mémoire sur les groupes kleinéens. — Acta math., 1883, 3, 49—92; Oeuvres, t. II, p. 258—299.
35. Sur les séries de polynômes. — C. r. Acad. sci., 1883, 96, 637—639; Oeuvres, t. I, p. 223—225.
36. Sur les groupes des équations linéaires. — C. r. Acad. sci., 1883, 96, 691—694; Oeuvres, t. II, p. 53—55.
37. Sur les groupes des équations linéaires. — C. r. Acad. sci., 1883, 96, 1302—1304; Oeuvres, t. II, p. 56—58.
38. Sur les fonctions fuchsienues. — C. r. Acad. sci., 1883, 96, 1485—1487; Oeuvres, t. II, p. 59—61.
39. Sur l'intégration algébrique des équations linéaires. — C. r. Acad. sci., 1883, 97, 984—985; Oeuvres, t. III, p. 101—102.
40. Sur l'intégration algébrique des équations linéaires. — C. r. Acad. sci., 1883, 97, 1189—1191; Oeuvres, t. III, p. 103—105.
41. Sur les courbes définies par les équations différentielles. — C. r. Acad.

- sci., 1884, 98, 287—289; Oeuvres, t. I, p. 87—89.
42. Sur les groupes hyperfuchsienens. — C. r. Acad. sci., 1884, 98, 503—504; Oeuvres, t. II, p. 62—63.
- 43*. Sur les groupes des équations linéaires. — Acta math., 1884, 4, 201—311; Oeuvres, t. II, p. 300—401.
44. Mémoire sur les fonctions zétafuchsienens. — Acta math., 1884, 5, 209—278; Oeuvres, t. II, p. 402—462.
45. Sur un théorème de M. Fuchs. — C. r. Acad. sci., 1884, 99, 75—77; Oeuvres, t. III, p. 1—3.
46. Sur un théorème de M. Fuchs. — Acta math., 1885, 7, 1, 1—32; Oeuvres, t. III, p. 4—31.
47. Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies. — Amer. J. Math., 1885, 7, N 3, 1—56; Oeuvres, t. I, p. 226—289.
48. Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. — C. r. Acad. sci., 1885, 101, 939—941; Oeuvres, t. IV, p. 611—613.
49. Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. — C. r. Acad. sci., 1885, 101, 990—991; Oeuvres, t. IV, p. 614—615.
50. Sur les courbes définies par les équations différentielles (III partie [18]). — J. math. pures et appl., 4^e sér., 1885, 167—244; Oeuvres, t. I, p. 90—161.
51. Sur les courbes définies par les équations différentielles (IV partie [18]). — J. math. pures et appl., 4^e sér., 1886, 2, 151—217; Oeuvres, t. I, 167—222.
52. Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. — Acta math., 1886, 8, 295—344; Oeuvres, t. I, p. 290—332.
53. Les fonctions fuchsienens et l'arithmétique. — J. math. pures et appl., 4^e sér., 1887, 3, 405—464; Oeuvres, t. II, p. 463—511.
54. Remarques sur les intégrales irrégulières des équations linéaires (Réponse à M. Thomé). — Acta math., 1887, 10, 310—312; Oeuvres, t. I, p. 333—335.
55. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles — C. r. Acad. sci., 1891, 112, 761—764; Oeuvres, t. III, p. 32—34.
56. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré. — Rendiconti Circolo mat. Palermo, 1891, 5, 161—191; Oeuvres, t. III, p. 35—58.
57. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré. — Rendiconti Circolo mat. Palermo, 1897, 11, 193—239; Oeuvres, t. III, p. 59—94.
58. Les fonctions fuchsienens et l'équation $\Delta u = e^u$. — C. r. Acad. sci., 1898, 126, 627—630; Oeuvres, t. II, p. 67—70.
- 59*. Les fonctions fuchsienens et l'équation $\Delta u = e^u$. — J. math. pures et appl., 5^e sér., 1898, 4, 137—230; Oeuvres, t. II, p. 512—591.
60. Sur les groupes continus. — C. r. Acad. sci., 1899, 128, 1065—1069; Oeuvres, t. 3, p. 169—172.
61. Sur les groupes continus. — Cambridge Philos. Trans., 1899, 18, 220—225; Oeuvres, t. III, p. 173—212.
62. Quelques remarques sur les groupes continus. — Rendiconti Circolo mat. Palermo, 1901, 15, 321—368; Oeuvres, t. III, p. 213—260.
63. Sur l'intégration algébrique des équations linéaires et les périodes des intégrales abéliennes. — J. math. pures et appl., 5^e sér., 1903, 9, 139—212; Oeuvres, t. III, p. 106—166.
64. Nouvelles remarques sur les groupes continus. — Rendiconti Circolo mat. Palermo, 1908, 25, 81—130. Oeuvres, t. III, p. 261—321.
65. Fonctions modulaires et fonctions fuchsienens. — Ann. Fac. sci. Toulouse, 3^e sér., 1912, 3, 125—149; Oeuvres, t. II, p. 592—618.
66. Lettres à L. Fuchs (1880, 1881). — Acta math., 1921, 38, 175—184; Oeuvres, t. XI, p. 13—25.
67. Correspondance d'Henri Poincaré et de Felix Klein (1881, 1882). — Acta math., 1923, 39, 94—132; Oeuvres, t. XI, p. 26—65.
68. Sur les fonctions fuchsienens. (Extrait d'un Mémoire inédit de Henri Poincaré). — Acta math., 1923, 39, 59—93; Oeuvres, t. I, p. 336—373.
- 2. Теория функций**
69. Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik

- und mathematischen Physik (Göttingen, 22—28.IV 1909). Leipzig u. Berlin, 1910, 60 S. Включает [109], [110], [255], [340], [439], [440].
70. Sur les fonctions abéliennes. — C. r. Acad. sci., 1881, 92, 958—959; Oeuvres, t. IV, p. 299—301.
 71. Sur une propriété des fonctions uniformes. — C. r. Acad. sci., 1881, 92, 1335—1336; Oeuvres, t. IV, p. 9—10.
 72. Sur les transcendentes entières. — C. r. Acad. sci., 1882, 95, 23—26; Oeuvres, t. IV, p. 14—16.
 73. Sur un théorème de la théorie générale des fonctions. — Bull. Soc. math. France, 1883, 11, 112—125; Oeuvres, t. IV, p. 57—69.
 74. Sur les fonctions. — Bull. Soc. math. France, 1883, 11, 129—134; Oeuvres, t. IV, p. 302—306.
 75. Sur les fonctions entières. — Bull. Soc. math. France, 1883, 11, 136—144; Oeuvres, t. IV, p. 17—24.
 76. Sur les fonctions de deux variables. — C. r. Acad. sci., 1883, 96, 238—240; Oeuvres, t. IV, p. 144—146.
 77. Sur les fonctions de deux variables. — Acta math., 1883, 2, 97—113; Oeuvres, t. IV, p. 147—161.
 78. Sur les fonctions à espaces lacunaires. — C. r. Acad. sci., 1883, 96, 1134—1136; Oeuvres, t. IV, p. 25—27.
 79. Sur les fonctions à espaces lacunaires. — Acta Societatis scientiarum Fennicæ, 1883, 12, 343—350; Oeuvres, t. IV, p. 28—35.
 80. Sur un théorème de Riemann relatif aux fonctions de n variables indépendantes admettant $2n$ systèmes de périodes (en collaboration avec E. Picard). — C. r. Acad. sci., 1883, 97, 1284—1287; Oeuvres, t. IV, p. 307—310.
 81. Sur les substitutions linéaires. — C. r. Acad. sci., 1884, 98, 349—352; Oeuvres, t. IV, p. 531—533.
 82. Sur la réduction des intégrales abéliennes. — Bull. Soc. math. France, 1884, 12, 124—143; Oeuvres, t. III, p. 333—351.
 83. Sur la réduction des intégrales abéliennes. — C. r. Acad. sci., 1884, 99, 853—855; Oeuvres, t. III, p. 352—354.
 84. Sur les intégrales de différentielles totales. — C. r. Acad. sci., 1884, 99, 1145—1147; Oeuvres, t. III, p. 355—356.
 85. Sur une généralisation du théorème d'Abel. — C. r. Acad. sci., 1885, 100, 40—42; Oeuvres, t. III, p. 357—359.
 86. Sur les fonctions abéliennes. — C. r. Acad. sci., 1885, 100, 785—787; Oeuvres, t. IV, p. 311—313.
 87. Sur les fonctions abéliennes. — Amer. J. Math., 1886, 8, 289—342; Oeuvres, t. IV, p. 318—378.
 88. Sur la transformation des fonctions fuchsienues et la réduction des intégrales abéliennes. — C. r. Acad. sci., 1886, 102, 41—44; Oeuvres, t. IV, p. 314—317.
 89. Sur les résidus des intégrales doubles. — C. r. Acad. sci., 1886, 102, 202—204; Oeuvres, t. III, p. 437—439.
 90. Sur la réduction des intégrales abéliennes. — C. r. Acad. sci., 1886, 102, 915—916; Oeuvres, t. III, p. 360—361.
 91. Sur une classe étendue de transcendentes uniformes. — C. r. Acad. sci., 1886, 103, 862—864; Oeuvres, t. IV, p. 534—536.
 92. Sur les résidus des intégrales doubles. — Acta math., 1887, 9, 321—380; Oeuvres, t. III, p. 440—489.
 93. Sur une propriété des fonctions analytiques. — Rendiconti Circolo mat. Palermo, 1888, 2, 197—200; Oeuvres, t. IV, p. 11—13.
 94. Sur une classe nouvelle de transcendentes uniformes. — J. math. pures et appl., 4^e sér., 1890, 6, 313—365; Oeuvres, t. IV, p. 537—582.
 95. Sur les fonctions à espaces lacunaires. — Amer. J. Math., 1892, 14, 201—221; Oeuvres, t. IV, p. 36—56.
 96. Sur une propriété d'une fonction algébrique d'un arc. (Réponse à une question proposée par M. H. Dellac). — Intermédiaire Mathématiciens, 1894, 1, 141—144.
 97. Sur les fonctions abéliennes. — C. r. Acad. sci., 1895, 120, 239—243; Oeuvres, t. IV, p. 379—383.
 98. Remarques diverses sur les fonctions abéliennes. — J. math., pures et appl., 5^e sér., 1895, 1, 219—314; Oeuvres, t. IV, p. 384—468.

99. Sur les fonctions abéliennes. — C. r. Acad. sci., 1897, 124, 1407—1411; Oeuvres t. IV, p. 469—472.
 100. Sur les périodes des intégrales doubles. — C. r. Acad. sci., 1897, 125, 995—997; Oeuvres, t. III, p. 490—492.
 101. Sur les propriétés du potentiel et sur les fonctions abéliennes. — Acta math., 1898, 22, 89—178; Oeuvres, t. IV, p. 162—243.
 102. Sur les fonctions abéliennes. — Acta math., 1902, 26, 43—98; Oeuvres, t. IV, p. 473—526.
 103. Sur les périodes des intégrales doubles. — J. math. pures et appl., 6^e sér., 1906, 2, 135—189; Oeuvres, t. III, p. 493—539.
 104. Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme. — Rendiconti Circolo mat. Palermo, 1907, 23, 185—220; Oeuvres, t. IV, p. 244—289.
 105. Sur l'uniformisation des fonctions analytiques. — Acta math., 1908, 31, 1—63; Oeuvres, t. IV, p. 70—139.
 106. Remarques sur l'équation de Fredholm. — C. r. Acad. sci., 1908, 147, 1367—1371; Oeuvres, t. III, p. 540—544.
 107. Sur la réduction des intégrales abéliennes et les fonctions fuchsienues. — Rendiconti Circolo mat. Palermo, 1909, 27, 281—336; Oeuvres, t. III, p. 362—428.
 108. Sur quelques applications de la méthode de M. Fredholm. — C. r. Acad. sci., 1909, 148, 125—126; Oeuvres, t. III, p. 545—546.
 109. Ueber die Fredholmschen Gleichungen. — В кн.: Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik von H. Poincaré. Leipzig u. Berlin, 1910, S. 1—10; Oeuvres, t. III, p. 547—554 (на франц. яз.).
 110. Ueber die Reduction des Abelschen Integrale und die Theorie der Fuchsschen Funktionen. — В кн.: Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik von H. Poincaré. Leipzig u. Berlin, 1910, S. 33—41; Oeuvres, t. III, p. 429—436 (на франц. яз.).
 111. Remarques diverses sur l'équation de Fredholm. — Compt. rend. Sessions Assoc. franç. avancement sci., 38^e Session, Lille 1909, p. 1—28; Acta math., 1910, 33, 57—86; Oeuvres, t. III, p. 555—582.
 112. Lettres à M. Mittag-Leffler (1 juin 1881, 29 juin 1881, 26 juillet 1881). — Acta math., 1921, 38, 147—160.
- ### 3. Алгебра и арифметика
113. Sur quelques propriétés des formes quadratiques. — C. r. Acad. sci., 1879, 89, 344—346; Oeuvres, t. V, p. 189—191.
 114. Sur les formes quadratiques. — C. r. Acad. sci., 1879, 89, 897—899; Oeuvres, t. V, p. 192—194.
 115. Sur les formes cubiques ternaires. — C. r. Acad. sci., 1880, 90, 1336—1339; Oeuvres, t. V, p. 25—27, 291—292.
 116. Sur la réduction simultanée d'une forme quadratique et d'une forme linéaire. — C. r. Acad. sci., 1880, 91, 844—846; Oeuvres, t. V, p. 337—339.
 117. Sur un mode nouveau de représentation géométrique des formes quadratiques définies ou indéfinies. — J. École Polytechn., 1880, Cahier 47, 177—245; Oeuvres, t. V, p. 117—180.
 118. Sur la représentation des nombres par les formes. — C. r. Acad. sci., 1881, 92, 777—779; Oeuvres, t. V, p. 397—399.
 119. Sur les invariants arithmétiques. — Assoc. franç. avancement sci., 10^e Session. Alger, 1881, p. 109—117; Oeuvres, t. V, p. 195—202.
 120. Sur les applications de la géométrie non-euclidienne à la théorie des formes quadratiques. — Assoc. franç. avancement sci., 10^e Session. Alger, 1881, p. 132—138; Oeuvres, t. V, p. 267—274.
 - 121*. Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires. I partie. — J. École Polytechn., 1881, Cahier 50, 199—253; Oeuvres, t. V, p. 28—72.
 - 122*. Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires. II partie. — J. École Polytechn., 1882, Cahier 51, 45—91; Oeuvres, t. V, p. 293—334.
 123. Sur une extension de la notion arithmétique de genre. — C. r. Acad.

- sci., 1882, 94, 67—71; Oeuvres, t. V, p. 435—437.
124. Sur une extension de la notion arithmétique de genre. — C. r. Acad. sci., 1882, 94, 124—127; Oeuvres, t. V, p. 438—440.
125. Sur la reproduction des formes. — C. r. Acad. sci., 1883, 97, 949—951; Oeuvres, t. V, p. 73—75.
126. Sur les équations algébriques. — C. r. Acad. sci., 1883, 97, 1418—1419; Oeuvres, t. V, p. 81—82.
127. Sur les nombres complexes. — C. r. Acad. sci., 1884, 99, 740—742; Oeuvres, t. V, p. 77—79.
128. Remarques sur l'emploi d'une méthode proposée par M. P. Appell intitulée Méthode élémentaire pour obtenir le développement en série trigonométrique des fonctions elliptiques. — Bull. Soc. math. France, 1884, 13, 19—27; Oeuvres, t. V, p. 85—94.
129. Sur une généralisation des fractions continues. — C. r. Acad. sci., 1884, 99, 1014—1016; Oeuvres, t. V, p. 185—187.
130. Sur la représentation des nombres par les formes. — Bull. Soc. math. France, 1885, 13, 162—194; Oeuvres, t. V, p. 400—432.
131. Sur les fonctions fuchsienues et les formes quadratiques ternaires indéfinies. — C. r. Acad. sci., 1886, 102, 735—737; Oeuvres, t. II, p. 64—66; t. V, p. 275—277.
132. Sur les déterminants d'ordre infini. — Bull. Soc. math. France, 1886, 14, 77—90; Oeuvres, t. V, p. 95—107.
133. Réduction d'une forme quadratique et d'une forme linéaire. — J. École Polytechn., 1886, Cahier 56, 79—142; Oeuvres, t. V, p. 340—393.
134. Sur la distribution des nombres premiers. — C. r. Acad. sci., 1891, 113, 819; Oeuvres, t. V, p. 441.
135. Extension aux nombres premiers complexes des théorèmes de M. Tchebicheff. — J. math. pures et appl., 4^e sér., 1891, 8, 25—68; Oeuvres, t. V, p. 442—479.
136. Sur le théorème de Goldbach relatif aux nombres premiers. (Question proposée en commun avec E. Catalan). — Intermédiaire Mathématiciens, 1894, 1, 91.
137. Sur le déterminant de Hill. — Bull. astron., 1900, 17, 134—143; Oeuvres, t. V, p. 108—116; t. VIII, p. 383—391.
- 138*. Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques. — J. math. pures et appl., 5^e sér., 1901, 7, 161—233; Oeuvres, t. V, p. 483—548.
139. Sur les invariants arithmétiques. — J. reine und angew. Math., 1905, 129 : 2, 89—150; Oeuvres, t. V, p. 203—265.
140. Sur les invariants arithmétiques. Доклад в Лондонском ун-те 10 мая 1912 г.

4. Геометрия

141. Démonstration nouvelle des propriétés de l'indicatrice d'une surface. — Nouvelles Annales Math., 2^e sér., oct. 1874, 13, 449—456. Первая печатная работа А. Пуанкаре.
142. Sur les transformations des surfaces en elles-mêmes. — C. r. Acad. sci., 1886, 103, 732—734; Oeuvres, t. VI, p. 1—5.
143. Sur les transformations birationnelles des courbes algébriques. — C. r. Acad. sci., 1893, 117, 18—23; Oeuvres, t. VI, p. 6—11.
144. Sur le faisceau de cubiques passant par huit points d'un plan. (Question proposée). — Intermédiaire Mathématiciens, 1894, 1, 2.
145. Sur le réseau de quadriques passant par sept points donnés dans l'espace. (Question proposée). — Intermédiaire Mathématiciens, 1894, 1, 3.
146. Sur les courbes gauches particulières. (Question proposée en commun avec M. Leon Autonne). — Intermédiaire Mathématiciens, 1894, 1, 90.
147. Sur certaines familles de courbes algébriques. (Question proposée). — Intermédiaire Mathématiciens, 1894, 1, 145.
148. Sur certaines familles des courbes algébriques. (Question proposée). — Intermédiaire Mathématiciens, 1900, 7, 114—115.
149. Sur les surfaces de translation et les fonctions abéliennes. — Bull. Soc. math. France, 1901, 29, 61—86; Oeuvres, t. VI, p. 13—36.
150. Sur la généralisation d'un théorème élémentaire de géométrie. — C. r.

- Acad. sci., 1905, 140, 113—117; Oeuvres, t. XI, p. 8—12.
- 151*. Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes. — Trans. Amer. Math. Soc., 1905, 6, 237—274; Oeuvres, t. VI, p. 38—84.
152. Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques. — C. r. Acad. sci., 1909, 149, 1026—1027; Oeuvres, t. VI, p. 86—87.
- 153*. Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques. — Ann. scient. École Normale supér., 3^e sér., 1910, 27, 55—108; Oeuvres, t. VI, 88—139.
- 154*. Sur les courbes tracées sur une surface algébrique. — Sitzungsberichte der Berlin. math. Ges., 1911, 10, 28—55; дополнение к Arch. Math., 1911, 18; Oeuvres, t. VI, p. 140—178.

5. Топология

155. Sur l'Analysis situs. — C. r. Acad. sci., 1892, 115, 633—636; Oeuvres, t. VI, p. 189—192.
156. Sur la généralisation d'un théorème d'Euler relatif aux polyèdres. — C. r. Acad. sci., 1893, 117, 144—145; Oeuvres, t. XI, p. 6—7.
- 157*. Analysis situs. — J. École Polytechniques, 2^e sér., 1895, Cahier 1, 1—121; Oeuvres, t. VI, p. 193—288.
158. Sur les nombres de Betti. — C. r.

- Acad. sci., 1899, 128, 629—630; Oeuvres, t. VI, p. 289.
- 159*. Complément à «l'Analysis situs». — Rendiconti Circolo mat. Palermo, 1899, 13, 285—343; Oeuvres, t. VI, p. 290—337.
- 160*. Second complément à «l'Analysis situs». — Proc. London, Math. Soc. 1900, 32, 277—308; Oeuvres, t. VI, p. 338—370.
161. Sur «l'Analysis situs». — C. r. Acad. sci., 1901, 133, 707—709; Oeuvres, t. VI, p. 371—372.
162. Sur la connexion des surfaces algébriques. — C. r. Acad. sci., 1901, 133, 969—973; Oeuvres, t. VI, p. 393—396.
- 163*. Sur certaines surfaces algébriques; troisième complément à «l'Analysis situs». — Bull. Soc. math. France, 1902, 30, 49—70; Oeuvres, t. VI, p. 373—392.
- 164*. Sur les cycles des surfaces algébriques; quatrième complément à «l'Analysis situs». — J. math. pures et appl., 5^e sér., 1902, 8, 169—214; Oeuvres, t. VI, p. 397—434.
- 165*. Cinquième complément à «l'Analysis situs». — Rendiconti Circolo mat. Palermo, 1904, 18, 45—110; Oeuvres, t. VI, p. 435—498.
- 166*. Sur un théorème de géométrie. — Rendiconti Circolo mat. Palermo, 1912, 33, 375—407; Oeuvres, t. VI, p. 499—538.

II. МЕХАНИКА

1. Аналитическая механика. Гидродинамика

167. I. Cinématique pure. Mécanismes. II. Potentiel et Mécanique des fluides. Paris, 1886, Autographié, I—140 p., II — 140 p.
168. Cinématique et Mécanismes. Potentiel et Dynamique des fluides, 2^e éd. Paris, G. Carre et C. Naud, 1899, 385 p.
169. Figures d'équilibre d'une masse fluide. Paris, G. Carre et C. Naud, 1902, 211 p.
170. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. — C. r. Acad. sci., 1885, 100, 346—348; Oeuvres, t. VII, p. 14—16.
171. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. — C. r. Acad. sci., 1885, 100, 1068—1070; Oeuvres, t. VII, p. 34—36.
172. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. — C. r. Acad. sci., 1885, 101, 307—309; Oeuvres, t. VII, p. 37—39.
173. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. — Bull. astron., 1885, 2, 109—118; Oeuvres, t. VII, p. 17—25.

174. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. — Bull. astron., 1885, 2, 405—413; Oeuvres, t. VII, p. 26—33.
 175. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. — Acta math., 1885, 7, 259—380; Oeuvres, t. VII, p. 40—140.
 176. Sur l'équilibre d'une masse fluide en rotation. — C. r. Acad. sci., 1886, 102, 970—972; Oeuvres, t. VII, p. 141—142.
 177. Sur un théorème de M. Liapounoff, relatif à l'équilibre d'une masse fluide. — C. r. Acad. sci., 1887, 104, 622—625; Oeuvres, t. VII, p. 143—146.
 178. Sur l'équilibre d'une masse hétérogène en rotation. — C. r. Acad. sci., 1888, 106, 1571—1574; Oeuvres, t. VII, p. 147—150.
 179. Les formes d'équilibre d'un masse fluide en rotation. — Rev. gén. sci. pures et appl., 1892, 3, 809—815; Oeuvres, t. VII, p. 203—217.
 180. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. (Réponse à une question proposée par M. Appell). — Intermédiaire Mathématiciens, 1894, 1, 41—42.
 181. Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action. — C. r. Acad. sci., 1896, 123, 915—198; Oeuvres, t. VII, p. 224—226.
 182. Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action. — C. r. Acad. sci., 1897, 124, 713—716; Oeuvres, t. VII, p. 227—230.
 183. Les idées de Hertz sur la Mécanique. — Rev. gén. sci. pures et appl., 1897, 8, 734—743; Oeuvres, t. VII, p. 231—250.
 184. Sur l'équilibre d'un fluide en rotation. — Bull. astron., 1899, 16, 161—169; Oeuvres, t. VII, p. 151—158.
 185. Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique. — C. r. Acad. sci., 1901, 132, 369—371; Oeuvres, t. VII, p. 218—219.
 186. Sur la stabilité de l'équilibre des figures piriformes affectées par une masse fluide en rotation. (Résumé). — Proc. Roy. Soc. London, 1901, 69, 148—149; Oeuvres, t. VII, p. 159—160.
 187. Sur la stabilité de l'équilibre des figures piriformes affectées par une masse fluide en rotation. — Philos. Trans., sér. A, 1902, 198, 333—373; Oeuvres, t. VII, p. 161—202.
 188. Sur une généralisation de la méthode de Jacobi. — C. r. Acad. sci., 1909, 149, 1105—1108; Oeuvres, t. VII, p. 220—223.
- 2. Небесная механика,
астрономия и геодезия**
- 189*. Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, t. 1. Paris. Gauthier-Villars, 1892, 385 p.
 - 190*. Les méthodes nouvelle de la Mécanique céleste, t. 2. Paris, Gauthier-Villars, 1893, VIII+479 p.
 - 191*. Les méthodes nouvelle de la Mécanique céleste, t. 3. Paris, Gauthier-Villars, 1899, 414 p.
 192. Théorie du potentiel newtonien. Paris, G. Carré et Naud, 1899, 366 p.
 193. Cours d'Astronomie générale, avec un Supplement intitulé Mécanique céleste. École Polytechnique, autographié, 208 p.
 194. Leçons de Mécanique céleste, t. 1. Paris, Gauthier-Villars. 1905. VI+367 p.
 195. Leçons de Mécanique céleste, t. 2, partie I. Paris, Gauthier-Villars. 1907, IV+167 p.
 196. Leçons de Mécanique céleste, t. 2, partie II. Paris, Gauthier-Villars. 1909, IV+137 p.
 197. Leçons de Mécanique céleste, t. 3. Paris, Gauthier-Villars, 1910, IV+472 p.
 198. Leçons sur les hypothèses cosmogoniques. Paris, Hermann et Fils, 1911, XV+294 p.; 2 éd., 1913, XV+294 p.
 199. Sur les séries trigonométriques. — C. r. Acad. sci., 1882, 95, 766—768; Oeuvres, t. IV, p. 585—587.
 200. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps. — C. r. Acad. sci., 1883, 97, 251—252; Oeuvres, t. VII, p. 251—252.
 201. Sur les séries trigonométriques. — C. r. Acad. sci., 1883, 97, 1471—1473; Oeuvres, t. IV, p. 588—590.
 202. Sur la convergence des séries trigonométriques. — Bull. astron., 1884,

- 1, 319—327; Oeuvres, t. IV, p. 591—598.
203. Sur une équation différentielle. — C. r. Acad. sci., 1884, 98, 793—795; Oeuvres, t. VII, p. 543—545.
204. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps. — Bull. astron., 1884, 1, 65—74; Oeuvres, t. VII, p. 253—261.
205. Sur les séries trigonométriques. — C. r. Acad. sci., 1885, 101, 1131—1134; Oeuvres, t. I, p. 164—166.
206. Note sur la stabilité de l'anneau de Saturne. — Bull. astron., 1885, 2, 507—508; Oeuvres, t. VIII, p. 457—458.
207. Sur un moyen d'augmenter la convergence des séries trigonométriques. — Bull. astron., 1886, 3, 521—528; Oeuvres, t. IV, p. 599—606.
208. Sur une méthode de M. Lindstedt. — Bull. astron., 1886, 3, 57—61; Oeuvres, t. VII, p. 546—550.
209. Sur la figure de la Terre. — C. r. Acad. sci., 1888, 107, 67—71; Oeuvres, t. VIII, p. 120—124.
210. Sur les satellites de Mars. — C. r. Acad. sci., 1888, 107, 890—892; Oeuvres, t. VIII, p. 459—460.
211. Sur les séries de M. Lindstedt. — C. r. Acad. sci., 1889, 108, 21—24; Oeuvres, t. VII, p. 551—554.
212. Sur la figure de la Terre. — Bull. astron., 1889, 6, 5—11; Oeuvres, t. VIII, p. 125—131.
213. Sur la figure de la Terre. — Bull. astron., 1889, 6, 49—60; Oeuvres, t. VIII, p. 132—142.
- 214*. Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique. — Acta math., 1890, 13, 1—270; Oeuvres, t. VII, p. 262—479.
215. Sur le développement approché de la fonction perturbatrice. — C. r. Acad. sci., 1891, 112, 269—273; Oeuvres, t. VIII, p. 5—9.
- 216*. Sur le problème des trois corps. — Bull. astron., 1891, 8, 12—24; Oeuvres, t. VII, p. 480—490.
217. Le problème des trois corps. — Rev. gén. sci. pures et appl., 1891, 2, 1—5; Oeuvres, t. VIII, p. 529—537.
218. Sur l'application de la méthode de M. Lindstedt au problème des trois corps. — C. r. Acad. sci., 1892, 114, 1305—1309; Oeuvres, t. VII, p. 491—495.
219. Note accompagnant la présentation d'un ouvrage relatif aux Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste. — C. r. Acad. sci., 1892, 115, 905—907. (Представление [189]).
220. Sur l'équilibre des mers. — C. r. Acad. sci., 1894, 118, 948—952; Oeuvres, t. VIII, p. 193—197.
221. Sur un procédé de vérification, applicable au calcul des séries de la Mécanique céleste. — C. r. Acad. sci., 1895, 120, 57—59; Oeuvres, t. VII, p. 555—557.
222. Observations au sujet de la communication de M. Deslandres (intitulée: «Recherches spectrales sur la rotation et les mouvements des planètes»). — C. r. Acad. sci., 1895, 120, 420—421.
223. Sur la divergence des séries de la Mécanique céleste. — C. r. Acad. sci., 1896, 122, 497—499; Oeuvres, t. VII, p. 558—560.
224. Sur la divergence des séries trigonométriques. — C. r. Acad. sci., 1896, 122, 557—559; Oeuvres, t. VII, p. 561—563.
225. Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps. — C. r. Acad. sci., 1896, 123, 1031—1035; Oeuvres, t. VII, p. 496—499.
226. Sur la méthode de Bruns. — C. r. Acad. sci., 1896, 123, 1224—1228; Oeuvres, t. VII, p. 512—516.
227. Sur l'équilibre et les mouvements des mers. — J. Math. pures et appl., 5^e sér., 1896, 2, 57—102; Oeuvres, t. VIII, p. 198—236.
228. Sur l'équilibre et les mouvements des mers. — J. Math. pures et appl., 5^e sér., 1896, 2, 217—262; Oeuvres, t. VIII, p. 237—274.
229. Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps. — Bull. astron., 1897, 14, 53—67; Oeuvres, t. VII, p. 500—511.
230. Sur l'intégration des équations du problème des trois corps. — Bull. astron., 1897, 14, 241—270; Oeuvres, t. VII, p. 517—542.
231. Sur le développement de la fonction perturbatrice. — Bull. astron., 1897, 14, 449—466; Oeuvres, t. VIII, p. 10—26.

232. Sur les périodes des intégrales doubles et les développement de la fonction perturbatrice. — C. r. Acad. sci., 1897, 124, 199—200; Oeuvres, t. VIII, p. 48—49.
233. Sur les périodes des intégrales doubles et le développement de la fonction perturbatrice. — J. Math. pures et appl., 5^e sér., 1897, 3, 203—276; Oeuvres, t. VIII, p. 50—109.
234. Sur les périodes des intégrales doubles et le développement de la fonction perturbatrice. — Bull. astron., 1897, 14, 353—354; Oeuvres, t. VIII, p. 110—111.
235. Sur le développement approché de la fonction perturbatrice. — C. r. Acad. sci., 1898, 126, 370—373; Oeuvres, t. VIII, p. 27—30.
236. Développement de la fonction perturbatrice. — Bull. astron., 1898, 15, 70—71; Oeuvres, t. VIII, p. 31—32.
237. Sur la façon de grouper les termes des séries trigonométriques qu'on rencontre en Mécanique céleste. — Bull. astron., 1898, 15, 289—310; Oeuvres, t. VII, p. 564—582.
238. Développement de la fonction perturbatrice. — Bull. astron., 1898, 15, 449—464; Oeuvres, t. VIII, p. 33—47.
239. Sur la stabilité du système solaire. — Rev. scient., 4^e sér., 1898, 9, 609—613; Oeuvres, t. VIII, p. 538—547.
240. Sur les quadratures mécaniques. — Bull. astron., 1899, 16, 382—387; Oeuvres, t. VIII, p. 461—466.
241. Sur le mouvement du périhélie de la Lune. — Bull. astron., 1900, 17, 87—104; Oeuvres, t. VIII, p. 367—382.
242. Sur les équations du mouvement de la Lune. — Bull. astron., 1900, 17, 167—204; Oeuvres, t. VIII, p. 297—331.
243. Sur la théorie de la précession. — C. r. Acad. sci., 1901, 132, 50—55; Oeuvres, t. VIII, p. 113—117.
244. Les mesures de gravité et la Géodésie. — Bull. astron., 1901, 18, 5—39; Oeuvres, t. VIII, p. 143—174.
245. Sur les déviations de la verticale en Géodésie. — Bull. astron., 1901, 18, 257—276; Oeuvres, t. VIII, p. 175—192.
246. Observations au sujet de l'article de F. H. Seares, intitulé: «Sur les quadratures mécaniques». — Bull. astron., 1901, 18, 406—420; Oeuvres, t. VIII, p. 467—479.
247. Les solutions périodiques et les planètes du type d'Hécube. — Bull. astron., 1902, 19, 177—198; Oeuvres, t. VIII, p. 417—436.
248. Sur les planètes du type d'Hécube. — Bull. astron., 1902, 19, 289—310; Oeuvres, t. VIII, p. 437—456.
249. Sur un théorème général relatif aux marées. — Bull. astron., 1903, 20, 215—229; Oeuvres, t. VIII, p. 275—288.
250. Sur la méthode horistique de Gyl-dén. — C. r. Acad. sci., 1904, 138, 933—936; Oeuvres, t. VII, p. 583—586.
251. Sur la méthode horistique. Observations sur l'article de M. Backlund. — Bull. astron., 1904, 21, 292—295; Oeuvres, t. VII, p. 619—621.
252. Sur la méthode horistique de Gyl-dén. — Acta math., 1905, 29, 235—271; Oeuvres, t. VII, p. 587—618.
253. Sur la détermination des orbites par la méthode de Laplace. — Bull. astron., 1906, 23, 161—187; Oeuvres, t. VIII, p. 393—416.
254. Sur les petits diviseurs dans la théorie de la Lune. — Bull. astron., 1908, 25, 321—360; Oeuvres, t. VIII, p. 332—366.
255. Anwendung der Theorie der Integralgleichungen auf die Flutbewegung des Meeres. — B. KH.: Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik von H. Poincaré. Leipzig u. Berlin, 1910, S. 12—19; Oeuvres, t. VIII, p. 289—296.
256. Présentation du tome III des Leçons de Mécanique céleste professées à la Sorbonne. — C. r. Acad. sci., 1910, 150, 667.
257. Sur la précession des corps déformables. — Bull. astron., 1910, 27, 321—356; Oeuvres, t. VIII, p. 481—514.
258. Présentation des Leçons sur les Hypothèses cosmogoniques. — C. r. Acad. sci., 1911, 153, 795.
259. Remarque sur l'hypothèse de Laplace. — Bull. astron., 1911, 28, 251—266; Oeuvres, t. VIII, p. 515—528.
260. Note sur la XVI^e Conférence de l'As-

sociation géodésique internationale. — Annuaire Bureau Longitudes, 1911, p. A.1—A.29; Oeuvres, t. VIII, p. 548—563.

261. Le démon d'Arrhénius. — Hommage à Louis Olivier. Paris, 1911, p. 281—287; Oeuvres, t. VIII, p. 564—569.

Предисловия, доклады, переписка

262. Préface. — В кн.: F. Tisserand. Leçons sur la détermination des orbites. Paris, Gauthier-Villars, p. V—XIV; Bull. Sci. math., 2^e sér., 1899, 23, 107—117.
263. Rapport sur la proposition d'unification des jours astronomique et civil. — Annuaire Bureau Longitudes, 1895, p. E. 1—E. 10; Oeuvres, t. VIII, p. 642—647.
264. Rapport sur les résolutions de la Commission chargée de l'étude des projets de Décimalisation du Temps et de la Circonférence. — Arch. Bureau Longitudes, 1897, 12p.; Oeuvres, t. VIII, p. 648—664.
265. Rapport sur le projet de révision de l'arc méridien de Quito. — C. r. Acad. sci., 1900, 131, 215—236; Oeuvres, t. VIII, p. 571—592.
266. Rapport présenté au nom de la Commission chargée du contrôle scientifique des opérations géodésiques de l'Équateur. — C. r. Acad. sci., 1902, 134, 965—972; Oeuvres, t. VIII, p. 593—601.
267. Rapport sur les opérations géodésiques de l'Équateur. — Compt. rend. Séances 14^e Conf. gén. Assoc. Géodésique internat. (4—13.VIII 1903), 1905, p. 113—127; Oeuvres, t. VIII, p. 602—620.
268. Rapport présenté au nom de la Commission chargée du contrôle scientifique des opérations géodésiques de

l'Équateur. — C. r. Acad. sci., 1903, 136, 861—871.

269. Rapport présenté au nom de la Commission chargée du contrôle scientifique des opérations géodésiques de l'Équateur. — C. r. Acad. sci., 1904, 138, 1013—1019.
270. Rapport présenté au nom de la Commission chargée du contrôle scientifique des opérations géodésiques de l'Équateur. — C. r. Acad. sci., 1905, 140, 998—1006.
271. Rapport présenté au nom de la Commission chargée du contrôle scientifique des opérations géodésiques de l'Équateur. — C. r. Acad. sci., 1907, 145, 366—370.
272. Rapports sur les opérations géodésiques de l'Équateur en 1903, 1904 et 1905, présentés à l'Académie des Sciences au nom de la Commission chargée du contrôle scientifique des opérations géodésiques de l'Équateur. — Compt. rend. Séances 15^e Conf. gén. Assoc. Géodésique internat. (20—28.IV 1906), 1908, p. 289—304; Oeuvres, t. VIII, p. 621—641. Вошли [268], [269], [270].
273. Lettres à M. Mittag-Leffler concernant le Mèmoire couronné du prix de S. M. le roi Oscar II (18.IV 1883, 16.VII 1887, 5.II 1889, 1.III 1889, 5.III 1889). — Acta math., 1921, 38, 161—173; Oeuvres, t. XI, p. 66—78.
274. A propos de la décimalisation de l'heure. — Éclairage électrique, 1897, 12, 40.
275. La décimalisation de l'heure et de la circonférence. — Éclairage électrique, 1897, 11, 529—531; Oeuvres, t. VIII, p. 676—679.
276. Conférence sur les comètes. — Bull. Soc. industrielle de Mulhouse, 1910, 80, 311—323; Oeuvres, t. VIII, p. 665—675.

III. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

1. Книги

277. Théorie mathématique de la lumière, t. 1. Paris, G. Carré et Naud, 1889, IV+408 p.

278. Électricité et optique, t. 1. Les théories de Maxwell et la théorie électromagnétique de la lumière. Paris, G. Carré et Naud, 1890, XIX+314 p.

279. Électricité et optique, t. 2. Les théories de Helmholtz et les expériences de Hertz. Paris, G. Carré et Naud, 1891, XI+262 p.
280. Théorie mathématique de la lumière, t. 2. Nouvelles études sur la diffraction. Théorie de la dispersion de Helmholtz. Paris, G. Carré et Naud, 1892, VI+310 p.
281. Thermodynamique. Paris, G. Carré et Naud, 1892, XIX+432 p.
282. Leçons sur la théorie de l'élasticité. Paris, G. Carré et Naud, 1892, 210 p.
283. Théorie des tourbillons. Paris, G. Carré et Naud, 1893, 212 p.
284. Les oscillations électriques. Paris, G. Carré et Naud, 1894, 343 p.
285. Capillarité. Paris, G. Carré et Naud, 1895, 189 p.
286. Théorie analytique de la propagation de la chaleur. Paris, G. Carré et Naud, 1895, 316 p.
287. Calcul des probabilités. Paris, G. Carré et Naud, 1896, 275 p.
288. La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes. La Télégraphie sans fil. Paris, G. Carré et Naud, 1899, 80 p.
289. Électricité et optique. Leçons en 1888, 1890 et 1899. 2^e éd. Paris, Gauthier-Villars, 1901, 632 p.
290. La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes. 2^e éd. Paris, C. Naud, 1904, 80 p.; 3^e éd., Gauthier-Villars, 1907, 97 p.
291. Thermodynamique, 2^e éd. Paris, Gauthier-Villars, 1908, XIX+458 p.
292. Calcul des probabilités. 2^e éd., rev. et augm. Paris, Gauthier-Villars, 1912, IV+335 p.

2. Дифференциальные уравнения математической физики

293. Sur le problème de la distribution électrique. — C. r. Acad. sci., 1887, 104, 44—46; Oeuvres, t. IX, p. 15—17.
294. Sur la théorie analytique de la chaleur. — C. r. Acad. sci., 1887, 104, 1753—1759; Oeuvres, t. IX, p. 18—23.
295. Sur la théorie analytique de la chaleur. — C. r. Acad. sci., 1888, 107, 967—971; Oeuvres, t. IX, p. 24—27.
296. Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique.

— Amer. J. Math., 1890, 12, p. 211—294; Oeuvres, t. IX, p. 28—113.

297. Sur la propagation de l'électricité. — C. r. Acad. Sci., 1893, 117, 1027—1032; Oeuvres, t. IX, p. 278—283.
298. Sur certains développements en séries que l'on rencontre dans la théorie de la propagation de la chaleur. — C. r. Acad. sci., 1894, 118, 383—387; Oeuvres, t. IX, p. 114—118.
299. Sur la série de Laplace. — C. r. Acad. sci., 1894, 118, 497—501; Oeuvres, t. IV, p. 607—610.
300. Sur l'équation des vibrations d'une membrane. — C. r. Acad. sci., 1894, 118, 447—451; Oeuvres, t. IX, p. 119—122.
301. Sur les équations de la physique mathématique. — Rendiconti Circolo mat. Palermo, 1894, 8, 57—155; Oeuvres, t. IX, p. 123—196.
302. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. — C. r. Acad. sci., 1895, 120, 347—352; Oeuvres, t. IX, p. 197—201.
303. Sur l'équilibre d'un corps élastique. — C. r. Acad. sci., 1896, 122, 154—159; Oeuvres, t. IX, p. 273—277.
304. La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. — Acta math., 1896—1897, 20, 59—142; Oeuvres, t. IX, p. 202—272.
305. Fourier's séries (lettre à A. A. Michelson). — Nature, 1899, 60, May 18, 52.

3. Физические теории

306. Sur la polarisation par diffraction. — Acta math., 1892—1893, 16, 297—339; Oeuvres, t. IX, p. 293—330.
307. A propos de la théorie de M. Larmor. — Éclairage électrique, 1895, 3, 5—13; Oeuvres, t. IX, p. 369—382.
308. A propos de la théorie de M. Larmor. — Éclairage électrique, 1895, 3, 289—295; Oeuvres, t. IX, p. 383—394.
309. A propos de la théorie de M. Larmor. — Éclairage électrique, 1895, 5, 5—14; Oeuvres, t. IX, p. 395—413.
310. A propos de la théorie de M. Larmor. — Éclairage électrique, 1895, 5, 385—392; Oeuvres, t. IX, p. 414—426.

311. Sur la polarisation par diffraction. II partie (см. [306]). — *Acta math.*, 1896—1897, 20, 313—355; *Oeuvres*, t. IX, p. 331—368.
312. La théorie de Lorentz et les expériences de Zeeman. — *Éclairage électrique*, 1897, 11, 481—489; *Oeuvres*, t. IX, p. 427—441.
313. La théorie de Lorentz et le phénomène de Zeeman. — *Éclairage électrique*, 1899, 19, 5—15; *Oeuvres*, t. IX, p. 442—460.
314. Le phénomène de Hall et la théorie de Lorentz. — *C. r. Acad. sci.*, 1899, 128, 339—341; *Oeuvres*, t. IX, p. 461—463.
315. La théorie de Lorentz et le principe de réaction. — *Arch. Neerl. sci. exactes et natur.*, 2^e sér., 1900, 5, 252—278; *Oeuvres*, t. IX, p. 464—488.
- 316*. Sur la dynamique de l'électron. — *C. r. Acad. sci.*, 1905, 140, 1504—1508; *Oeuvres*, t. IX, p. 489—493.
- 317*. Sur la dynamique de l'électron. — *Rendiconti Circolo mat. Palermo*, 1906, 21, 129—176; *Oeuvres*, t. IX, p. 494—550.
- 318*. Réflexions sur la théorie cinétique des gaz. — *J. Phys. théoret. et appl.*, 4^e sér., 1906, 5, 369—403; *Bull. Soc. franç. phys.*, 1906, 150—184; *Oeuvres*, t. IX, p. 587—619.
- 319*. La dynamique de l'électron. — *Revue gén. sci. pures et appl.*, 1908, 19, 386—402; *Oeuvres*, t. IX, p. 551—586.
- 320*. Sur la théorie des quanta. — *C. r. Acad. sci.*, 1911, 153, 1103—1108; *Oeuvres*, t. IX, p. 620—625.
- 321*. Sur la théorie des quanta. — *J. Phys. théoret. et appl.*, 5^e sér., 1912, 2, 5—34; *Oeuvres*, t. IX, p. 626—653.
- 322*. L'hypothèse des quanta. — *Revue scient.*, 4^e sér., 1912, 17, 225—232; *Oeuvres*, t. IX, p. 654—668.
323. Les rapports de la matière et de l'éther. — *J. Phys. théoret. et appl.*, 5^e sér., 1912, 2, 347—360; *Oeuvres*, t. IX, p. 669—682.
324. La theorie du rayonnement. Доклад по теории квантов в Лондонском ун-те 11.V 1912 г.; см. [320], [321], [322].

4. Герцевские колебания

325. Contribution à la théorie des expériences de M. Hertz. — *C. r. Acad. sci.*, 1890, 111, 322—326; *Oeuvres*, t. X, p. 1—5.
326. Contribution à la théorie des expériences de Hertz. — *Arch. sci. phys. et natur. Genève*, 3^e période, 1890, 24, 285—290.
327. Sur le calcul de la période des excitateurs hertziens. — *Arch. sci. phys. et natur. Genève*, 3^e période, 1891, 25, 5—25; *Oeuvres*, t. X, p. 6—19.
328. Sur la résonance multiple des oscillations hertziennes. — *Arch. sci. phys. et natur. Genève*, 3^e période, 1891, 25, 609—627; *Oeuvres*, t. X, p. 20—32.
329. Sur la théorie des oscillations hertziennes. — *C. r. Acad. sci.*, 1891, 113, 515—519; *Oeuvres*, t. X, p. 33—37.
330. Sur un mode anormal de propagation des ondes. — *C. r. Acad. sci.*, 1892, 114, 16—18; *Oeuvres*, t. X, p. 38—40.
331. Sur la propagation des oscillations hertziennes. — *C. r. Acad. sci.*, 1892, 114, 1046—1048; *Oeuvres*, t. X, p. 41—43.
332. Sur la propagation des oscillations électriques. — *C. r. Acad. sci.*, 1892, 114, 1229—1233; *Oeuvres*, t. X, p. 44—47.
333. Observations sur la Communication précédente de M. M. Birkeland et Sarasin. — *C. r. Acad. sci.*, 1893, 117, 622—624; *Oeuvres*, t. X, p. 48—52.
334. Sur la diffraction des ondes électriques; à propos d'un article de M. Macdonald. — *Proc. Roy. Soc., London*, 1903, 72, 42—52; *Oeuvres*, t. X, p. 53—64.
335. Les ondes hertziennes et l'équation de Fredholm. — *C. r. Acad. sci.*, 1909, 148, 449—453; *Oeuvres*, t. X, p. 65—69.
336. Sur la diffraction des ondes hertziennes. — *C. r. Acad. sci.*, 1909, 148, 812—817; *Oeuvres*, t. X, p. 70—75.
337. Sur la diffraction des ondes hertziennes. — *C. r. Acad. sci.*, 1909, 148, 966—968; *Oeuvres*, t. X, p. 76—77.
338. Les ondes hertziennes et l'équation de Fredholm. — *C. r. Acad. sci.*,

- 1909, 148, 1488—1490; Oeuvres, t. X, p. 89—91.
339. Sur la diffraction des ondes hertziennes. — C. r. Acad. sci., 1909, 149, 621—622; Oeuvres, t. X, p. 92—93.
340. Anwendung der Integralgleichungen auf Hertz'sche Wellen. — В кн.: Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik. Leipzig u. Berlin, 1910, S. 21—31; Oeuvres, t. X, p. 78—88.
341. Sur la diffraction des ondes hertziennes. — Lumière électrique, 2^e sér., 1910, 10, 355—362, 387—394; 11, 7—12.
342. Sur la diffraction des ondes hertziennes. — Rendiconti Cricolo mat. Palermo, 1910, 29, 169—259; Oeuvres, t. X, p. 94—203.
343. Über einige Gleichungen in der Theorie der Hertz'schen Wellen. — Math. Naturwiss. Blätter (Berlin), 1910, 8, N 4; Oeuvres, t. X, p. 204—213.
344. Sur la diffraction des ondes hertziennes. — C. r. Acad. sci., 1912, 154, 795—797; Oeuvres, t. X, p. 214—215.
- 5. Критика и обсуждение физических теорий**
345. Sur les tentatives d'explication mécanique des principes de la thermodynamique. — C. r. Acad. sci., 1889, 108, 550—553; Oeuvres, t. X, p. 231—233.
346. Sur la loi électrodynamique de Weber. — C. r. Acad. sci., 1890, 110, 825—829; Oeuvres, t. X, p. 292—296.
347. Sur l'expérience de M. Wiener. — C. r. Acad. sci., 1891, 112, 325—329; Oeuvres, t. X, p. 271—277.
348. Sur la réflexion métallique. — C. r. Acad. sci., 1891, 112, 456—459; Oeuvres, t. X, 278—286.
349. Sur l'équilibre des diélectriques fluides dans un champ électrique. — C. r. Acad. sci., 1891, 112, 555—557; Oeuvres, t. X, p. 297—298.
350. Sur la théorie de l'élasticité. — C. r. Acad. sci., 1891, 112, 914—915; Oeuvres, t. X, p. 221—227.
351. Sur la théorie de l'élasticité. — C. r. Acad. sci., 1892, 114, 385—389; Oeuvres, t. X, p. 228—230.
352. Réponse à l'article de P. G. Tait: Poincaré's Thermodynamics. — Nature, 1892, 45, 414—415; Oeuvres, t. X, p. 234—235.
353. Réponse à P. G. Tait. — Nature, 1892, 45, 485; Oeuvres, t. X, p. 236—237.
354. Réponse à P. G. Tait. — Nature, 1892, 46, 76; Oeuvres, t. X, p. 238—239.
355. Sur une objection à la théorie cinétique des gaz. — C. r. Acad. sci., 1893, 116, 1017—1021; Oeuvres, t. X, p. 240—243.
356. Sur la théorie cinétique des gaz. — C. r. Acad. sci., 1893, 116, 1165—1166; Oeuvres, t. X, p. 244—245.
357. Sur la théorie cinétique des gaz. — Rev. gén. sci. pures et appl., 1894, 5, 513—521; Oeuvres, t. X, p. 246—263.
358. La lumière et l'électricité d'après Maxwell et Hertz. — Annuaire Bureau Longitudes, 1894, A. 1—A. 22: Rev. scient., 4^e sér., 1894, 1, 106—111; Oeuvres, t. X, p. 557—569.
359. Sur le spectre cannelé. — C. r. Acad. Sci., 1895, 120, 757—762; Oeuvres, t. X, p. 287—291.
360. Remarque sur un Mémoire de M. Jaumann intitulé: «Longitudinales Licht». — C. r. Acad. sci., 1895, 121, 792—793; Oeuvres, t. X, p. 299—306.
361. Observations au sujet de la communication précédente (de M. G. Jaumann). — C. r. Acad. sci., 1896, 122, p. 76.
362. Observations au sujet de la communication précédente (de M. Jaumann). — C. r. Acad. sci., 1896, 122, 520.
363. Observations au sujet de la communication de M. Jaumann. — C. r. Acad. sci., 1896, 122, 990.
364. Les rayons cathodiques et la théorie de Jaumann. — Éclairage électrique, 1896, 9, 241—251; Oeuvres, t. X, p. 314—332.
365. Les rayons cathodiques et la théorie de Jaumann. — Éclairage électrique, 1896, 9, 289—293; Oeuvres, t. X, p. 333—340.

366. Observations au sujet de la communication de M. J. Perrin «Quelques propriétés des rayons de Röntgen». — C. r. Acad. sci., 1896, 122, 188; Oeuvres, t. X, p. 307.
367. Observations au sujet de la communication de M. G. de Metz «Photographie à l'intérieur du tube de Crookes». — C. r. Acad. sci., 1896, 192, 881; Oeuvres, t. X, p. 308.
368. Observations au sujet de la communication de M. G. de Metz: «Photographie à l'intérieur du tube de Crookes». — C. r. Acad. sci., 1896, 123, 356; Oeuvres, t. X, p. 309.
369. Remarques sur une expérience de M. Birkeland. — C. r. Acad. sci., 1896, 123, 530—533; Oeuvres, t. X, p. 310—313.
370. Les rayons cathodiques et les rayons Röntgen. — Rev. gén. sci. pures et appl., 1896, 7, 52—59; Oeuvres, t. X, p. 570—583.
371. Observations au sujet de la note de M. J. J. Thomson (intitulée «On the cathode Rays»). — Éclairage électrique, 1897, 12, 186.
372. Les rayons cathodiques et les rayons Röntgen. — Annuaire Bureau Longitudes, 1897, D. 1—D. 35; Rev. scient., 4^e sér., 1897, 7, 72—81; Oeuvres, t. X, p. 584—603.
- 373*. La mesure du temps. — Rev. métaphys. et morale, 1898, 6, 1—13.
374. L'énergie magnétique d'après Maxwell et d'après Hertz. — Éclairage électrique, 1899, 19, 361—367; Oeuvres, t. X, p. 341—351.
375. Sur l'induction unipolaire. — Éclairage électrique, 1900, 23, 41—53; Oeuvres, t. X, p. 355—371.
376. Sur les excitateurs et résonateurs hertziens (à propos d'un article de M. Johnson). — Éclairage électrique, 1901, 29, 305—307; Oeuvres, t. X, p. 352—354.
377. A propos des expériences de M. Grémieu. — Rev. gén. sci. pures et appl., 1901, 12, 994—1007; Oeuvres, t. X, p. 391—420.
378. Sur les propriétés des anneaux à collecteurs. — Éclairage électrique, 1902, 30, 77—81; Oeuvres, t. X, p. 372—377.
379. Sur les propriétés des anneaux à collecteurs. — Éclairage électrique, 1902, 30, 301—310; Oeuvres, t. X, p. 378—390.
380. Sur les expériences de M. Grémieu et une objection de M. Wilson. — Éclairage électrique, 1902, 31, 83—93; Oeuvres, t. X, p. 421—437.
381. Notice sur la télégraphie sans fil. — Annuaire du Bureau des Longitudes, 1902, A.1—A.34; Rev. scient., 4^e sér., 1902, 17, 65—73; Oeuvres, t. X, p. 604—622.
382. Éntropy. — Électrician. 1903, 50, 688—689; Oeuvres, t. X, p. 264—270.
383. Théorie de la balance azimutale quadrifilaire. — C. r. Acad. sci., 1904, 138, 869—874; Oeuvres, t. X, p. 438—444.
384. Étude de la propagation du courant en période variable sur une ligne munie de récepteur. — Éclairage électrique, 1904, 40, 121—128, 161—167, 201—212, 241—250; Oeuvres, t. X, p. 445—486.
385. Étude du récepteur téléphonique. — Éclairage électrique, 1907, 50, 221—234, 257—262, 329—338, 365—372, 401—404; Oeuvres, t. X, p. 487—539.
386. Sur quelques théorèmes généraux relatifs à l'Electrotechnique. — Éclairage électrique, 1907, 50, 293—301; Oeuvres, t. X, p. 540—551.
387. Sur la théorie de la commutation. — Lumière électrique, 2^e sér., 1908, 2, 295—297; Oeuvres, t. X, p. 552—556.
388. Sur la télégraphie sans fil. — Lumière électrique, 2^e sér., 1908, 4, 259—266, 291—297, 323—327, 355—359, 387—393; Conférences sur la Télégraphie sans fil. Paris, 1909, 86 p.
389. La télégraphie sans fil. — J. Univ. annales, 1909, 1, 541—542.
390. Sur les signaux horaires destinés aux marins. — C. r. Acad. sci., 1910, 150, 1471—1472.
391. Sur l'envoi de l'heure par la télégraphie sans fil. — C. r. Acad. sci., 1910, 151, 911.
392. Sur diverses questions relatives à la télégraphie sans fil. — Lumière électrique, 2^e sér., 1911, 13, 7—12.

393. Sur diverses questions relatives à la télégraphie sans fil. — *Lumière électrique*, 2^e sér., 1911, 13, 35—40.
394. Sur diverses questions relatives à la télégraphie sans fil. — *Lumière électrique*, 2^e sér., 1911, 13, 67—72.

395. Sur diverses questions relatives à la télégraphie sans fil. — *Lumière électrique*, 2^e sér., 1911, 13, 99—104.
396. Présentation de la 2^e édition de l'ouvrage *Calcul des Probabilités*. — *C. r. Acad. sci.*, 1911, 153, 795.

IV. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ НАУКИ

397. *La science et l'hypothèse*. Paris, Flammarion, 1902, 284 p.
398. *La valeur de la science*. Paris, Flammarion, 1905, 278 p.
399. *La science et l'hypothèse*. Éd. revue et corrigée. Paris, Flammarion, 1906, 281 p.
400. *Science et méthode*. Paris, Flammarion, 1908, 314 p.
401. *Dernières pensées*. Paris, Flammarion, 1913, 258 p. Вошли [322], [323], [435], [445], [447], [448].
402. Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie. — *Bull. Soc. math. France*, 1887, 15, 203—216; *Oeuvres*, t. XI, p. 79—91.
403. Les géométries non euclidiennes. — *Rev. gén. sci. pures et appl.*, 1891, 2, 769—774.
404. Lettre à M. Mouret sur les géométries non euclidiennes. — *Rev. gén. sci. pures et appl.*, 1892, 3, 74—75.
405. La continu mathématique. — *Rev. métaphys. et morale*, 1893, 1, 26—34.
406. Mécanisme et expérience. — *Rev. métaphys. et morale*, 1893, 1, 534—537.
407. Mécanisme et expérience (réponse à M. Léchalas). — *Rev. métaphys. et morale*, 1894, 2, 197—198.
408. Sur la nature du raisonnement mathématique. — *Rev. métaphys. et morale*, 1894, 2, 371—384.
409. L'espace et la géométrie. — *Rev. métaphys. et morale*, 1895, 3, 631—646.
410. Réponse à quelques critiques (relatives aux [406]. [409]). — *Rev. métaphys. et morale*, 1897, 5, 59—70.
411. On the foundations of geometry. — *Monist*, 1898 — 1899, 9, 1—43.
412. Sur les fondements de la géométrie, à propos d'un livre de M. Russell. — *Rev. métaphys. et morale*, 1899, 7, 251—279.

413. Réflexion sur le calcul des probabilités. — *Rev. gén. sci. pures et appl.*, 1899, 10, 262—269.
414. Sur les principes de la géométrie. Réponse à M. Russel. — *Rev. métaphys. et morale*, 1900, 8, 73—86.
415. Comptes rendus des Séances du Congrès de Philosophie, discussion. — *Rev. métaphys. et morale*, 1900, 8, 556—561.
416. Sur la valeur objective de la science. — *Rev. métaphys. et morale*, 1902, 10, 263—293.
417. Grandeur de l'astronomie. — *Bull. Soc. astron. France*, 1903, 17, 253—259.
418. L'espace et ses trois dimensions. — *Rev. métaphys. et morale*, 1903, 11, 281—301.
419. L'espace et ses trois dimensions. — *Rev. métaphys. et morale*, 1903, 11, 407—429.
420. La Terre tourne-t-elle? — *Bull. Soc. astron. France*, 1904, 18, 216—217.
421. Les mathématiques et la logique. — *Rev. métaphys. et morale*, 1905, 13, 815—835.
422. Une image de l'Univers. — *Bull. Soc. astron. France*, 1905, 19, 30—31.
423. Cournot et les principes du calcul infinitésimal. — *Rev. métaphys. et morale*, 1905, 13, 293—306.
424. Les mathématiques et la logique. — *Rev. métaphys. et morale*, 1906, 14, 17—34.
425. Les mathématiques et la logique. — *Rev. métaphys. et morale*, 1906, 14, 294—317.
426. A propos de la logistique. — *Rev. métaphys. et morale*, 1906, 14, 866—868.
427. Lettre à M. G. F. Stout. — *Mind*, 1906, 15, 141—143.
428. La Voie Lactée et la théorie de gaz. — *Bull. Soc. astron. France*, 1906, 20, 153—165.

429. La fin de la matière. — Athenæum (London), 17 Feb. 1906, 201—202; см. также [399].
430. La relativité de l'espace. — Année Psychol., 1907, 13, 1—17.
431. Le Hasard. — Rev. du Mois, 1907, 3, 257—276; [400], Chap. IV.
432. Comment se fait la Science. — Le Matin, 25 nov. 1908.
433. Comment on invente. Le travail de l'inconscient. — Le Matin, 24 déc. 1908.
434. La Mécanique nouvelle. — Compt. rend. Sessions Assoc. franç. avancement sci. Conférence. Paris, 1909, p. 38—48; Rev. scient., 1909, 47, 170—177.
435. La logique de l'infini. — Rev. métaphys. et morale, 1909, 17, 461—482; [401], chap. IV.
436. Le choix des faits. — Monist, 1909, 19, 231—239; [400], chap. I.
437. Réflexions sur deux notes de M. A. S. Schönflies et de M. E. Zermelo. — Acta math., 1909, 32, 195—200; Oeuvres, t. XI, p. 114—119.
438. Sur la nécessité de la culture scientifique. — Palmarès du Lycée Henri IV. Paris, 1909—1910, p. 31—36; Rev. internat. Enseignement, 1909, 58, 342—345.
439. Über transfinite Zahlen. — В кн.: Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik. Leipzig u. Berlin, 1910, S. 43—48; Oeuvres, t. XI, p. 120—124.
440. La Mécanique nouvelle. — В кн.: Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik. Leipzig u. Berlin, 1910, S. 49—58.
441. La Mécanique nouvelle. Публичная лекция 14.IX 1910 в Берлинском университете. На нем. яз.: Hummel und Erde (Leipzig), 1910, 23, 97—116; H. Poincaré. Die neue Mechanik. Leipzig u. Berlin, 1911, 22 S.
442. La morale et la science. — Foi et Vie (Paris), 1910, 13, 323—329; Questions du temps présent. Paris, 1910, p. 49—69; Revue de Jean Finot, 1910, 86, 289—302.
443. Le libre examen en matière scientifique. Bruxelles. M. Weissenbruch, 1910, p. 97—106.
444. Vue d'ensemble sur les hypothèses cosmogoniques. — Предисловие к [198]. См. также: Rev. du Mois, 1911, 12, 385—403.
445. L'espace et le temps. — Scientia (Revista di Scienza) 1912, 12, 159—171; [401], Chap. II.
446. Les conceptions nouvelles de la matière. — Foi et Vie (Paris), 1912, 15, 185—191; в кн.: Le matérialisme actuel. Paris, E. Flammarion, 1916, p. 49—67.
447. Pourquoi l'espace a trois dimensions. — Rev. métaphys. et morale, 1912, 20, 483—504; [401], Chap. III.
448. La logique de l'infini. — Scientia (Rivista scienza), 1912, 12, 1—11; [401], Chap. V.

V. РАЗНОЕ

1. Выступления на международных конгрессах

449. Sur les rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique. — Acta math., 1897, 21, 331—341; Rev. gén. sci. pures et appl., 1897, 8, 857—861; Verhandl. I. internat. mathematiker Kongress in Zürich (1897). Leipzig, 1898, S. 81—90.
450. Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques. — Compt. rend. II Congrès internat. Mathématiciens. Paris, 1900, p. 115—130.
451. Relations entre la Physique expérimentale et de la Physique mathématique. — Rapp. Congrès internat. Phys., t. 1. Paris, 1900, p. 1—29; Rev. gén. sci. pures et appl., 1900, 11, 1163—1175; Rev. scient., 4^e sér., 1900, 14, 705—715.
452. Sur les principes de la Mécanique. — Bibliothèque du Congrès internat. Philosophie, Paris, 1900, t. 3. Paris, 1901, p. 457—494.
- 453* L'état actuel et l'avenir de la Physique mathématique. — Bull. Sci. math., 2^e sér., 1904, 28, 302—324; Monist, 1905, 15, N 1.

454. L'avenir des Mathématiques. — Atti IV Congr. Internaz. Matematici, Roma, 11 Aprile 1908, p. 167—182; Bull. sci. math., 2^e sér., 1908, 32, 1 partie, 168—190; Rendiconti Circolo mat. Palermo, 1908, 16, 162—168; Rev. gén. sci. pures et appl., 1908, 19, 930—939; Scientia (Revista scienza), 1908, 2, N 3, 1—23.
455. L'évolutions des lois. — Scientia, (Revista scienza), 1911, 9, 275—292.

2. Анализ работ

(статьи, доклады, выступления,
предисловия, некрологи)

456. Notice sur les travaux scientifiques de M. Poincaré (rédigée par lui-même). Paris, Gauthier-Villars, 1884. 51 p.
457. Notice sur les travaux scientifiques de M. Poincaré. 2^e éd. Paris, Gauthier-Villars, 1886, 75 p.
- 458*. Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même. — Acta math., 1921, 38, 36—135.
459. Savants et écrivains. Paris, Flammarion, 1910, XIV+281 p.
460. Notice sur la vie et les travaux de M. Laguerre. — C. r. Acad. sci., 1887, 104, 1643—1650; Préface des Oeuvres de Laguerre, t. 1. Paris, 1898, p. V—XV.
461. Notice sur Halphen. — J. École Polytechn., 1890, cah. 60^e, 137—161.
462. Rapport sur un mémoire de M. Cellier intitulé: «Sur les variations des excentricités et des inclinaisons». — C. r. Acad. sci., 1890, 110, 942—944.
463. Rapport sur un mémoire présenté par M. Blondlot et relatif propagation des oscillations hertziennes. — C. r. Acad. sci., 1892, 114, 645—648.
464. Rapport sur le concours du prix Bordin. — C. r. Acad. sci., 1892, 115, 1126—1127.
465. Au Jubilé de M. Charles Hermite. — В кн.: Jubilé de M. Hermite. Paris, Gauthier-Villars, 1893, p. 6—8; Rev. Questions scient., 2^e sér., 1893, 3, 244—246.
466. Rapport verbal (concernant une démonstration du théorème de Fermat, adressée par M. G. Korneck). — C. r. Acad. sci., 1894, 118, 841.
467. Au Cinquantenaire de l'entrée de M. Joseph Bertrand dans l'Enseignement. — Rev. scient., 4^e sér., 1894, 1, 685—686; Annuaire École polytechn., 1895, 107—108.
468. Rapport sur un mémoire de M. Stieltjes intitulé: «Recherches sur les fractions continues». — C. r. Acad. sci., 1894, 119, 630—632.
469. Rapport sur le Concours du prix Bordin (en commun avec M. M. Picard et Appell). — C. r. Acad. sci., 1894, 119, 1051—1056.
470. Prix Bordin. (Rapport sur le mémoire de M. Hadamard). — C. r. Acad. sci., 1896, 123, 1109—1111.
471. Sur la vie et les travaux de F. Tisserand. — Rev. gén. sci. pures et appl., 1896, 7, 1230—1233.
472. Discours prononcé aux funérailles de M. Tisserand. — Bull. Astron., 1896, 13, 430—432. Annuaire Bureau Longitudes, 1897, p. H. 15—H. 18.
473. Rapport sur un mémoire de M. Hadamard (Lignes géodésiques sur les surfaces à courbures opposées). — C. r. Acad. sci., 1897, 125, 589—591.
474. Rapport sur un mémoire de M. Le Roy (Sur l'intégrations des équations de la chaleur). — C. r. Acad. sci., 1897, 125, 847—849.
475. Grand prix des Sciences mathématiques (en commun avec M. Picard). — C. r. Acad. sci., 1898, 127, 1061—1065.
476. L'oeuvre mathématique de Weierstrass. — Acta math., 1898, 22, 1—18.
477. Analyse d'un ouvrage de Ch. André (intitulé «Traité d'Astronomie stellaire»). — Bull. astron., 1899, 16, 124—127.
478. Appréciation d'un ouvrage de M. V. Bjerknes (intitulé: «Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte»). — C. r. Acad. sci., 1900, 130, 25.
479. La Géodésie Française (discours prononcé à la séance des Cinq Académies le 25 Octobre 1900). — Mémoires de l'Institut, 1900, 20, 13—25; Bull. Soc. astron. France, 1900, 14, 513—521.
480. Les Géométries non euclidiennes. — В кн.: E. Rouché et Ch. de Combe-

- rousse. Traite de Géométrie. II partie. Paris, Gauthier-Villars, 1900. p. 581—583.
481. Rapport sur les papiers laissés par Halphen. — C. r. Acad. sci., 1901, 133, 722—724.
482. Les progrès de l'Astronomie en 1901. — Bull. Soc. astron. France, 1902, 16, 214—223.
483. Sur la vie et les travaux de M. Faye. — Bull. Soc. astron. France, 1902, 16, 496—501.
484. Analyse d'un mémoire de M. Zaremba. — Bull. sci. math., 2^e sér., 1902, 26, I partie, 337—350.
485. Discours prononcé aux funérailles de M. A. Cornu (16.IV 1902). — Mémoires de l'Institut, 1902, 15—18; Bull. Soc. franç. phys., 1902, 186—188; Annuaire Bureau Longitudes, 1903, p. D. 7—D. 11.
486. Sur M. A. Cornu (lettre à M. C. M. Gariel, avr. 1902). — Bull. Soc. franç. phys., 1902, p. 32*—33*.
487. A. Cornu. — Éclairage électrique, 1902, 31, 81—82.
488. Les fondements de la Géométrie. — Bull. sci. math., 2^e sér., 1902, 26, 249—272; J. Savants, 1902, 252—271; Oeuvres. t. XI, 92—113. Анализ работы Д. Гильберта «Основания геометрии».
489. Les fondements de la Géométrie. — Bull. sci. math., 2^e sér., 1903, 27, 115.
490. Sur les travaux de la Société Française du Physique. — Bull. Soc. franç. phys., 1903, p. 5—8.
491. Sur la Part des Polytechniciens dans l'Oeuvre scientifique du XIX^e siècle. — Compte rendu. Paris, Gauthier-Villars, 1903. p. 11—17.
492. Rapport sur les travaux de M. Hilbert. — Изв. физико-матем. об-ва, Казань, 2 сер., 1904, 14, 10—48. Отзыв о работе Д. Гильберта «Основания геометрии» (Grundlagen der Geometrie, 1889), представленной на III конкурс им. Лобачевского.
493. Rapport sur le Concours du Prix Leconte. — C. r. Acad. sci., 1904, 139, 1120—1122.
494. Prix Damoiseau. — C. r. Acad. sci., 1905, 141, 1076—1077.
495. Rapport sur un Mémoire de M. Bachelier intitulé: «Les probabilités continues». — C. r. Acad. sci., 1905, 141, 647—648.
496. Preface. — В кн.: Q. W. Hill. Collected Mathematical Works, v. 1. Washington. 1905, p. V—XVIII.
497. Notice sur la vie et les oeuvres d'Alfred Cornu. — В кн.: Alfred Cornu. Rennes, Francis Simon, 1904, p. 9—21; J. École polytechn., 2^e sér., 1905, cah. 10^e, 143—176.
498. A. Potier. — Éclairage électrique, 1905, 43, 281—282; в кн.: A. Potier. Mémoires sur l'électricité et l'optique. Paris, Gauthier-Villars, 1912, p. V—X.
499. Sur de M. Langley, correspondant de l'Académie. — C. r. Acad. sci., 1906, 142, 925.
500. Sur de Membre de l'Académie M. Curie. — C. r. Acad. sci., 1906, 142, 939—941.
501. Sur de M. Bischoffsheim. — C. r. Acad. sci., 1906, 142, 1119.
502. Sur des Membres de l'Académie des Sciences et sur des Membres de la Mission géodesique à l'Équateur. — C. r. Acad. sci., 1906, 143, 989—998. Memoirs de l'Institut, 1906, 23, p. 5—16.
503. Sur l'oeuvre de Marcelin Berthelot. — Le Matin, 25 mars 1907, p. 1.
504. Prix Vaillant. Rapport sur le Mémoire de M. Boggio et le Mémoire N 7 portant pour épigraphe «Barré de Saint-Venant». — C. r. Acad. sci., 1907, 145, 988—991.
505. Prix Monthyon. — C. r. Acad. sci., 1908, 147, 1199.
506. Préface. — В кн.: Devaux-Charbonnel. État actuel de la science électrique. Paris, Dunod et E. Pinat, 1908, p. V—X.
507. Compte rendu d'ensemble des travaux du IV^e. Congrès des Mathématiciens tenu à Rome en 1908. — Le Temps (Paris), 1908, 21 avril, p. 2—3.
508. Sur M. Maurice Loewy. — Annuaire Bureau Longitudes, 1908, p. D.1—D.18.
509. Lord Kelvin. — Lumière électrique, 2^e sér., 1908, 1, 139—147.

510. Discours aux funérailles de M. Hippolyte Langlois. — Mémoires de l'Institut, 1909, 5 p.
511. Sur la vie et l'oeuvre poétique et philosophique (de Sully Prudhomme). — Mémoires de l'Institut, 1909, p. 3—37.
512. Sully Prudhomme, mathématicien. — Rev. gén. sci. pures et appl., 1909, 20, 657—662.
513. Rapport (sur le prix Bolyai, 18.X 1910). — Bull. sci. math., 1911, 31, 1^{re} pt., 67—100; Acta math., 1912, 35, 1—28; Rendiconti Circolo mat. Palermo, 1912, 31, 109—132. Анализ работ Д. Гильберта.
514. Préface de l'Oeuvre de Jacques Lux. — В кн.: J. Lux. Histoire de deux Revues françaises. Paris, 1911, p. 5—8.
515. Préface. — В кн.: G. Lachapelle. La représentation proportionnelle en France et en Belgique. Paris, F. Alcan, 1911, p. III—XII.
516. Discours prononcé aux funérailles de M. Paul Gautier (9.XII 1909). — Annuaire Bureau Longitudes, 1911, p. D. 1—D. 11.
517. Notice nécrologique sur M. Bouquet de La Grye. — Annuaire Bureau Longitudes, 1911, p. C. 1—C. 13.
518. Discours prononcé aux funérailles de M. Rodolphe Radau (29.XII 1911). — Mémoires de l'Institut, 1911, 13—15; Bull. astron., 1912, 29, 88—89.
519. Discours au Jubile de M. Gaston Darboux (21.I 1912). — Rev. internat. Enseignement, 1912, 59, 99—102.
520. Discours au Jubile de M. Camille Flammarion. — Bull. Soc. astron. France, 1912, 26, p. 101—103.
521. Rapport sur les travaux de M. Cartan (fait à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris). — Acta math., 1921, 38, 137—145.

3. Педагогика

522. La notation différentielle et l'enseignement. — Enseignement Math., 1899, 1, 106—110; Oeuvres, t. XI, p. 125—128.
523. La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'en-

- seignement. — Enseignement Math., 1899, 1, 157—162; Oeuvres, t. XI, p. 129—133.
524. Les définitions générales en mathématiques. — Conférences du Musée pédagogique, 1904, 1—18; Enseignement Math., 1904, 6, 257—283.
525. L'Invention mathématique. — Enseignement Math., 1908, 10, 357—371; Bull. Institut gén. Psychol., 1908, 8, 175—187; Rev. du Mois, 1908, 6, 9—21; Rev. gén. sci. pures et appl., 1908, 19, 521—526; см. также [400]. Chap. III.
526. Les Astres. — В кн.: H. Poincaré, E. Perrier, P. Painlevé. Ce que disent les choses. Paris, Hachett et C^{ie}, 1912, p. 1—6.
527. En regardant tomber une pomme. — В кн.: H. Poincaré, E. Perrier, P. Painlevé. Ce que disent les choses. Paris, Hachett et C^{ie}, 1912, p. 1—6.
528. La Chaleur et l'Énergie. — В кн.: H. Poincaré, E. Perrier, P. Painlevé. Ce que disent les choses. Paris, Hachett, et C^{ie}, 1912, p. 11—14.
529. Les Mines. — В кн.: H. Poincaré, E. Perrier, P. Painlevé. Ce que disent les choses. Paris, Hachett, et C^{ie}, 1912, p. 69—74.
530. L'Industrie électrique. — В кн.: H. Poincaré, E. Perrier, P. Painlevé. Ce que disent les choses. Paris, Hachett et C^{ie}, 1912, p. 75—78.

4. Выступления, статьи

531. Sur l'application du calcul des probabilités (lettre à M. P. Painlevé). В кн.: Le Procès Dreyfus devant le Conseil du Guerre de Rennes, 7 août—9 septembre 1899. t. 3. Paris, P.-V. Stock, 1900, p. 329—331.
532. Inauguration de la statue de F. Tisserand. — Annuaire Bureau Longitudes, 1900, E. 4—E. 12.
533. Sur la vérité scientifique et sur la vérité morale. — Université de Paris. Bull. officiel Assoc. gén. Etudiants de Paris, 1903, 18, 59—64.
534. Rapport relatif à la Fondation Jean Debrousse (1 avr. 1903). — Mémoires de l'Institut. Fondation Jean

- Debrousse, 1900—1905. Rapports, p. 45—67.
535. Rapport relatif à la Fondation Jean Debrousse (23 mars 1904).—Mémoires de l'Institut. Fondation Jean Debrousse, 1900—1905. Rapports, p. 69—86.
536. Rapport relatif à la Fondation Jean Debrousse (15 mars 1905).—Mémoires de l'Institut. Fondation Jean Debrousse, 1900—1905. Rapports, p. 87—101.
537. Rapport relatif à la Fondation Jean Debrousse.—Mémoires de l'Institut, 1906, p. 65—75.
538. Sur la participation des savants à la politique.—Rev. politique et littéraire (Revue bleue), 5^e sér., 1904, 1, 708.
539. Sur la culture scientifique en Hongrie.—Magyar Szó (Budapest), 1906, N 303, suppl., p. 1—2.
540. Sur l'application du calcul des probabilités (доклад на заседании 18.IV.1904 в кассационном суде).—В кн.: Affaire Dreyfus. La Revision du Procès de Rennes. Enquête de la Chambre criminelle de la Cour de Cassation, 5 mars—19 novembre 1904, t. 3. Paris, Ligue des Droits de l'Homme, 1909, p. 500—600 (совм. с Дарбу и Аппелем).
541. Discours au Banquet de la Société amicale des Lorrains de Meurthe-et-Moselle (15.VI 1909).—Est Républicain (Nancy), 1909, N 8057, p. 2.
542. Discours a l'inauguration du monument élevé à la mémoire d'Octave Gréard (11.VII 1909).—Mémoires de l'Institut, 1909, p. 3—8; Le Temps (Paris), 1909, 12 juillet.
543. Discours.—À la réception en Sorbonne des Membres de l'Expédition dans l'Antarctique, commandée par le Dr. J. Charcot (7.XII 1910). Paris, 1910, p. 4—6.
544. Sur la prépondérance politique du Midi.—L'Opinion (Paris), 25 mars 1911, p. 353—354.
545. Les sciences et les humanités. Paris, A. Fayard, 1911, 32 p.
546. Sciences et humanités. Публичная лекция на конференции Общества американских гимназий в Вене 22.V 1912.
547. Preface to translation (of Science and Hypothesis).—В кн.: H. Poincaré. The foundation of science. Lancaster, Science Press, 1913, p. 3—7

ТРУДЫ А. ПУАНКАРЕ, ПЕРЕВЕДЕННЫЕ НА РУССКИЙ ЯЗЫК¹

1. Теория Максвелля и герцовские колебания. СПб., 1900, 98 с. [288].
2. Новая форма уравнений механики. Казань, 1901, стр. 3—5. [185].
3. Гипотеза и наука. М., 1903, 161 с. [397].
4. Наука и гипотеза. СПб., 1906, 238 с. [399].
5. О природе математических доказательств. Казань, 1898, 15 с.; в кн.: Сборник научно-популярных статей Пуанкаре, Гельмгольца, Кронекера и др. по основаниям арифметики. Казань, 1906, стр. 1—20. [408].
6. Ценность науки. М., 1906, 195 с. [398].
7. Математическое творчество. Психологический этюд. Юрьев, 1909, 24 с.; в кн.: Ж. А д а м а р. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М., «Сов. радио», 1970, стр. 135—145. [525].
8. Наука и метод. СПб., 1910, 238 с.; Одесса, 1910, 384с. [400].
9. Новая механика. СПб., 1911, 48 с.; 2 изд., Пг., 1919, 32 с.; в кн.: А. П у а н к а р е. Новая механика. М., 1913, стр. 46—92. [441].
10. Новая механика.—В кн.: Э. К о н, Г. П у а н к а р е. Пространство и время с точки зрения физики. Одесса, 1912, стр. 65—81. [440].
11. Пространство и время.—В сб. «Новые идеи в математике», сб. 2. СПб., 1913, стр. 74—90. [445].

¹ Кроме работ, помещенных в настоящем издании. В квадратных скобках указаны номера из общего списка работ Пуанкаре.

12. Почему пространство имеет три измерения. — В сб. «Новые идеи в математике», сб. 3. СПб., 1913, стр. 1—32. [447].
13. Эволюция законов. — В кн.: А. Пуанкаре. Новая механика. М., 1913, стр. 148—178. [455].
14. Гипотеза квантов. — В кн.: М. Планк, А. Пуанкаре. Новейшие теории в термодинамике. СПб., 1913, стр. 38—64; М. Планк, А. Пуанкаре. Новейшие теории в термодинамике. Пг., 1920, стр. 21—32; наст. изд., т. 3, стр. 546—558. [322].
15. Отчет о работах Д. Гильберта, представленных в 1903 г. Казанскому физико-математическому обществу для соискания международной премии имени Н. И. Лобачевского. — В кн.: Д. Гильберт. Основания геометрии. Пг., 1923, стр. 105—136. [485].
16. Последние мысли. Пг., 1923, 133 с. [401].
17. О динамике электрона. — В кн.: Г. А. Лоренц, А. Пуанкаре, А. Эйнштейн, Г. Минковский. Принцип относительности. Сборник работ классиков релятивизма. Под ред. В. К. Фредерикса и Д. Д. Иваненко. Л., ОНТИ, 1935, стр. 51—129; наст. изд., т. 3, стр. 433—486.
18. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.—Л., ОГИЗ, 1947, 392 с. [18], [20], [50], [51].
19. Введение к книге «Электричество и оптика». — В кн.: Из предистории радио. Сборник под ред. Л. И. Мандельштама. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1948, стр. 221—226; в кн.: Вариационные принципы механики. Сборник под ред. Л. С. Полака. М., Физматгиз, 1958, стр. 773—777; наст. изд., т. 3, стр. 413—418.
20. Лекции по небесной механике. М., «Наука», 1965, 571 с. [194], [195], [196].

РАБОТЫ ОБ А. ПУАНКАРЕ

- П. С. Александров.* Пуанкаре и топология. — В кн.: А. Пуанкаре, Избранные труды, т. 2, М., «Наука», 1972, стр. 809—817.
- В. Ф. Асмус.* Проблема интуиции в философии математики Пуанкаре. — В кн.: В. Ф. Асмус. Проблема интуиции в философии и математике. М., Соцэкгиз, 1963, стр. 236—257; Изд. 2, М., «Мысль», 1965, стр. 236—257.
- Б. Б. Голицын.* Ж. А. Пуанкаре. 1854—1912. — Изв. Имп. АН, 6 сер., 1912, № 13, 819—820.
- Д. А. Гольдгаммер.* О теориях Максвелла (по поводу книги: Н. Роинсагэ. Électricité et optique, t. 1. Paris, 1890). Казань, 1892, 14 с.; Учен. зап. Казанск. ун-та, 1892, кн. 4, 19—32.
- Д. Д. Иваненко.* Французская школа теоретической физики. — В кн.: Из истории французской науки. М., Изд-во АН СССР, стр. 156—181.
- В. К. Лебединский.* А. Пуанкаре в мире электричества. — ЖРФХО, 1913, 45, отдел II, вып. 2, 115—123.
- Д. Мордухай-Болтовский.* А. Пуанкаре. Оттиск из Протоколов заседаний Общ-ва естествоиспытателей при Варшавском ун-те. Варшава, 1913, 54 с.
- И. Б. Погребысский.* Анри Пуанкаре. — В кн.: Б. Г. Кузнецов, И. Б. Погребысский. Французская наука и современная физика. М., «Наука», 1967, стр. 57—62.
- Ю. Сажере.* Г. Пуанкаре. Перев. с франц. С. Слугинова. Казань, 1913, 24 с.
- В. И. Смирнов.* Три письма А. Пуанкаре А. М. Ляпунову. Публикация и примечания. — Труды Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1957, 19, 693—700.
- Л. Н. Сретенский.* Творчество Анри Пуанкаре. — Вопросы истории естествозн. и техн., 1963, вып. 15, 30—46.
- О. А. Старосельская-Никитина.* Роль Анри Пуанкаре в создании теории относительности. — Вопросы исто-

- рии естествозн. и техн., 1957, вып. 5, 39—49.
- В. А. Стеклов. Анри Пуанкаре. — Ж. Мин-ва народного просвещения, нов. сер., 1913, ч. 43, отдел Совр. летопись, 42—60; ЖРФХО, 1913, 45, отдел II, вып. 5, 173—193.
- М. Ф. Субботин. Работы Анри Пуанкаре в области небесной механики. — Вопросы истории естеств. и техн., 1956, вып. 2, 114—123.
- У. И. Франкфурт. Электромагнитные процессы в движущихся средах в трактовке Лоренца и Пуанкаре. В кн.: У. И. Франкфурт. Специальная и общая теория относительности. М., «Наука», 1968, стр. 22—28.
- М. Г. Шраер. Методы А. Пуанкаре в теории потенциала. — В сб. «Историко-математические исследования», вып. XVIII. М., «Наука», 1973, стр. 203—217.
- R. d'Adhémar. Henri Poincaré. Paris, A. Hermann et Fils, 1912, 41 p.
- R. Apery. Conférence. — Livre du Centenaire¹, p. 148—153.
- P. Appell. Henri Poincaré en mathématiques spéciales à Nancy. (Lettre à M. Mittag-Leffler. Paris, 22.XII 1912). — Acta math., 38, 1921, 189—195; Oeuvres de Henri Poincaré, t. XI, p. 139—145.
- P. Appell. Henri Poincaré. Paris, 1925.
- E. T. Bell. The last Universalist. Poincaré. — В кн.: E. T. Bell. Men of mathematics. N. Y., Dover Publications, 1937, p. 526—554.
- A. Bellivier. Henri Poincaré ou la vocation souveraine. 2^e éd. Paris, Gallimard, 1956, 245 p.
- R. Berthelot. Un romantisme utilitaire, v. 1. Le Pragmatisme chez Nietzsche et chez Poincaré. Paris, Alcan, 1911.
- E. W. Beth. Poincaré et la Philosophie. — Livre du Centenaire, p. 232—238.
- E. Borel. Allocution. — Livre du Centenaire, p. 81—83.
- E. Borel. Compte rendu de l'article de Poincaré: «La logique de l'infini». — Rev. du Mois, 1909, 8, 504.
- E. Borel. La méthode de M. Poincaré. — Rev. du Mois, 1909, 7, 360—362.
- A. Boulanger. Compte rendu et analyse de Calcul des probabilités. 2^e éd. par H. Poincaré. — Bull. sci. math., 2^e sér., 1912, 36, pt. 1, 169—184.
- P. Boutroux. Henri Poincaré: L'oeuvre philosophique. — Rev. du Mois, 1913, 15, 155—183; Henri Poincaré. L'oeuvre scientifique. L'oeuvres philosophique. Paris, 1914, p. 205—250.
- P. Boutroux. Lettre à M. Mittag-Leffler (Paris, 18.VI 1913). — Acta math., 1921, 38, 197—201; Oeuvres de Henri Poincaré, t. XI, p. 146—151.
- M. Brillouin. Compte rendu et analyse de «Théorie mathématique de la Lumière» par H. Poincaré. — Bull. sci. math., 2^e sér., 1889, 13, pt. 1, 173—198.
- M. Brillouin. Extraits de l'Ouvrage de M. Henri Poincaré sur la theorie mathématique de la lumière. — В кн.: Oeuvres de Henri Poincaré, t. X, p. 221—227.
- L. de Broglie. Henri Poincaré et les theories de la physique. — В кн.: L. de Broglie. Savants et découvertes. Paris, Albin Michel, 1951, p. 45—65.
- L. de Broglie. Extraits de la conférence à la Société astronomique de France. — Livre du Centenaire, p. 140—146.
- L. de Broglie. Henri Poincaré et les théories de la Physique. — Astronomie, 1954, 68, 217—229.
- L. de Broglie. Henri Poincaré et les théories de la physique.* — Livre du Centenaire, p. 62—71.
- L. de Broglie. Préface pour les tomes IX et X des Oeuvres de Henri Poincaré. — В кн.: Oeuvres de Henri Poincaré, t. IX, p. VII—XIII.
- M. de Broglie. Henri Poincaré et la philosophie. — Livre du Centenaire, p. 71—77.
- L. Brunschvicg. L'oeuvre d'Henri Poincaré. Le philosophe. — Rev. métaphys. et morale, 1913, 21, N 5, 585—616.
- P. G. Cath. Jules Henri Poincaré. — Eucclides, 1954—1955, 30, 265—275.
- A. Cecchini. Il concetto di convenzione matematica in Henri Poincaré. Torino, 1951.

¹ Полное название книги следующее: Le Livre du Centenaire de la naissance de Henri Poincaré. 1854—1954. Paris, Gauthier-Villars, 1955 (Oeuvres de Henri Poincaré, t. XI).

- L. Couturat.* Etudes sur l'espace et le temps de M. M. Lechalas, Poincaré, Delboef, Bergson, L. Weber et Evelin. — Rev. métaphys. et morale, 1896, 4, 646—669.
- C. Cuvaj.* Henri Poincaré's mathematical contributions to relativity and the Poincaré stresses. — Amer. J. Phys., 1968, 36, N 12, 1102—1113.
- T. Dantzig.* Henri Poincaré. N. Y.—London, Charles Scribner's Sons, 1954, 149 p.
- G. Darboux.* Éloge historique d'Henri Poincaré membre de l'Académie lu dans la séance publique annuelle du 15 décembre 1913. — В кн.: Oeuvres de Henri Poincaré, t. II, p. VII—LXXI.
- G. Darmois.* Répercussion des travaux d'Henri Poincaré dans le domaine du calcul des probabilités et de ses applications. — Livre du Centenaire, p. 127—132.
- G. Darrieus.* Contributions diverses d'Henri Poincaré à l'électrotechnique. — Livre du Centenaire, p. 132—139.
- Dassault.* Discours. — Livre du Centenaire, p. 97—106.
- H. Dingle.* Note on Mr. Keswani's article «Origin and Concept of Relativity». — Brit. J. Philos. Sci., 1965, 16, 242—246.
- R. Dugas.* Henri Poincaré devant les Principes de la Mécanique. — Rev. scient., 1951, 89, fasc. 2, N 3310, 75—82.
- C. Eisele-Halpern.* Poincaré's positivism in the light of C. S. Peirce's realism. — Actes IX Congrès internat. histoire sciences, t. 2. Paris, Hermann, 1960, p. 461—465.
- E. Faguet.* La philosophie de M. Henri Poincaré. — Rev. Latine, 1908, 7, 1—14.
- G. Fornaro.* Henri Poincaré e il valore della scienza. Napoli, 1924.
- H. Freudenthal.* Poincaré et les fonctions automorphes*. — Livre du Centenaire, p. 212—219.
- R. Carnier.* Les fonctions automorphes de Poincaré et la géométrie. — Livre du Centenaire, p. 29—48.
- S. Goldberg.* Henri Poincaré and Einstein's theory of relativity. — Amer. J. Phys., 1967, 35, 934—944.
- S. Goldberg.* Poincaré's silence and Einstein's relativity. — Brit. J. History Sci., 1970, 5, N 17, 73—84; на русск. яз.: Эйнштейновский сборник, 1972. М., «Наука», 1973, стр. 341—358.
- E. Guillaume.* Introduction. — В кн.: H. Poincaré. La mécanique nouvelle. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1924. p. V—XVI.
- J. Hadamard.* Henri Poincaré et les mathématiques*. — Livre du Centenaire, p. 450—457.
- J. Hadamard.* Le problème des trois corps. — В кн.: Henri Poincaré. L'oeuvre scientifique. L'oeuvre philosophique. Paris, 1914. p. 51—114.
- J. Hadamard.* L'oeuvre d'Henri Poincaré. Le mathématicien. — Rev. métaphys. et morale, 1913, 21, N 5, 617—658.
- J. Hadamard.* L'oeuvre mathématique de Poincaré. — Acta math., 38, 1921, 203—287; Oeuvres de Henri Poincaré, t. XI, p. 152—242.
- G. B. Halsted.* Henri Poincaré. — В кн.: H. Poincaré. The foundation of science. Lancaster, Science Press, 1946, p. IX—XI.
- Henri Poincaré (1854—1912). Nécrologie. — Rev. métaphys. et morale, 1912, Suppl., septembre, p. 1.
- G. Holton.* On the thematic analysis of science: the case of Poincaré and relativity. — Actes X Congrès internat. histoire sciences, t. 2. Paris, Hermann, 1962, p. 797—800.
- G. Holton.* On the origin of the special theory of relativity. — Amer. J. Phys., 1960, 28, 627—636.
- G. Holton.* On the thematic analysis of science: the case of Poincaré and relativity. — Mélanges Alexandre Koyré, 1964, 2, 257—268.
- G. Humbert.* Henri Poincaré. — La Nature, 1912, N 2044, 143—144.
- G. Julia.* Henri Poincaré, sa vie et son oeuvre*. — Livre du Centenaire, p. 165—173.
- G. H. Keswani.* Origin and concept of relativity. — Brit. J. Philos. Sci., 1965, 15, 286—306.
- G. H. Keswani.* Origin and concept of relativity, II. — Brit. J. Philos. Sci., 1965, 16, 19—32.
- F. Klein.* Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik in 19. Jahrhundert, Teil 1. Berlin, J. Springer, 1926, S. 374—381.

- G. Kropf. Poincaré. — В кн.: G. K r o p f. Geschichte der Mathematik. Heidelberg, 1969, S. 206—207.
- F. Kuntze. Zum Gedächtnis an Henri Poincaré. — Kantstudien, 1912, 17, 337—348.
- A. Lalande. Henri Poincaré: From Science and hypothesis to Last thoughts. — В кн.: Roots of scientific thought. Ph. P. Wiener and A. Noland (Eds). N. Y., Basic Books, 1957, p. 624—626.
- C. Lanczos. Lorentz, Poincaré, Einstein, Minkowski. — В кн.: C. L a n c z o s. Space through the ages. London a. N. Y., Acad. Press, 1970, p. 230—232.
- P. Langevin. L'oeuvre d'Henri Poincaré. Le physicien. — Rev. métaphys. et morale, 1913, 21, N 5, 675—718.
- P. Langevin. Le physicien. — В кн.: Henri Poincaré. L'oeuvres scientifique. L'oeuvres philosophique. Paris, Félix Alcan, 1914, p. 115—202.
- A. Lebeuf. L'oeuvre d'Henri Poincaré. L'astronome. — Rev. metaphys. et morale, 1913, 21, N 5, 659—674.
- E. Lebon. Henri Poincaré. Paris, 1909 (Collection: Savants du Jour).
- E. Lebon. Henri Poincaré. Biographie, bibliographie analytique des écrits. 2 éd. Paris, Gauthier-Villars, 1912, 111 p.
- E. Lebon. Notice sur Henri Poincaré. — В кн.: H. Poincaré, Leçons sur les hypothèses cosmogoniques. 2^e éd. Paris, 1913, p. III—XLVIII.
- J. Lévy. Poincaré et la Mécanique céleste. — Livre du Centenaire, p. 225—232.
- G. Lippmann. Allocation (16.12.1912). — C. r. Acad. sci., 1912, 155, 1280—1283.
- H. A. Lorentz. Deux mémoires de Henri Poincaré sur la physique mathématique. — Acta math., 38, 1921, 293—308; на русск. яз.: Г. А. Л о р е н ц. Старые и новые проблемы физики. М., «Наука», 1970, стр. 155—170.
- F. L. Lot. Henri Poincaré et l'invention mathématique. — В кн.: F. L o t. Visages des grands savants. Paris, Michel, 1963, p. 319—328.
- A. Marie. Discours. — Livre du Centenaire, p. 84—89.
- J. Marty. Compte rendu et analyse de «Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik» par H. Poincaré. — Bull. sci. math., 2^e sér., 1910, 34, partie 1, 100—104.
- H. Russell McCormach. Henri Poincaré and the quantum theory. — Isis, 1967, 58, N 191 (1), 37—55.
- G. Milhaud. La science et l'hypothèse, par M. H. Poincaré. — Rev. métaphys. et morale, 1903, 11, 773—791.
- A. I. Miller. A Study of Henri Poincaré's «Sur la dynamique de l'électron.» — Arch. history exact sci. 1973, 10, 207—328.
- N. Minorski. Influence d'Henri Poincaré sur l'évolution moderne de la théorie des oscillations non linéaires. — Livre du Centenaire, p. 120—126.
- J. J. A. Mooij. La philosophie des mathématiques de Henri Poincaré (Collection de Logique mathématique. Sér. A20). Paris, Gauthier-Villars, 1966, 174 p.
- Ch. Nordmann. Henri Poincaré. Son oeuvre scientifique — sa Philosophie. — Revue des deux Mondes, 1912, 82^e ann., 11, 331—368.
- P. Painlevé. Henri Poincaré. — Le Temps, 1912, N 18 642, p. 1.
- P. Painlevé. Henri Poincaré. — Acta math., 38, 1921, 399—402.
- F. Perrin. Henri Poincaré et Pierre Duham. — В кн.: F. P e r r i n. Histoire des sciences. Paris, Beaudart, 1956, p. 307—309.
- E. Picard. L'oeuvre de Henri Poincaré. — Ann. Ecole Normale, 3^e sér., 1913, 30, 463—482. Отд. издание: Paris, 1913, 22 p.
- M. Planck. Henri Poincaré und die Quantentheorie. — Acta math., 1921, 38, 387—397; Oeuvres de Henri Poincaré, t. XI, p. 347—356.
- R. Poirier. Henri Poincaré et le problème de la valeur de la science. — Rev. philos. France et etranger, 1954, N 10—12, 485—513; Livre du Centenaire, p. 176—202.
- G. Rados. Rapport sur le Prix Bolyai, présenté à l'Académie Hongroise des Sciences. — Bull. sci. math., 2^e sér., 1906, 30, pt. 1, 103—128.
- G. Rados. Rapport sur le Prix Bolyai. — В кн.: E. L e b o n. Henri Poincaré. Paris, 1912, p. 21—26.
- G. Rageot. La philosophie d'un géomètre: Henri Poincaré. — Revue de Paris, 1906, 13, 827—851.

- De la Rive.* Henri Poincaré le physicien. — Arch. sci. phys. et natur., 1914, 38, 159—163, 189—201.
- L. Rougier.* Henri Poincaré et la mort des vérités nécessaires. — La Phalange (Paris), 1913, 8, ann., 15, N 85, 1—20.
- L. Rougier.* La philosophie géométrique de Henri Poincaré. Thèse. Paris, F. Alcan, 1920.
- J. Royce.* Introduction (to Science and Hypothesis). — В кн.: H. Poincaré. The foundation of science. Lancaster, Science Press, 1913, p. 9—25.
- B. Russell.* Compte rendu de Science et l'Hypothèse. — Mind, 1905, 14, 412—418.
- T. Sageret.* Henri Poincaré. Paris, Mercure de France, 1911, 80 p.
- H. M. Schwartz.* A note on Poincaré's contribution to relativity. — Amer. J. Phys., 1965, 33, 170.
- H. M. Schwartz.* Poincaré's Rendiconti paper on relativity. I—III. — Amer. J. Phys., 1972, 39, 1287—1294; 1972, 40, 862—872, 1282—1287.
- L. Schwartz.* L'oeuvre de Poincaré: Équations différentielles de la physique*. — Livre du Centenaire, p. 219—225.
- Ch. Scribner.* Henri Poincaré and the principle of relativity. — Amer. J. Phys., 1964, 32, N 9, 672—678.
- M.-A. Tonnelat.* Henri Poincaré et le principe de relativité. В кн.: M.-A. Tonnelat. Histoire du principe de relativité. Paris, Flammarion, 1971, p. 123—129.
- Dr. Toulouse.* Enquête médico-psychologique sur la supériorité intellectuelle: Henri Poincaré. Paris, 1910, 204 p.
- H. Villat.* Henri Poincaré et la mécanique. — Livre du Centenaire, p. 57—61.
- V. Volterra.* L'oeuvre mathématique (d'Henri Poincaré). — В кн.: Henri Poincaré. L'oeuvre scientifique. L'oeuvre philosophique. Paris, 1914, p. 3—49.
- K. Weierstrass.* Über Poincarés Theorie der Fuchsschen Funktionen. — Acta math., 1923, 39, 240—245.
- A. Weil.* Poincaré et l'Arithmétique*. — Livre du Centenaire, p. 206—212.
- R. M. Wenley.* Scientific books: The value of Science by H. Poincaré. — Science, 1908, 27, 386—389.
- E. Whittaker.* The relativity theory of Poincaré and Lorentz. — В кн.: E. Whittaker. A History of the theories of aether and electricity, v. 2. London—N. Y., 1953, p. 27—77.
- W. Wien.* Die Bedeutung Henri Poincaré's für die Physik. — Acta math., 38, 1921, 289—291; Oeuvres de Henri Poincaré, t. XI, p. 243—246.
- E. B. Wilson.* Compte rendu de Science et l'Hypothèse. — Bull. Amer. Math. Soc., 1906, 12, 187—193.
- H. V. Zeipel.* L'oeuvre astronomique d'Henri Poincaré. — Acta math., 38, 1921, 309—385; Oeuvres de Henri Poincaré, t. XI, p. 262—346.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ *

- Абель III — 328, 343, 344, 375, 605, 611, 612, 620, 669, 688, 727, 729
 Абрагам М. III — 430, 434, 460, 463, 467, 469, 490, 491, 502, 503, 505, 510, 511, 569, 733—735.
 Адамар Ж. (Hadamard J.) I — 563, 569, 571, 572, 748, 765; II — 735, 737, 742, 758, 774, 966, 967, 982; III — 605, 628
 Адамс Дж. I — 750, 753
 Аксенов. I — 748
 Александер Дж. II — 813—815, 977, 978, 980, 982
 Александров П. С. II — 977, 981; III — 721
 Алексеев В. М. I — 756; II — 965
 Альфан (Halphen) III — 99, 337, 338, 584, 585, 605, 663
 Альфорс Л. III — 717, 721, 723
 Андрад III — 423
 Андронов А. А. I — 765
 Анри III — 665
 Антуан II — 813
 Аппель П. II — 969, 970, 974; III — 594, 615, 619, 627, 665, 666
 Араго III — 735
 Аретю (Spiru-Aretu) I — 754; II — 451
 Арнольд В. И. I — 751, 752, 756, 759—764; II — 963, 966, 967
 Аронхольд (Aronhold) II — 820, 832, 835, 878
 Арцер (Harzer) II — 449
 Афанасьева-Эренфест Т. (Ehrenfest T.) III — 730

 Баас II — 979
 Бабине III — 735
 Бадалян I — 748
 Бартоли III — 501, 513, 514, 568
 Безу III — 728
 Беккерель III — 570, 654, 663
 Белага Э. Г. I — 765
 Белорицкий Д. I — 755

 Берс Л. III — 717, 721, 723
 Бертран Ж. III — 663, 666
 Бессель II — 81, 82; III — 650, 704
 Бетти I — 751; II — 455, 456, 458, 459, 470, 471, 475, 490, 508, 509, 519, 520, 527—532, 542, 548—552, 557, 563, 567, 576, 579, 581, 583—585, 597, 603, 604, 612, 622, 633, 668, 676, 685, 691, 729, 733, 813—815, 976—979, 981; III — 634—636
 Биллинг II — 992
 Биркгоф Дж. Д. (Birkhoff G. D.) I — 747, 753, 758, 759, 763, 764; II — 811, 964—967, 978, 983—985, 987
 Биркленд III — 654
 Бляшке II — 740
 Боголюбов Н. Н. I — 756, 757, 764, 765; II — 964, 965; III — 730
 Бойяи III — 672
 Болин I — 331, 604, 628, 673, 701, 723, 727, 754, 765; II — 85, 86, 90, 262, 290, 339, 358, 451; III — 641
 Больцман Л. III — 518, 532, 564, 652, 663, 705, 729
 Бонне О. II — 758, 983; III — 725
 Бор III — 709, 737
 Борн III — 709
 Ботт II — 981
 Бошкович III — 736
 Браве II — 883, 897; III — 630
 Браге Тихо III — 423
 Браун III — 642, 663
 Браун А. II — 981
 Брауэр II — 905, 993
 Брауэр Д. I — 753
 Брауэр Л. (Brouwer L. E.) II — 810, 812—815, 977—979, 989—991; III — 696
 Бредли (Bradley) III — 494, 735
 де Брейн Н. I — 756
 Брио II — 968; III — 560, 580, 581, 597
 Брумберг В. А. I — 756

* Римскими цифрами обозначены тома настоящего издания.

Брунс I — 64, 222, 547, 552; II — 51, 62, 440, 450; III — 638
 Брюно А. Д. I — 764
 Буке II — 968; III — 580, 581, 597
 Бутру П. III — 671
 Бухерер А. (Bucherer) III — 434, 735
 Бьеркнес III — 655

Валле-Пуссен III — 700
 Ван-дер-Поль I — 756
 Ватсон I — 752
 Вебер III — 510, 653
 Веблен О. (Veblen O.) II — 984, 985
 Вейерштрасс (Weierstrass) I — 271, 272, 550; II — 809, 966, 967, 969—975; III — 78, 331, 363—365, 604—606, 609, 610, 617, 619, 663, 670, 675, 676, 697, 700
 Вейль А. (Weil A.) II — 909, 948, 958, 960, 992, 995; III — 728
 Вильсон Э. Б. II — 985—987
 Вин III — 540, 552
 Винер III — 653
 Вихерт Э. III — 489, 733
 Волосов В. М. I — 757

Гайль III — 735
 Галилей II — 808
 Галуа II — 992; III — 594, 616
 Гамбургер III — 151—153, 589
 Гамильтон I — 758—764; II — 192, 225, 234, 322, 742, 988; III — 516, 523, 548, 550, 551, 554, 555, 639, 730, 737
 Ганзен I — 754
 Гарнье Р. II — 983
 Гартман III — 665
 Гаусс I — 23, 26, 137, 756; II — 363, 902, 903; III — 97, 144, 630, 633, 652, 718, 725
 Гейзенберг III — 709
 Гекке III — 684, 685
 Гельмгольц II — 11; III — 652, 654, 657, 662, 663
 Герц Г. III — 457, 488, 492, 496, 500—502, 507, 516, 550, 553, 567, 573, 654, 697, 705, 708, 734, 736
 Гесс II — 820, 829
 Гиббс III — 385, 386, 402, 404, 410, 411, 564, 652, 705
 Гильберт Д. II — 767, 809, 905, 983, 993; III — 695, 700, 704, 715, 720, 721
 Гильден I — 10, 11, 17, 75, 114, 329—331, 344, 345, 359, 509, 510—514, 516, 517, 519, 520, 522, 526—528, 530, 531, 547, 550, 552, 572, 573, 582, 591, 592, 594, 596, 599, 600, 726, 754; II — 247, 446, 449, 451; III — 640, 646, 661.

Гинцелин III — 664
 Голубев В. В. III — 721
 Гольдштейн III — 491
 Гордан III — 345
 Грауэрт Г. II — 995
 Гребенников I — 748
 Грин III — 247, 259, 640
 Гротендик III — 726
 Гуи III — 564, 572, 653, 662
 Гук III — 735
 Гупка III — 735
 Гурвиц II — 905, 993; III — 62
 Гуревич В. II — 810, 980, 982
 Гурса III — 215
 Гучча Дж. Б. II — 984; III — 679
 Гюйгенс III — 653

Данциг (Dantzig) II — 985, 986
 Дарбу (Darboux) I — 234, 241, 269, 270; II — 774; III — 595, 642, 668
 Дарвин Дж. Г. II — 309—311, 314, 316, 967; III — 512, 513
 Дедекиннд II — 946; III — 62, 144
 Делоне I — 10, 331, 604, 608, 626, 628, 747, 751, 754, 765, II — 312, 446; III — 600, 641, 663
 Демин I — 748
 Ден II — 976, 982
 Джинс III — 550, 737
 Дик В. (Dyck W.) II — 458, 978; III — 62, 214
 Дирихле (Лежен-Дирихле) II — 864, 948, 968, 971—973, 983; III — 144, 587, 607, 648, 649, 651, 670, 680, 681, 689, 697—702, 704, 715, 716
 Дольбо III — 726
 Допплер III — 522, 545, 551—553, 557
 Дубошин Г. Н. I — 749
 Дюамель III — 666

Евклид III — 15, 587, 656

Жонкьер II — 531
 Жордан К. (Jordan C.) II — 458, 814, 819, 867, 872, 874, 879; III — 9, 327, 328, 594, 631, 632, 669, 682, 715

Заславский Г. М. II — 967
 Зеeman III — 493, 573, 654, 736
 Зейферт (Seifert H.) II — 980, 983
 Зельмер II — 992
 Зигель К. Л. (Siegel C. L.) I — 751, 753, 759, 764; II — 992; III — 683, 715
 Золотарев Г. II — 865—867
 Зоммерфельд I — 752; III — 557

Игуза III — 726

- Калинон (Calinon A.) III — 422, 423
 Калландро I — 64
 Кан II — 980
 Кантор II — 419, 813; III — 607
 Капица П. Л. III — 735
 Каратеодори II — 740, 964, 965
 Карно III — 385, 396, 404, 410, 411, 548, 550, 551, 561, 563, 564, 572
 Картан Э. II — 455, 963, 978, 979
 Касселс Дж. II — 992, 995
 Кастельнуово III — 310, 334, 338, 378, 725, 726
 Кауфман В. III — 430, 431, 434, 490, 491, 494, 503, 515, 569, 733—735
 Кебе П. III — 695, 715, 720
 Келлог II — 978
 Кельвин (см. Томсон В.)
 Кеплер I — 31, 60, 137, 749; II — 81, 318, 445, 448; III — 436, 495, 511, 678
 Кернс С. II — 981
 Киллинг III — 626
 Кирхгоф III — 653
 Клаузиус III — 652
 Клебш (Clebsch A.) II — 820, 832; III — 319, 345
 Клейн Ф. (Klein F.) II — 458, 808, 810, 812, 978, 990, 991; III — 11, 41, 62, 144, 170, 173, 214, 235, 236, 244—253, 259—261, 266, 271—273, 280, 283, 286—288, 291, 303, 304, 309, 584, 590, 669, 685, 687, 689, 693, 695, 696, 715, 724, 725
 Клеменс Дж. I — 753
 Кнезер II — 982
 Ковалевская С. I — 223, 226, 752; II — 969; III — 154, 580, 581, 617, 643
 Кодаир III — 726
 Колмогоров А. Н. I — 752, 756, 759, 761—763; II — 815, 967
 Колсон III — 665
 Колумб Х. III — 423
 Коннер П. II — 979
 Коперник III — 435, 436
 Кориолис III — 649
 Коркин А. II — 819, 865—867
 Корню III — 652
 Коши I — 13, 47, 50, 51, 55, 71, 333, 747; II — 357, 809; III — 413, 580, 581, 609, 612—614, 650, 651, 675, 677
 Крейн М. Г. I — 764
 Кремье В. III — 489, 733, 734
 Кронекер Л. I — 70, 749; II — 777, 785, 813, 973, 974; III — 620, 643
 Крукс III — 488
 Крускал М. I — 757
 Крылов Н. М. I — 756; II — 964, 965
 Кулон III — 418, 510
 Куммер II — 946, 968
 Купмен Б. II — 981
 Кэли III — 684
 Кэрнс С. II — 981
 Кюри III — 570, 574
 Лавуазье III — 562, 568, 570
 Лагерр III — 608, 625, 663
 Лагранж I — 9, 87, 223, 226, 362, 363, 371, 417, 425, 753, 754, 756, 763; II — 130, 131, 226, 447, 451, 742, 809, 963, 966, 973; III — 416, 417
 Ланжевен П. III — 430, 434, 454, 456, 459, 462—465, 467, 506, 703, 733
 Лаплас (Laplace) I — 9, 87, 137, 138, 141, 367, 369, 371, 754; II — 438, 447, 450, 809, 816; III — 413, 431, 432, 435, 480, 509, 512, 515, 560, 567, 583, 644, 647—649, 651, 708
 Лармор III — 571, 654
 Лебег I — 762; II — 977; III — 700
 Лебедев П. Н. III — 736
 Леванши III — 735
 Леверрье I — 9, 278, 365, 371, 753; II — 446; III — 736
 Леви Ж. II — 975
 Левитан Б. М. II — 737
 Лежандр II — 967, 993
 Ленг С. (Lang S.) II — 992, 995
 Ленин В. И. III — 732
 Леонтович А. М. I — 763
 Лере Ж. II — 977
 Лесаж III — 511—514
 Лефшец С. (Lefschetz S.) II — 456, 814, 978—981; III — 350, 726, 729
 Ли II — 988; III — 452, 453, 618, 624—626, 657
 Лиар III — 665
 Линдеман III — 504, 574
 Линдштедт I — 10, 11, 114, 330, 344—346, 358—361, 371, 380, 412, 425, 547, 554, 667, 754, 756—758, 760—764; II — 342, 376, 428, 430, 432, 433, 435, 446, 451, 967, 975; III — 640, 641, 646
 Лиувилль III — 554, 730
 Литлвуд Дж. I — 764
 Лобачевский III — 15, 587, 623, 656, 657, 672, 715, 716, 724
 Лоран I — 270
 Лоренц Г. А. III — 429—442, 449—453, 456, 457, 460—463, 465—467, 469—480, 483, 492, 496—503, 505, 508—511, 514, 546, 565, 569, 570, 572, 654, 697, 705—707, 732—737

Льенар III — 430
 Люстерник Л. А. I — 751; II — 983
 Ляме I — 550, 552, 764; III — 644, 652
 Ляпунов I — 763; III — 645

Майе II — 905
 Майер III — 561, 574
 Майкельсон III — 429, 433, 496—499, 565, 568, 569, 573, 706, 736
 Маклорен III — 690
 Максвелл (Maxwell J. C.) III — 396, 409, 413—415, 417, 418, 457, 501, 513, 514, 544, 553, 562, 564, 568, 645, 652, 654, 661—663, 705, 706, 733
 Мамфорд Д. II — 995; III — 726, 727
 Манин Ю. И. II — 994, 995
 Мариотт II — 767
 Маскар III — 735
 Маскит Б. III — 723
 Матиссен III — 643
 Матье (Mathieu) I — 764; II — 451
 Мачек III — 736
 Мельников В. К. I — 760
 Менгер II — 815
 Мерман Г. А. I — 756, 760
 Мефруа Ж. (Meffroy J.) I — 754
 Мёбиус II — 478, 682, 978
 Милнор Дж. (Milnor J.) I — 750; II — 456, 981, 983
 Минковский Г. II — 864, 993; III — 433, 434, 438, 441, 732, 733
 Миттаг-Леффлер Г. (Mittag-Leffler G.) I — 751; II — 967, 969—975; III — 79, 604, 671, 675
 Митропольский Ю. А. I — 757, 764, 765
 Мозер Ю. (Moser J.) I — 752, 756, 760—763, 766; II — 967
 Мопертюи II — 192, 224—227, 231, 235—237, 242, 244, 249, 321, 322; III — 639
 Морделл Л. Дж. (Mordell L. J.) II — 909, 948, 958, 991, 994, 995; III — 686
 Мордух III — 732
 Морли III — 568, 736
 Морс М. (Morse M.) I — 750, 751; II — 456, 978, 981, 983, 984, 988

Нагель II — 992
 Натанзон С. М. III — 715
 Неванлинна Р. III — 717
 Нейман III — 735
 Нейман К. III — 648, 649, 697, 698, 701, 702
 Нейман Ф. III — 417, 653
 Немыцкий В. В. II — 965, 966
 Нернст III — 521, 737

Нерон А. II — 901, 992, 995; III — 686; 726, 728
 Нетер II — 905; III — 336, 729
 Нетер Э. II — 814
 Ньюком I — 330, 344, 345, 361, 363, 371, 467, 512, 600, 667, 754, 761; II — 342, 967, 975; III — 641
 Ньютон I — 9, 11, 12, 107, 372, 425, 527, 594, 753, 761, 763; II — 50, 445, 446, 808, 968, 970, 972, 975; III — 395, 422, 423, 426, 427, 431, 435, 476, 477, 480—482, 484, 486, 487, 507—510, 512, 521, 546, 561, 567, 568, 570, 643, 732, 734

Пандер Г. III — 489, 734
 Папакирьякопулос II — 982
 Паршин А. II — 995
 Паскаль II — 383, 751, 923, 924
 Пенлеве П. (Painlevé P.) II — 973, 974; III — 672
 Перрон I — 748
 Пикар (Picard E.) I — 550; II — 456, 458, 520, 549, 633, 634, 641, 655, 658, 661, 664, 665, 667—671, 977, 981; III — 236, 271, 282, 312, 319, 324, 333, 345, 349, 355, 359, 363, 589, 591, 605, 611—613, 616—619, 622, 623, 649, 650, 701, 726—729, 735
 Планк М. III — 516—522, 526, 534, 536, 539—542, 544, 549—557, 709, 710, 735—737
 Понтрягин II — 815
 Птолемей III — 435, 436, 678
 Пуанкаре Антони III — 664
 Пуанкаре Люсьен III — 664
 Пуанкаре Раймон III — 664
 Пуансо I — 224, 225
 Пуассон I — 19, 149, 171, 175, 233, 425, 754; II — 47, 130, 131, 142, 149—151, 156, 157, 358, 451, 963—965; III — 639, 641, 698
 Пью (Pugh) I — 749
 Пюизе I — 747

Радо III — 645
 де Рама II — 455, 979
 Рамзай У. III — 571
 Рассел III — 657, 658
 Ратновский III — 735
 Редже I — 752
 Рейнольд III — 735
 Рейнхарт II — 981
 Рентген III — 513, 654, 663, 734
 Ремер III — 427
 де ля Рив III — 655
 Риккати III — 593

- Риман Б. II — 455, 458, 471, 809, 810, 812, 976—979, 981; III — 206, 207, 327, 328, 331, 371, 375, 587, 618, 619, 621, 634, 677, 685, 688—690, 695, 697, 700, 701, 721, 727
- Роллье III — 666
- Роуланд III — 489, 565, 733, 734
- Рохлин II — 979
- Руше III — 666
- Рэлей III — 549, 737
- Саламон III — 736
- Сальмон (Salman G.) II — 833
- Самойленко А. М. I — 766
- Саразен III — 655
- Сарро III — 653
- Севери (Severi F.) III — 310, 333, 334, 338, 378, 726, 728, 729
- Селлерье I — 365
- Селлинг Е. II — 864
- Серр Ж. П. II — 992
- Сильвестр III — 625, 672
- Ситников К. А. I — 756; II — 965
- Слудский Ф. А. II — 973
- Смейл С. II — 981, 982
- Смит II — 981
- Спрингер Дж. III — 717, 727
- Степанов В. В. II — 965, 966
- Стилтьес I — 64
- Стиррод II — 979
- Стирлинг I — 300, 301, 322, 324—326, 333; III — 583, 640
- Стокер Дж. I — 764
- Стокс II — 16; III — 736
- Столлинкс Дж. II — 980, 982
- Стретт М. Д. О. I — 764
- Сулливан II — 979
- Сундман К. Ф. (Sundman K. F.) I — 755; II — 967, 971, 973
- Тальквист I — 748
- Таннери I — 552
- Тейлор I — 157, 234, 753; II — 746; III — 411
- Тейт Дж. II — 992, 995
- Тейхмюллер О. (Teichmüller) III — 717, 723
- Тиссеран (Tisserand F.) I — 133, 136, 137, 240, 241, 425, 536, 538, 749; II — 362, 449; III — 510, 646, 663, 668
- Тиссо III — 667, 668
- Титце II — 981
- Том Р. II — 979
- Томе III — 582—584
- Томмазина III — 513
- Томсон В. III — 643, 644, 662
- Томсон Дж. Дж. III — 489, 733
- Трельфалль (Threlfall W.) II — 980, 983
- Триккер III — 735
- Трикоми Ф. III — 721
- Трувело III — 645
- Уайтхед Дж. II — 981
- Уинтнер А. I — 753
- Уитни Х. II — 979, 981
- Уитроу III — 732
- Уленбек Дж. III — 730
- Уоллес А. II — 982
- Урысон П. С. II — 815
- Ферма II — 931
- Фехнер III — 656
- Физо III — 496, 502, 522, 545, 551—553, 557, 568, 736
- Фицджеральд III — 433, 498, 499, 502, 706
- Фламм I — 232, 234, 236; III — 642
- Флойд Э. II — 979
- Флоке I — 64
- Флэмстид III — 735
- Фок I — 752
- Форд Дж. III — 730
- Форд Р. III — 717
- Фрагмен Э. II — 974
- Франклин III — 508, 509
- Фредгольм III — 670, 702
- Френель III — 414, 417, 433, 496, 653, 662, 705, 735, 736
- Фробениус III — 366, 584
- Фукс I — 552; II — 968; III — 62, 94, 128, 144, 151, 580, 581, 584, 589, 593, 663, 690, 692, 721
- Фурье Ж. I — 234, 729, 730, 748, 757; II — 266, 268, 271, 273, 290, 772; III — 519, 536, 537, 560, 574, 648, 649, 651, 670, 684, 685, 704
- Хансен III — 661
- Харцер I — 137
- Хассе II — 993, 994
- Хевисайд О. III — 733
- Хегор (Heegard) II — 455, 456, 549, 550, 552, 609, 638, 813, 976, 979, 980; III — 635
- Хек III — 735
- Хенон М. (Henon M.) I — 748
- Хилл (Hill G. W.) I — 10, 87, 88, 93—98, 136, 141, 142, 145, 466, 547, 558, 561—563, 571, 750, 751, 765; II — 358, 446, 447, 449, 451; III — 627, 628, 642, 663
- Хильми Г. Ф. I — 756

Хинчин II — 964
Холл III — 654
Хопф II — 810, 964, 965, 976, 977, 979

Цаппа III — 726
Цейпель В. (Zeipel V.) I — 765; II — 965

Цермело Э. III — 729
Цишанг Х. (Zieschang H.) II — 981

Чеботарев Г. А. I — 753
Чебышев III — 633
Чех Э. II — 810, 977, 980
Чириков Б. В. II — 967

Шазн Ж. (Chazy J.) I — 756; II — 965, 966

Шаль III — 666
Шарлье К. I — 748, 753
Шателе Ф. II — 901, 905, 992
Шаудер II — 978
Шафаревич И. Р. II — 992
Шварц III — 62, 144, 236, 245, 584, 587, 607, 608, 648—650, 669, 695, 698, 699, 701, 723

Шенфлис II — 979
Шимура Г. (Shimura G.) III — 717
Шмидт О. Ю. I — 756
Шнайдер III — 736
Шнирельман А. И. II — 988
Шнирельман Л. I — 751; II — 983
Шоттки III — 160
Шредингер III — 709
Штейнер II — 820; III — 337
Штурм II — 737; III — 596

Эйзенштейн III — 591, 633
Эйлер I — 223, 333, 750, 753; II — 79, 455, 459, 496, 531, 966, 979; III — 635
Эйнштейн А. III — 433, 434, 438, 441, 706, 707, 709, 731—737
Эйри III — 736
Эйхенвальд А. А. III — 734
Эйхлер М. III — 717
Эллио III — 665
Энрикес (Enriques F.) III — 310, 334, 338, 378, 726

Эрдеи I — 756
Эренфест П. (Ehrenfest P.) III — 730, 737
Эрмит Ш. I — 550; II — 819, 831, 843, 861, 864, 888, 898, 967, 969; III — 144, 631, 663, 674, 675, 682, 690

Юнг III — 735

Якоби К. Г. Я. I — 13, 16, 18—20, 233, 341, 350, 547, 550, 673, 676, 701, 702, 723, 758; II — 50, 68, 77, 78, 86, 92, 145, 287, 309, 325, 343, 353, 384, 414, 743, 758, 780, 788, 809, 983, 988; III — 140, 616, 619, 624, 625, 637, 641, 643, 644, 669, 688, 689, 728
Яуман III — 654

Abraham R. I — 748
Barton D. I — 756
Châtelet A. II — 898
Chisini O. III — 728
Conforto F. III — 728
Couley C. C. I — 748
Ferraz Mello Sylvio I — 765
Fricke R. III — 715
Henderson A. III — 335
Humbert G. III — 726
Jessop C. M. III — 337
Keen L. III — 715
Kyner W. T. I — 748
Liao S. D. II — 981
Marsden J. I — 748
Meyer V. III — 735
Miyahara S. I — 764
Reichart W. III — 735
Richardson M. II — 981
Rüssmann H. I — 764
Simart G. III — 319, 728
Stub H. H. III — 735
Swan R. G. II — 981
Waldhausen F. II — 982
Winkler H. III — 735
Zamboni F. III — 735
Zariski O. III — 726
Zych W. III — 735

СОДЕРЖАНИЕ

От редакции	5
-----------------------	---

МАТЕМАТИКА

Теория фуксовых групп	9
О фуксовых функциях	63
О группах линейных уравнений	145
Фуксовы функции и уравнение $\Delta u = e^u$	235
О кривых на алгебраических поверхностях	310
О кривых на алгебраической поверхности	351

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Замечания о кинетической теории газов	385
Электричество и оптика (введение)	413
Измерение времени	419
О динамике электрона	429
О динамике электрона	433
Динамика электрона	487
О теории квантов	516
О теории квантов	521
Гипотеза квантов	546
Настоящее и будущее математической физики	559

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ РАБОТ АНРИ ПУАНКАРЕ

Аналитическое резюме	579
Первая часть. Дифференциальные уравнения	580
Вторая часть. Теория функций	604
Третья часть. Различные вопросы чистой математики	624
Четвертая часть. Небесная механика	637

Пятая часть. Математическая физика	647
Шестая часть. Философия науки	656
Седьмая часть. Преподавание, популяризация, разное	661
Г. Жюлиа. Анри Пуанкаре, его жизнь и деятельность	664
Ж. Адамар. Анри Пуанкаре и математика	674
А. Вейль. Пуанкаре и арифметика	682
Г. Фрейденталь. Пуанкаре и теория автоморфных функций	687
Л. Шварц. Анри Пуанкаре и дифференциальные уравнения физики	697
Луи де Бройль. Анри Пуанкаре и физические теории	703

КОММЕНТАРИИ. БИБЛИОГРАФИЯ

Комментарии	715
Библиография	738
Именной указатель	764

Анри Пуанкаре
Избранные труды, том III

Утверждено к печати
Редакционной коллегией серии «Классики науки»

Редактор *В. А. Никифоровский*
Редактор издательства *В. П. Сироткина*
Художественный редактор *Н. Н. Власик*
Технический редактор *П. С. Кашина*

Сдано в набор 7/VIII 1973 г.
Подписано к печати 16/I 1974 г.
Формат 70×90¹/₁₆. Бумага типографская № 1.
Усл. печ. л. 56,59. Уч.-изд. л. 49,7.
Тираж 11 500. Тип. зак. 531
Цена 4 р.

Издательство «Наука»
103717 ГСП. Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
1-я тип. издательства «Наука»
199034, Ленинград, В-34, 9 линия, д. 12

